DE MORGAN'S

ELEMENTS OF ALGEBRA:

TRANSLATED INTO THE MARATHI LANGUAGE

BY

COLONEL GEORGE RITSO JERVIS,

CHIEF ENGINEER BOMBAY PRESIDENCY,

Assisted

BY



VISHNOO SOONDER CHUTRAY,

GUNGADHUR SHASTRI PHUDKAY,

AND

GOVIND GUNGADHUR PHUDKAY.

Bombay.

APRIL,

1848.

ड मार्गन याचा

बीजगणित मूळपीठिका

यांचें मराठी भाषांतर

कारनेल जार्ज रिट्सो जर्विस साहेब

मुंबईखात्याचे चीफ इंजनेर

यांणी

विष्णु सुंदर छत्रे, गंगाधर शास्त्री फडके
आणि
गोविंद गंगाधर फडके

यांचा साहाय्यानें केलें

मुकाम मुंबई

माहे एप्रिल सन १८४८

TO

THE HONORABLE GEORGE RUSSELL CLERK,

GOVERNOR OF BOMBAY,

One of the most eminent of those Statesmen who have laboured in many ways, and with conspicuous success, for the mental and moral improvement of the Natives of Hindoostan; and who considers that the introduction into India of European knowledge and modern science, by translation from the languages of Europe into the languages of the East, is the true basis on which the Education of the mass of the Native population should be founded; this translation into Mahrathi of Professor De Morgan's pre-eminently lucid treatise on the Elements of Algebra, is, with sentiments of unfeigned admiration and regard, dedicated, by his most obedient humble servant

GEORGE RITSO JERVIS.

Bombay, 15th April 1848.

Vinayak Bapu Gokhale

U52eu

बीजगणित

मूळपीठिका

बुद्धि पाजवून तीक्ष्ण केली असतां, केवढा लाभ होईल. हें सांगत फिरण्याचें प्रयोजन नाहीं, कांकीं, तो लाभ बहुत मोठा आहे, असें सर्व लोक कबूल करितात. कोण एखादा मूर्ख मनुष्य आपल्ये मनांत समजेल, कीं मी फार शाहाणा होईन, परंतु जो माणूस, मी अतिशाहाणा होईन, हें भय, जितकें जितकें धरितो, तितका तितका तो शाहाणपणापासून दूर रहातो. सारांश हाच, कीं गणितविद्येपासून लाभ होतो, असें पुष्कळ लोक मानितात; परंतु तो लाभ संपादायासाठीं शिकण्यास राजी, असें थोडे आढळतात. गणितविद्येस बहुत लोक वाखाणितात, परंतु व्यापार उदीम, अशी हलकें कामाचे गरजे खेरीज, या विद्येस शिकणारे थोडे. अशा कामांत लोभानें प्रवासाचे श्रम घेण्यास ही, ते राजी होतात. अशा लोकांचा उपयोगासाठीं गणिताचा पहिला भाग तयार केला. परंतु हा दुसरा भाग पहिल्या भागापेक्षां किती उत्तम आहे, हें जर ते जाणतील, तर ते याजवर जो वेळ घालविला, तो फुकट गेला, असें कधीं ही मानणार नाहीं. इतकेंच केवळ नाहीं, दुसऱ्या विद्यांचा अभ्यासाविषयीं उपयोगी पडे, अशी याविद्येंत निपुणता प्राप्त होईपर्यंत, आपला वेळ चागला गेला, असें ही ते मानणार नाहीं.

ज्ञानप्राप्ती स्वकष्टानें आणि स्वविचारानें होत्ये. दुसऱ्याचे सांगण्यावरून, केवळ पाठ करणें, हा ज्ञान प्राप्तीचा उपाय नव्हे. जें काहीं करायाचें, त्याचें कारण सांगण्याची अवश्य संवय केली पाहिजे. अशी संवय करण्यास, जरी पहिल्यानें अवघड वाटतें, तथापि ती अभ्यासानें सोपी होत्ये. आणि एकदां संवय झाली, म्हणजे, ती कधीं सुटत नाहीं.

मुंबई

इश्वीसन् १८४७

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

बीजगणितमूळपीठिका.

प्रवेशक.

जो कोणी बीजगणित शिकायास इच्छील, त्याला अगोधर अंकगणिताची चांगली माहीत असावी, आणि तो खचीत व्यवहारी आणि दशांश अपूर्णांकांत पक्का जाणता असावा. एवढें ज्ञान नसेल तर हेंच बरें, कीं त्याणें आरंभीं तें शिकून घ्यावें, कांकीं त्या शिवाय बीजगणिताचें संपादन करायास दुसरा काहीं सुगम मार्ग नाहीं.

अंकगणिताचीं कामें, चिन्हानीं होतात. अंक ह्मणजे भलत्ये परिमाणाचें चिन्ह आहे; तें परिमाण कोणत्ये जातीचें आहे, तें तो अंक दाखवीत नाहीं. जर कोणी मनुष्य आपल्येपाशीं मेंढरें किती आहेत, त्यांची गणना कळायास तो ती खड्यानीं करितो, तेव्हां ते खडे त्या मेंढ्रांचें संख्याचिन्ह आहेत. ही रीति फार लांब आणि श्रमाची आहे, यास्तव हल्लीं, अंकांची संख्या जाणायासाठीं, कागदावर अनेक तऱ्हेचीं चिन्हें करितात; आणि जेव्हां १ अशा चिन्हाचा अर्थाचा नेम ठरविला, तेव्हां त्यावरून दुसऱ्या प्रत्येक चिन्हाचा अर्थ ठरविला जाईल. जेव्हां लांबीविषयीं विचार करितों, तेव्हां, इच्छेप्रमाणें, भलती कांहीं लांबी घेऊन, तीस एक ह्मणतों. व्यवहारांत तो एक अनेक वस्तूंचा मागें विशेषण रूपानें लागतो; जसें एक हात, एक कोस; परंतु अंकगणितामध्यें त्या एकानें गणना होत्ये, तेव्हां तो नुसता १ आहे. आतां + या चिन्हास वहिवाटींत आणिलें, आणि असें मानिलें कीं जेव्हां दोन अंकांमध्यें + हें चिन्ह ठेविलें, तर असें जाणावें, कीं त्या दोन परिमाणाची बेरीज घेण्याचें चिन्ह आहे. जसें, जर

१ हें लांबीचें चिन्ह आहे —

१ + १ हें ही लांबीचें चिन्ह आहे — —

१+१ याचें संक्षेपानें याप्रमाणें चिन्ह घेतों (२); ह्मणजे हें चिन्ह, दोन, ही संख्या दाखवावयास नवें कल्पित घेतलें आहे. तसें २+१ संक्षेपानें याप्रमाणें चिन्ह घेतों (३); ह्मणजे तीन. तसें ३+१, संक्षेपानें, याप्रमाणें चिन्ह घेतों, (४); ह्मणजे चार. याप्रमाणें पुढेंही.

जेव्हां १, २, ३, इत्यादिकांचा अर्थ १ कोस, २ कोस, ३ कोस, इत्यादि; अथवा १ शेर, २ शेर, ३ शेर, इत्यादि असेल, तेव्हां त्या अंकास विशेषणांक ह्मणतात. परंतु जेव्हां १, २, ३, इत्यादि विशेष्य वस्तूचे अंक अशी कल्पना न केली, जसें, **साहा आणि चार मिळून दहा होतात**, तेव्हां त्या अंकास केवळ अंक ह्मणतात. गणित पुस्तकांत शिकणारास केवळ अंकाची मात्र ओळख होत्ये; विशेषणांक आणि केवळ अंक, या दोहोंमध्यें जो भेद आहे, तो त्यास उघडा समजत नाहीं. समजातीय एकंचा विशेषणांकानीं, गणितामध्यें, किती कृती केल्या जातात? **केवळ मिळवणी आणि वजाबाकी.** कोसास कोस मिळविले जातात, अथवा कोसांतून कोस वजा केले जातात. गुणाकारांत १, २, ३, इत्यादि अंकामध्यें कांहीं नव्ये तऱ्हेचें ध्वनित होतें; तें असें कीं, कांहीं काम **वारंवार** करायाचें, त्यास तेवढ्या **वेळा** ह्मणतात. ६ कोस ५ **वेळा घे.** यांत एकंचा दोन जाती आहेत; ह्मणजे एक एकं १ कोसाचा दर्शक आणि दुसरा एकं १ **वेळेचा** दर्शक, गुणाकारांत अशी दोन एकं मातील, एक तरी अगत्य **वेळेचा** दर्शक असला पाहिजे; आणि ६ कोस ३ **कोसानीं** गुणावे, असें ह्मणणें, हें फार अयोग्य आहे. ६ कोस ३ कोस **वेळा** घे यापासून काय समजेल? कांहींच समजणार नाहीं.

परंतु या पुढील प्रश्नावर कांहीं विचार कर. **जर कापडाचे एक गजाला ५ रुपये पडतात, तर १२ गजांस किती पडतील?** याचें उत्तर जाणणें, तर १२ **गज ५ रुपयानीं** गुणिलात किं काय? नाहीं. कारण अशा रीतीनें गुणाकार होत नाहीं. या प्रश्नास उलगडून उत्तर काढण्यासाठीं, याप्रमाणें कृती होत्ये: सांगितलें आहे कीं प्रत्येक गजाची किंमत ५ रुपये आहे;

तर जेवढ्या वेळा कापड विकणारा एक एक गज, वारंवार मोजून देतो, तितके वेळा विकत घेणारानें, वारंवार, ५ रुपये दिले पाहिजेत; ह्मणजे तो ५ रुपये १२ वेळा देतो. यावरून मुख्यत्व वेळांवर आहे.

भागाकारांत अशी कल्पना आहे, कीं कांहीं पुनःपुनः करायाचें अथवा विभागावयाचें आहे; ह्मणजे भळतें कांहीं परिमाण अमुक समभागांत विभागावयाचें १८ कोसांस ३ कोसांनी भाग. अर्थ ह्याच, शोधून पाह्या कीं ३ कोस किती वेळा पुनःपुनः घ्यावे, असें कीं १८ कोसां बराबर होतील: परंतु याप्रमाणें जर ह्मटलें, कीं १८ कोस ३ नीं भाग, तर अर्थ ह्याच, १८ कोस ३ समभागांत विभागावयाचे, आणि त्या प्रत्येक समभागांत किती कोस आहेत हें शोधायाचें.

१८ कोस ३ कोसांनी भागले असतां ६ येतात; ह्मणजे अर्थ ह्याच कीं १८ कोस पुरे होण्यासाठीं, ३ कोस पुनःपुनः ६ वेळा घेतले पाहिजेत.

१८ कोस भागिले ३ नीं, ह्मणजे ६ कोस येतात; अर्थ ह्याच कीं, जर १८ कोस ३ समभागांत विभागिले, तर प्रत्येक समभाग ६ कोसां बराबर आहे. वर्चे दोन उदाहरणांत, जर केवळ अंकानी कृती केली, तर दोहोंचें उत्तर एकच होतें; १८ भागिले ३ ह्मणजे ६.

दुसरा नवा एक प्रश्न करितों, १२ गजामध्यें ८ गज किती वेळा जातात? याचें उत्तर हेंच आहे, कीं एके वेळे पेक्षां अधीक आणि दोन वेळां पेक्षां कमी; हें ही उत्तर बरोबर पुरें नाहीं, कांकीं पुनःपुनः वेळांची भागांची कल्पना अजून बरोबर समजांत आली नाहीं. जेव्हां वेळा हा शब्द एथें बोलण्यांत आणितों, तेव्हां तो केवळ बोलायाची तऱ्हा आहे, आणि ती वेळा यंत्रांतील नियमानें चालणाऱ्या अवयवाचा गतीनें समजत्ये अशी आहे, ज्याचें चलन धरून सोडून उड्या मारीत मारीत होतें, आणि असें मनांत आण कीं प्रत्येक उडींत आठ गजांचें काम होतें आणि त्याजाने एक पूर्ण उडीपेक्षां कोठेही मध्यें उभें राहवत नाहीं. अशा रीतीनें उडी मारील तेव्हां एकदांच बरोबर आठ गज उडी मारील

नाहीं तर काहींच नाहीं. यापासून उघड समजतें, कीं अशा यंत्रावयवानें ८ आणि १६ गज समभागाचे उडीमध्यें, ह्मणजे १२ गजांवर त्याचानें उभें राहवत नाहीं. परंतु, आतां कल्पना कर, कीं हें यंत्र एक पळांत बरोबर ८ गज चालतें. वर असें लिहिलें कीं एक एक उडी ८ गजांबरोबर आहे, तर १२ गज ह्मणजे एक उडी आणि एक अर्धी उडी होईल. तशाच रीतीनें १२ गजांमध्यें ८ गंज हे **एक वेळा आणि अर्ध वेळा** आहेत.

अंकगणितामध्यें एक अपूर्णांक दुसरे अपूर्णांकानें भागावा, असें असेल; तर या पुढील उदाहरणापासून त्याचा अर्थ कळेल; उदाहरण. $\frac{2}{3}$ यास $\frac{5}{7}$ याणीं भागिले तर $\frac{14}{15}$ होतात; अथवा $\frac{2}{3}$ मध्यें $\frac{5}{7}$ शा १ वेळेचा $\frac{14}{15}$ जातो.

हीं पुढील उदाहरणें शिकणारानें मनांत विचार करून ठसवून घ्यावीं.

जर पूर्ण १ दिवसांत एक रुपयाचे $\frac{5}{7}$ मिळवितो, तर एक रुपयाचे $\frac{2}{3}$ एक दिवसाचे $\frac{14}{15}$ शांत मिळविल.

जर वर्चे एक, याचा अर्थ फिरविला, असा कीं, जो $\frac{5}{7}$ होता तो हल्लीं १ आहे, तेव्हां जो $\frac{2}{3}$ होता तो हल्लीं $\frac{14}{15}$ होईल.

जर अ रेघेचे $\frac{5}{7}$ ब, रेघेचे बरोबर आहे, तर अ रेघेचे $\frac{2}{3}$ ब रेघेचे $\frac{14}{15}$ होतील.

वर सांगीतल्ये जातीचीं उदाहरणें बरोबर पक्कीं समजलीं पाहिजेत, अशे जातीचीं उदाहरणें त्यांचे मनांत पक्कीं समजून ठसलीं नाहीं तों पर्यंत बीजगणित शिकणारांस आरंभीं तें फार कठीण आहे असें वाटतें, जर वर जें लिहिलें तितकें ध्यानांत आलें नाहीं, तर निश्चय समजावें कीं शिकणाराला अंकगणिताची पुरी माहीत नाहीं, तेव्हां त्यास या बीजगणिताचे पुस्तकापासून कसा लाभ होईल.

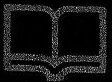
अंकगणिताचा अंक चिन्हामध्यें नियमित संबंध आहे; उदाहरण, २+२ हे नेहेमी ४ आहेत, हीं अंकचिन्हें कोणत्येही वस्तूचीं असोत, कोस, गज, विघे, इत्यादि कांहीं असोत. **बीजामध्यें अंकचिन्हस्थळीं अक्षरें**

स्तूविषयीं बरोबर एकसारखा आहे; तशी रीतीनें बीजगणितांत अंकांच्या साधारण गुणावर कल्पना करितों, आणि त्या कल्पनांपासून जो निश्चितार्थ उत्पन्न होतो, तो सर्व अंकांवर बरोबर सारखाच लागू पडतो. हें बीजगणिताचें मोठें एक अंग आहे, आणि शिकणाराला या अंगानें बीजगणित येण्याची योग्यता येत्ये.

परंतु ही व्याख्या थोड्ये शब्दानीं सांगीतली, ही जो थोडें बहूत बीजगणित शिकलेला असेल, त्यास मात्र समजेल. जो कोणी कोणतीही विद्या शिकायास इच्छितो, त्यास जर त्या विद्येविषयीं कांहींच माहीत नाहीं, तर त्यास त्या विद्येची व्याख्या थोड्या शब्दानीं समजाविता येत नाहीं. आतां आरंभीं पूर्ण आणि अपूर्ण या अंकांचा एक सामान्य गुणाचें उदाहरण सांगतों.

(८) एकं घे, आणि असा अपूर्णांक घे कीं त्यास (८) वेळा घेतला तर पूर्ण एक एकं होईल, ह्मणजे तो एकंचा (८) वा भाग आहे. आतां त्या दोहोंस प्रत्येकीं १ मिळीव; तर ८+१ ह्मणजे ९ होतील आणि $\frac{१}{८}$+१ ह्मणजे १$\frac{१}{८}$ आहे. पहा, प्रथम अंक ह्मणजे ९ यामध्यें दुसरा अंक ह्मणजे १$\frac{१}{८}$ हा बरोबर (८) वेळा जातो. एकंचे ($\frac{२}{३}$) घे, आणि असा अपूर्णांक घे कीं, एक वेळेचे ($\frac{२}{३}$) घेतले असतां पूर्ण १ एकं होईल, तर एथें तो अपूर्णांक १$\frac{१}{२}$ होईल. आतां त्या दोहोंस प्रत्येकीं एक मिळीव, तर १$\frac{२}{३}$ आणि २$\frac{१}{२}$ होतील. या प्रथम अंकांत ह्मणजे १$\frac{२}{३}$ शांत दुसरा अंक ह्मणजे २$\frac{१}{२}$ हा बरोबर ($\frac{२}{३}$) वेळा जाईल. हीं पुढील उदाहरणें तपासून पाहा, त्यामध्यें इच्छेप्रमाणें भलते कांहीं पूर्णांक किंवा अपूर्णांक घालावे.

( ) अमुक एकादि एकं घे आणि असा पूर्णांक किंवा अपूर्णांक घे कीं, जास वारंवार ( ) तितके वेळा घेतला तर, पूर्ण एक एकं होईल. त्या दो-



होंस १ मिळीव; तेव्हां प्रथमाचे बेरिजेंत दुसऱ्याची बेरीज ( ) अमुक वेळा किंवा वेळेचा भाग जाईल.

हीं पुढील उदाहरणें तपासून पाहा.

( )	पूर्ण किंवा अपूर्णांक जाला वारंवार ( ) अमुक वेळा घेतला तर पूर्ण एकं होतो.	पहिल्ये अंकास एक मिळविला.	दुसरे संख्येस १ मिळविला.	जितके वेळा तिसऱ्ये कोष्टकांतील अंकांत चवथ्ये कोष्टकांतील अंक जातो.
७	$\frac{१}{७}$	८	१$\frac{१}{७}$	७
$\frac{१}{३}$	३	१$\frac{१}{३}$	४	$\frac{१}{३}$
२$\frac{१}{४}$	$\frac{४}{९}$	३$\frac{१}{४}$	१$\frac{४}{९}$	२$\frac{१}{४}$
$\frac{१}{२०}$	२०	१$\frac{१}{२०}$	२१	$\frac{१}{२०}$
१	१	२	२	१

प्रथम आणि दुसऱ्या आसनांतील अंकामध्यें पुढील सांगितल्याप्रमाणें परस्पर संबंध आहे, तो असा कीं दुसरे आसनांतील पूर्णांक किंवा अपूर्णांक आहे तो १ भागिला प्रथम आसनांतील पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें; अथवा १ यामध्यें प्रथम आसनांतील अंक जितके वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो असा संबंध आहे. उदाहरण, जर प्रथम आसनांतील संख्येस अंक ह्मणतात

तर दुसरे आसनांतील संख्या १ भागिली अंकानें इतकी आहे.

आणि प्रथम आणि पांचव्या आसनांतील अंकांचें ऐक्य जें ध्यानांत येतें, तें या पुढील रीतीप्रमाणें सांगितलें जाईल;

अंकास १ मिळवून त्या बेरिजेस अंक जितके वेळा १ मध्यें जातो त्यांत १ मिळवून त्या बेरीजेनें भागिलें तर तो भागाकार अंकच होईल.

वर सांगीतलेली गोष्ट यांईकर्त्ती त्याजपेक्षां अधीक संक्षेपानें सां-

गतां येल्ये. अंक स्मटला तर भलता कांहीं अंक घेतां येतो, आणि इच्छेप्रमाणें त्या अकाचे जागीं भलतें कांहीं चिन्ह घेतां येतें, तर त्या चिन्हाविषयीं मूळाक्षरांतून भलतें काहीं अक्षर घे, मनांत आण कीं त्या अंकाचें चिन्ह एथें अ, घेतला. वर सांगीतल्याप्रमाणें + हें चिन्ह मिळवणीचें आहे. असें जाण, आणि एक अंक दुसऱ्ये अंकास भागायास, जसें अंकगणितामध्यें लिहितात, तसें लिहावें, ह्मणजे भाज्यवर आणि भाजक खालिं आणि त्यांचामध्यें रेघ. आणि = या चिन्हानें समजावें कीं जो अंक त्याचे पुढें आहे, तो त्याचे दुसरे बाजूचे मागल्ये अंका बरोबर आहे. तेव्हां वर सर्व अंकाचा सामान्य गुण जो सिद्ध करून दाखविला तो याप्रमाणें अक्षर चिन्हांनीं दाखविला जातो;

$$\frac{अ+१}{\frac{१}{अ+१}} = अ$$

आतां या विद्येचा प्रथम भागाची व्याख्या सांगायास आरंभ करितों.

१ व्याख्या. या विद्येविषयीं, हिंदुलोकामध्यें, सर्वांपेक्षां प्राचीन पुस्तक, जें हल्लीं सांपडलें, तें संस्कृत भाषेंत, भास्कराचार्य या नामें पुरुषानें केलें, त्यास बीजगणित ह्मणतात. त्याचा काळ सुमारें इस्वी सन्न ११५०.

२ व्या०. अंकास अक्षरानें दाखविलां येतें, आणि पुढें समजांत येईल कीं तो, इच्छेप्रमाणें, भलता कांहीं सामान्य अंक असेल; किंवा तो कांहीं अव्यक्तविशेष अंक असेल, त्याचेजागीं, व्यक्त अंक होई पावेतों, अक्षर चिन्हानें दाखविला जातो; अथवा तो कांहीं व्यक्त पूर्ण किंवा अपूर्णांक असेल, त्याचें इतकें बहुत वारंवार काम पडतें, याजकरितां कांहीं संक्षेप अक्षर चिन्हांनीं लिहायास सोईस पडतें. ह्मणजे π या चिन्हास पि, आणि e या चिन्हास इ, हीं दोन अक्षरें इंग्लिश भाषेंतून दोन विशेष्य निश्चितार्थ स्थळीं लिहितात,

ते निश्चितार्थ पुरे दाखवायास अशक्य, परंतु सुमारानें ३·१४१५९२७ आणि २·७१८२८१८ हे दोन अंक याचे जवळ जवळ आहेत.

३ व्या०. जीं अक्षरें कामांत आणितात तीं **बाळबोध** लिपीचीं मूळ अक्षरें आहेत, इंग्रेजी भाषेंत इटालिक लहान अक्षरें घेतात, आणि तीं कळायासाठीं एथें लिहून दाखविलीं.

मूळ अक्षरें.

इंग्रेजी		उच्चार	बाळबोध	इंग्रेजी		उच्चार	बाळबोध
A	*a*	ए	अ	*N*	*n*	एन्	न
B	*b*	बी	ब	*O*	*o*	ओ	ओ
C	*c*	सी	क	*P*	*p*	पी	प
D	*d*	डी	ड	*Q*	*q*	क्यु	क्क
E	*e*	ई	ई	*R*	*r*	आर	र
F	*f*	एफ	फ	*S*	*s*	एस	स
G	*g*	जी	ग	*T*	*t*	टी	ट
H	*h*	एच	ह	*U*	*u*	यु	यु
I	*i*	ऐ	ऐ	*V*	*v*	वि	व
J	*j*	जे	ज	*W*	*w*	डबल्यु	व
K	*k*	के	के	X	*x*	एक्स	क्ष
L	*l*	एल	ल	*Y*	*y*	वै	य
M	*m*	एम	म	Z	*z*	जेड	झ

४ व्या०. **पूर्ण** आणि **अपूर्णांक** यांस सर्वदा अंक म्हणतात. व्यवहारी बोलण्यांत २½ यांस अंक म्हणत नाहीं, परंतु बीजगणितांत त्यांना अंतात; जर २½ आणि २, ३, ४, इत्यादि या दोहोंमध्यें फेर काय तें साठीं प्रयोजन असेल, तर प्रथम २½ यांस **अपूर्णांक** म्हणता २, ३, ४, यांस **पूर्णांक** म्हणतात.

तें, कीं अ आणि ब एकच अंकाचे ठिकाणीं घेतले आहेत, तर, उत्तर हेंच आ-
हे, कीं कांहीं अंक बाकी राहत नाहीं, ह्मणजे शून्य रहातें. अशी
जातीचे प्रश्नावरून जेव्हां कांहीं राहिलें नाहीं असें ह्मणतात, तेव्हां प्रश्ना-
चे उत्तरासाठीं ० असें चिन्ह लिहितात, ह्मणून शून्य अंका प्रमाणें रूप
धरितें.

५ व्या०. हें पुढील चिन्ह + अधिकाचा अर्थ दाखवितें, असें कीं जे-
व्हां दोन अंकांचे किंवा अक्षरांचे मध्यें हें चिन्ह लिहिलें तर दुसरी रकम
पहिल्ये रकमेशीं मिळवायाची आहे. जसें. अ + ब यास असें ह्मणतात,
अ अधीक ब याचा अर्थ हाच, कीं अ या अक्षराचे जे अंक असतील, ते ब
अक्षराचे अंकाशीं मिळवायाचे आहेत.

तुसला + अ, लिहिला, त्याचा अर्थ केवळ हाच, अ शून्याशीं मिळवि-
ला, अथवा ० + अ ह्मणजे, तो अ मात्र आहे.

६ व्या०. — या चिन्हास उणें ह्मणतात, त्याचा अर्थ कमी करणें, फ-
लित हेंच, कीं दुसरा अंक पहिल्ये अंकातून वजा करायाचा. जसें. अ — ब
यास अ उणा ब ह्मणतात, अर्थ हाच, कीं अ, बनें कमी करायाचा अथवा अ
यांतून ब वजा करायाचा

जेव्हां अ, बपेक्षा उणा असेल, तर हें वरचें उदाहरण नाहीं सारिखें
आहे, कां कीं जी अशी आकृती होउं सकत नाहीं ती करायास सांगतों असें,
३—६ ही कृती अशक्य आहे. अशे जातीचे उत्तराचा अर्थ काय आहे तो
कल्पनेनें पुढें शोधला जाईल, अशी कृती अशक्य आहे ह्मणून, त्याचा अ-
शक्यपणा कसकशे जातीचे अयुक्ततेनें होतो, हेंही पुढें शो[illegible]
लें जाईल.

७ व्या०. हें पुढील चिन्ह × गुणाकार दाखवितें, त्याचा अर्थ असा दाखविला जातो, कीं प्रथम अंकामध्यें जितके एक किंवा एकांचे भाग असतील, तेवढे वेळा किंवा वेळांचा भाग पुनः पुनः दुसरा अंक घेण्याचें आहे. जसें अ×ब यास अ गुणिला ब असें ह्मणतात. आणि हें चिन्ह सुचवितें कीं ब, अ वेळा घ्यावा. जसें, १½ × ६ ह्मणजे ६ एक वेळा आणि एक अर्धी वेळा घ्यावयाचे आहेत ह्मणजे ९. अ ब ही पद्धती अ आणि ब यांचा गुणाकार दाखविल्ये; आणि या दोन अक्षरांस गुणाकाराचे गुण्य गुणक ह्मणतात, आणि तीं अक्षरें हीं परस्परांचीं गुणक आहेत. ०×अ आणि अ×० हीं दोन्हीं ० असलीं पाहिजेत; कांकीं अ काहीं वेळा अथवा वेळेचा भाग हीन घेतला, तर काहींच परिमाण होत नाहीं, आणि ०, किती ही वेळा वारंवार घेतलें, तर काहींच फळ उत्पन्न होत नाहीं. नवे शिकणारे वरचे या गोष्टींविषयीं नेहेमी चुकतात, यास्तव, त्यांचे स्मरणांत या गोष्टीचा निश्चितार्थ ठसायासाठीं, हीं दोन पुढील कृत्यें उदाहरणासाठीं सांगतों. त्यांचें उत्तर स्पष्ट उघड आहे, आणि त्या उत्तरास बीजगणित रूपानें दाखविलें जाईल.

भलत्या कितीएक पेट्या आहेत, त्या प्रत्येक पेट्यांत काहींच भरलें नाहीं, तर सर्वांत किती भरलें असेल ?

जर अ, हें अक्षर पेट्यांची संख्या दाखवितें, तर ० वारंवार अ वेळा घेतलें, अथवा अ × ०, तर केवळ शून्य होतें.

एक पेटी आहे, ती सोन्यानें भरलेली आहे, परंतु त्यांत अ ला काहीं भाग नाहीं; तर त्यांत अचें काय आहे ?

जर, प, हें अक्षर पेट्यांत जितके सोन्याचे शेर आहेत, ते दाखवितें, तर अचा भाग ह्याचा आहे ० × प, ह्मणजे ० आहे; ह्मणजे काहींच नाहीं.

नवे शिकणारे अशी चूक करितात याचें कारण असें आहे, कीं

गुणिला नाहीं, याचें फलित ह्मणजे काहींच उणा होत नाहीं, किंवा त्याचें आगदींच रूप बदललें नाहीं, असें मनांत आणून चूक करितात: परंतु अपूर्णांकाचे अंकगणितांमध्यें आणि बीजगणितामध्यें गुणाकार ह्मटला, तर ह्याच अर्थ धरिला जातो, कीं अमुक वेळा किंवा वेळांचा भाग वारंवार घ्यावयाचा आहे. जर कोणताही अंक अगदींच गुणिलेला नसला, तर कांहींच अंक उत्पन्न होत नाहीं, कांकीं त्याचा कांहींच भाग घेतला नाहीं; जो अंक रूप बदल न होतां तसाच रहातो, तोच अंक गुणिला १ नें, अथवा एक वेळा घेतला असा आहे. तर अ ह्मणजे १×अ हाच आहे.

जेव्हां केवळ अक्षरें, किंवा अंकसुद्धां अक्षरें कामांत आणितात, तेव्हां × हें गुणाकारचिन्ह टाकितात. जसें अ ब, ह्मणजे ह्याच अर्थ आहे, कीं ब, अ वेळा घेतला आहे; ३ अ याचाही अर्थ ह्याच; कीं अ तीन वेळा घेतला आहे. जेव्हां दोन अंकच कामांत घेतले आहेत तेव्हां मात्र त्यांचामध्यें × हें चिन्ह लिहिलेंच पाहिजे. जसें ३×६ हे गुणाकार चिन्हा वाचून जवळजवळ ३६ याप्रमाणें लिहवत नाही, कांकीं तो अंक ६+६+६ होत नाहीं परंतु अंकगणित रीतीनें ३ गुणिले १० अधीक ६ याप्रमाणें होतात. बहुत करून अंकामध्यें × हें चिन्ह सोडून, केवळ त्याचे जागीं बिंदु करून, याप्रमाणें लिहितात ३.६; परंतु यापासून शिकणारांस कांहीं भ्रम होईल, कीं या रूपाचा अर्थ $३+\frac{६}{१०}$ आहे ह्मणून, दशांशाचे चिन्हाचा बिंदु नेहेमी संभाळून त्याणें वर लिहावा. जसें, ३˙६

८ व्या०. अपूर्णांकांतील अंश आणि छेद यांमध्यें जी रेघ लिहितात, ती भागाकार दाखविते. जसें $\frac{अ}{ब}$ यास याप्रमाणें ह्मणतात अ भागिला ब आणि अर्थ ह्याच कीं अ मध्यें ब किती वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो. जसें, $\frac{३}{२}$ अथवा ३ भागिले २ ह्मणजे $१\frac{१}{२}$ आहे. अर्थ ह्याच कीं ३ या मध्यें २ एक वेळा, आणि एक अर्धी वेळा जातो. अर्धा ह्मणजे $\frac{१}{२}$ या रूपानें लिहिण्या-

स योग्य,कांकीं एकामध्यें जे दोन जातात तो एका वेळेचा अर्धा भाग आहे. कदाचित अ ÷ ब याप्रमाणें लिहितात.

$\frac{अ}{०}$ असें लिहिल्यानें बहुत करून नवे शिकणारे असें मनांत घेतात कीं, अच आहे; परंतु त्यांत कांहींच अर्थ नाहीं. साहामध्यें शून्य किती वेळा जातें? उत्तर हेंच कीं असे प्रश्न अयुक्त आहेत. अ आणि $\frac{अ}{१}$ हे एकच आहेत. कांकीं अ याचा अर्थ भलते एकंची संख्या, अथवा एकंचे भाग आहेत; तर असें विचारिलें अस्तां, कीं अ यामध्यें १ हा किती वेळा किंवा वेळेचा भाग जातो तर उत्तर हेंच कीं नुस्ता अ आहे.

९ व्या॰. हीं पुढील सांगीतलेलीं उदाहरणें, अ अक्षराचा वेगळाल्या पद्धती आहेत; त्या पद्धती शिकणारानें घोकून त्याशीं पक्कें माहीत व्हावें:

$अ + ०$ $\quad$ $अ \times १$ $\quad$ $अ \times १ \times १$ $\quad$ $\frac{अ}{१}$ $\quad$ इत्यादि.
$० + अ$
$अ - ०$ $\quad$ $१ \times अ$ $\quad$ $१ \times अ \times १$ $\quad$ $\frac{अ \times १}{१}$ $\quad$ इत्यादि.

१० व्या॰. **बरोबरी** आणि **तर किंवा यामुळें** प्रमाणांत दाखवाया साठीं, पुढें संक्षेप चिन्हानें लिहितात. $अ = ब$ यांत अर्थ हाच, कीं अ आणि ब जा अंकस्थळीं घेतले, ते दोन अंक बरोबर एकच आहेत: आणि याप्रमाणें ह्मणतात, अ बरोबर ब. ∴ या चिन्हाचा अर्थ प्रमाणांत तर किंवा यामुळें याचें संक्षेप चिन्ह आहे. जसें, $अ = ब$ आणि $ब = क$ ∴ $अ = क$, आणि याप्रमाणें ह्मणतात, अ बरोबर ब आणि ब बरोबर क, यामुळें अ बरोबर क.

११ व्या॰. बीजगणितांतील प्रत्येक चिन्हाचा संग्रहास **पद्धती** ह्मणतात, आणि जेव्हां दोन पद्धती, = या चिन्हानें जोडिल्या, तर त्या सर्वांस **समीकरण** ह्मणतात.

एकरूप समीकरण तेंच आहे कीं ज्याचा दोन बाजू बरोबर आहेत; त्या समीकरणामध्यें भलत्ये कोणत्येही अंकाचेस्थळीं अक्षर लिहि-

लें असलें, जसें वर (७ व्ये पृष्ठावर समीकरण दाखविलें) तसें हें.

$$\frac{अ+१}{\frac{१}{अ}+१}=अ$$

यांत अ कोणत्येंही किमतीचा असला, तरी हें समीकरण खोटें होऊं शकत नाहीं; अथवा अची कशीही किंमत कल्पिली, तथापि त्या किमतीविषयीं हें समीकरण खरेंच आहे.

हीं पुढील सांगीतलेलीं समीकरणांचीं उदाहरणें एकरूप आहेत, असें स्पष्ट दिसतें.

$$अ+ब=ब+अ \qquad अ+१+१=अ+३-१$$
$$अ+अ=२अ \qquad अ+अ+अ=३अ$$
$$\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}अ=अ \qquad \frac{१}{३}अ+\frac{१}{३}अ+\frac{१}{३}अ=अ$$
$$२अ+३अ-अ+४अ=८अ+६अ+५अ-११अ$$

हीं पुढील उदाहरणें एकरूप आहेत, असें प्रथमतः दिसण्यांत येत नाहीं; परंतु शोधिलीं असतां, प्रत्येकस्थितींत तीं बरोबर खरीं आहेत.

$$\frac{१}{१+अ}+\frac{१}{१+२अ}=\frac{२+३अ}{१+३अ+२अअ}$$

$$अ-\frac{अ}{१+क्ष}=\frac{अक्ष}{१+क्ष}$$

संकेतसमीकरण तेंच आहे, कीं जें अक्षरांचे प्रत्येक किमतींत खरें होणार नाहीं, परंतु त्यांतल्ये कित्येक नियमित किमतींत मात्र खरें आहे.

जसें, $ब+१=७$ आणि $अ-३=१२$,

हीं दोन उदाहरणें ब बरोबर ६ आणि अ बरोबर १५ अशा संकेतावांचून खरीं होणार नाहींत.

ळ आतात, आणि ते समीकरण खरें होतें, तेव्हां असें ह्मणतात कीं तो अंक त्या समीकरणास स्थापितो जसें अ − ३ = १२, हें समीकरण अ बरोबर १५, केवळ या अंकाने स्थापिलें जातें.

१२ व्या०. जेव्हां बीजांतल्या पद्धती एक किंवा अनेक, कुंडलींत मांडिलेल्या असतात, तेव्हां त्यांचा अर्थ हाच, कीं त्या कुंडलींतील अनेक पदें आहेत, तथापि, तीं बाजूचे पदांशीं केवळ एक अक्षरासारिखा संबंध ठेवितात. जसें,

अ − (ब − क)

याचा अर्थ हा कीं, अ यांतून नुसता ब किंवा नुसता क उणा करायाचा नाहीं, परंतु ब − क वजा करायाचा ह्मणजे ब यांतून क उणा करून जी बाकी राहील ती अ यांतून वजा करायाची आहे. ह्मणून अ − ब − क असें नाहीं.

उदाहरण. जेव्हां अ = २०, ब = १२, क = १०, ड = ३, तेव्हां या पद्धती पासून उत्तर काय निघेल? अ − (ब − {क − ड}), एथे या उदाहरणांत क − ड, हेंच आहे, १० − ३ ह्मणजे ७; ब − (क − ड) हेंच आहे १२ − ७, ह्मणजे ५; तर अ − (ब − {क − ड}) हेंच आहे २० − ५, ह्मणजे १५.

आणि, (अ + ब) (क + ड) याचा अर्थ हाच, कीं क + ड हा अ + ब वेळा घेण्याचा आहे, आणि प (क + र) याचा अर्थ हाच, कीं क + र, प वेळा घेण्याचा आहे.

या वरचा व्याख्या बीजगणिताचा लिहिण्याचा प्रथम परिपाटी आहेत. पुढें शिकतानां दुसऱ्या परिपाटी उघड होतील. आतां बीजांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार, या चार प्रथम कृत्यांतील कांहीं एक उघडे विशेष गुण सांगतों.

1. अंक किंवा अक्षरचिन्हें, कोणत्येही क्रमानें मांडून मेळविलीं अस-

३+१+२ २+१+३

याप्रमाणें अक्षरचिन्हांनीं अ+ब+क+ड=ब+क+ड+अ=ब+अ+ड+क, इत्यादि.

२. लहानांतून मोठें पद वजा करणें, असा प्रसंग आणल्याशिवाय, मेळवणी आणि वजाबाकीचीं पदें, इच्छेप्रमाणें, स्थळभेदें करून मांडितां येतात. जसें, कोणी मनुष्य २० रुपये हारेल आणि ५० रुपये जिंकेल, तर त्याचे अवळ इतकेच रुपये राहतील कीं जसें आरंभीं ५० रुपये जिंकला आणि त्यांतून २० रुपये हारला, परंतु त्याचे जवळ २० रुपयांपेक्षां उणे असतें तर, त्याचानें ५० रुपये जिंकवतें, परंतु २० रुपये हारववतें नाहीं. जसें, १०−२०+५० हें अशक्य; परंतु १०+५०−२० हें शक्य आहे. याच प्रमाणें ८−६+१०−११ या पुढील रूपानें मांडितां येतात:

८−६+१०−११ ८+१०−११−६ १०+८−११−६

८+१०−६−११ १०+८−६−११ १०−६+८−११;

परंतु या पुढील रूपानें मांडवत नाहीं:

१०−११+८−६ −११+८+१०−६ इत्या०

१०−११−६+८ −६−११+८+१० इत्या०

प्रश्न. अ−ब+क−ड हें संभवण्यासाठीं कोणत्ये प्रकारचे संकेत केले पाहिजेत? उत्तर, कीं अ, ब पेक्षां अधिक असावा, किंवा ब पेक्षां उणा तरी नसावा, आणि अ−ब+क हे ड पेक्षां उणें नसावें. या गोष्टीविषयीं पुढें विचार होईल.

३. गुणाकार आणि भागाकार कोणत्येही क्रमानें करितां येतात. त्याण-

ते अंक पूर्ण किंवा अपूर्ण असोत, शिकणारानें बीजाचा आरंभ केल्याचे, पूर्वी, या सर्व जातींचा अंकगणितरीती शिकून सिद्ध केलेल्या आहेत, असें मानिलें आहे.

अंकगणितांत हें ही दाखविलें आहे कीं, भागाकार आणि गुणाकार यांचा कृत्याचा क्रम फिरवितां येतो; म्हणजे, अ भागिला ब आणि त्यांचा भागाकार गुणिला कनें, अशी सांगीतलेली पद्धती या पुढील पद्धती प्रमाणेंच आहे, म्हणजे अ गुणिला क आणि त्यांचा गुणाकार भागिला बनें, अथवा

$$क \times \frac{अ}{ब} = \frac{कअ}{ब}$$

सारांश, वर ३ ऱ्ये आणि ४ थ्ये दृष्टांवर गुणाकार म्हणजे वेळा किंवा वेळेचा भाग घेण्याचें सांगितलें आहे, त्याचा अर्थ वाढवून पाहातां, प्रत्येक गुणाकार भागाकार आहे, आणि प्रत्येक भागाकार गुणाकार आहे. म्हणजे, अ ६ याणीं भागणें म्हणजे अचा साहावा भाग घेणें आहे, अथवा अ एक वेळेचा एक षष्ठांश वेळा घ्यावा, अथवा अ यास $\frac{१}{६}$ याणें गुणायाचा आहे. याच सारिखें, अ यास $\frac{१}{४}$ याणें भागणें म्हणजे १ एकंचे किती चतुर्थांश अ मध्यें जातात असें विचारणें; त्यास उत्तर हेंच, कीं अ मध्यें जितके एकं आहेत तितके वेळांचा चौपट वेळा म्हणजे अ यास चोहोंनी गुणावें.

पुनः १० यास $\frac{२}{३}$ याणीं भागावें. म्हणजे १० गुणिले $\frac{३}{२}$ हें आहे. १० यास $\frac{२}{३}$ याणीं भागावें म्हणजे एक एकंचे $\frac{२}{३}$ श १० मध्यें किती वेळा जातात हें शोधून काढावयाचें आहे. आतां $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{१}{३}$ मिळून १ एकं होतो आणि $\frac{१}{३}$ हा $\frac{२}{३}$ चे अर्धा आहे; म्हणून पूर्ण १ एकं मध्यें $\frac{२}{३}$ हे एक वेळा आ-

णि एक अर्धी वेळा जातात. यामुळें, १० मध्यें $\frac{२}{३}$ हे १० वेळा आणि १० अर्धे वेळा जातात, अथवा १५ वेळा. म्हणजे १० यांस $\frac{२}{३}$ यांणी भागिले तर १० हे, एक वेळा आणि एक अर्ध वेळा घेतल्या प्रमाणें आहेत, अथवा १० गुणिले $१\frac{१}{२}$, म्हणजे गुणिले $\frac{३}{२}$ नें.

याच सारिखें, १० हे $\frac{७}{२}$ यांणीं भागणें, म्हणजे १० यांस $\frac{२}{७}$ यांणीं गुणावें हीं दोन्हीं बरोबर. अशा प्रश्नांत विचार हाच आहे कीं १० मध्यें ७ एकंचे अर्धे किती वेळा जातील? जितके त्यांत ७ एकं आहेत तितके दुपट वेळा; म्हणजे १ वेळेचे $\frac{१०}{७}$ याचें दुपट अथवा एक वेळेचे $\frac{२०}{७}$. परंतु $\frac{२०}{७}$ हे १० यांचे $\frac{२}{७}$ आहेत, अथवा १० एक वेळेचे $\frac{२}{७}$ घेतलं.

शिकणाराने या पुढील पद्धती प्रमाणें वेगवेगळीं अनेक जातीचीं उदाहरणें करून लावण्याचा अभ्यास केला पाहिजे.

अ गुणिला $\frac{प}{क}$ म्हणजे अ भागिला $\frac{क}{प}$ हें सारिखेंच आहे.

अ भागिला $\frac{प}{क}$ म्हणजे अ गुणिला $\frac{क}{प}$ हें ही सा०

$$\text{अथवा } \frac{प}{क}\times अ = \frac{अ}{\frac{क}{प}} \text{ आणि } \frac{अ}{\frac{प}{क}} = \frac{क}{प}\times अ$$

बीजगणितांतल्या पद्धतींस अंकरूप देणें, आणि वेगवेगळ्या अक्षरांची वेगवेगळी किंमत समजणें, अशा जातीच्या कृतींचा शिकणारानें प्रथमतः अभ्यास केला पाहिजे. म्हणजे याप्रमाणें

जेव्हां $अ = \frac{१}{२}$ आणि $ब = \frac{२}{५}$ तर $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ याची काय किंमत आहे.

$$अ+ब = \frac{१}{२} + \frac{२}{५} = \frac{९}{१०} \qquad अ-ब = \frac{१}{२} - \frac{२}{५} = \frac{१}{१०}$$

$$\frac{अ+ब}{अ-ब} = \frac{\frac{९}{१०}}{\frac{१}{१०}} = ९$$

जेव्हां $अ = १\frac{१}{२}$ तर $\frac{१+अअ}{१+अ} = \frac{अअअ}{२+\frac{१}{२}अ}$ असें समीकरण खरें आहे कीं नाहीं?

$$अअ = \frac{३}{२}\times\frac{३}{२} = \frac{९}{४} \qquad १+अअ = १\frac{५}{४} = \frac{१३}{४}$$

$$१+अ = १+\frac{३}{२} = \frac{५}{२} \qquad (१+अअ)\div(१+अ) = \frac{१३}{४}\div\frac{५}{२} = \frac{१३}{१०}$$

$$अअअ = \frac{३}{२}\times\frac{३}{२}\times\frac{३}{२} = \frac{२७}{८} \qquad \frac{१}{२}अ = \frac{३}{४} \qquad २+\frac{१}{२}अ = \frac{११}{४}$$

$$अअअ \div (२+\frac{१}{२}अ) = \frac{२७}{८}\div\frac{११}{४} = \frac{२७}{२२}$$

तर अअ+ब(अ+ब)=१६+२१=३७

परंतु जीं समीकरणें एकरूप आहेत, असें खचित सांगताल, त्यांचा खरेपणा काढायाचे कृत्यांचा अभ्यास, हा सर्वपेक्षां बोध होण्यास फार उपयोगी आहे. ह्मणजे याप्रमाणें

अ=४ आणि ब=२ असें असेलतर

$$\frac{\text{अअ}-\text{बब}}{\text{अ}-\text{ब}}=\frac{\text{अअअ}+\text{बबब}}{\text{अअ}+\text{बब}-\text{अब}}$$ हें खरें आहे कीं नाहीं?

$$\frac{\text{अअ}-\text{बब}}{\text{अ}-\text{ब}}=\frac{\text{१६}-\text{४}}{\text{२}}=(\text{६})\ \text{अअअ}=\text{६४},\ \text{बबब}=\text{८}$$

तर $\frac{\text{अअअ}+\text{बबब}}{\text{अअ}+\text{बब}-\text{अब}}=\frac{\text{६४}+\text{८}}{\text{१६}+\text{४}-\text{८}}=\frac{\text{७२}}{\text{१२}}=(\text{६})$ तर हें समीकरण खरें आहे.

आतां अ=$\frac{\text{२}}{\text{३}}$ आणि ब=$\frac{\text{१}}{\text{२}}$ असें असलें, तर वरचें समीकरण खरें आहे कीं नाहीं?

$$\frac{\text{अअ}-\text{बब}}{\text{अ}-\text{ब}}=\frac{\frac{\text{४}}{\text{९}}-\frac{\text{१}}{\text{४}}}{\frac{\text{२}}{\text{३}}-\frac{\text{१}}{\text{२}}}=\frac{\frac{\text{७}}{\text{३६}}}{\frac{\text{१}}{\text{६}}}=\left(\frac{\text{७}}{\text{६}}\right)$$

$$\frac{\text{अअअ}+\text{बबब}}{\text{अअ}+\text{बब}-\text{अब}}=\frac{\frac{\text{८}}{\text{२७}}+\frac{\text{१}}{\text{८}}}{\frac{\text{४}}{\text{९}}+\frac{\text{१}}{\text{४}}-\frac{\text{१}}{\text{३}}}=\frac{\frac{\text{९१}}{\text{२१६}}}{\frac{\text{१३}}{\text{३६}}}=\left(\frac{\text{७}}{\text{६}}\right)$$ यावरून हें समीकरण खचित खरें आहे.

या पुढील एकरूप समीकरणाचा उदाहरण क्रमाची सत्यता शिकणारानें ताडून पहावी; ती अशी, कीं प्रथमतः अक्षरांस पूर्णांकाचें रूप द्यावें नंतर दुसऱ्यानें अपूर्णांकाचें रूप द्यावें. कांकी, जर समीकरणाचा दोन बाजूचा किंमती बरोबर असतील, तर त्यावरून त्यांचे एकरूपाचा खरेपणा निघेल. कुली कर्तेस-

मयीं पदामध्यें इतकें मात्र संभाळावें कीं समीकरणांतील अक्षरांस,उण्यांतून अधिक वजा करावें लागेल,अशी किंमत देऊं नये,आणि अक्षरांस अशीही किंमत देऊं नये कीं,कृती केल्यानें पदांमध्यें असा कांहीं अपूर्णांक निघेल कीं ज्याचे छेदस्थळीं शून्य येईल. याविषयीं ६ वी आणि ८ वी व्याख्या पाहा ह्मणजे ध्यानांत येईल.

$$(\text{अ}+\text{क्ष}+\text{य})(\text{अ}+\text{क्ष}-\text{य})=\text{अअ}+२\text{अक्ष}+\text{क्षक्ष}-\text{यय}$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})=\text{अअ}+२\text{अब}+\text{बब}$$

$$(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})=\text{अअ}-२\text{अब}+\text{बब}$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})=\text{अअ}-\text{बब}$$

$$(\text{मम}-\text{नन})(\text{मम}-\text{नन})+४\text{ममनन}=(\text{मम}+\text{नन})(\text{मम}+\text{नन})$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})+(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})=२\text{अअ}+२\text{बब}$$

$$(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})-(\text{अ}-\text{ब})(\text{अ}-\text{ब})=४\text{अब}$$

$(\text{अ}+\text{ब}+\text{क})(\text{अ}+\text{ब}-\text{क})(\text{ब}+\text{क}-\text{अ})(\text{क}+\text{अ}-\text{ब})=२\text{अअबब}+२\text{बबकक}+२\text{ककअअ}-\text{अअअअ}-\text{बबबब}-\text{कककक}$, $(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})(\text{अ}+\text{ब})=\text{अअअ}+३\text{अअब}+३\text{अबब}+\text{बबब}$

$$\frac{१}{\text{अ}}+\frac{१}{\text{अ}-१}+\frac{१}{\text{अ}-२}=\frac{३\text{अअ}+२-६\text{अ}}{\text{अअअ}+२\text{अ}-३\text{अअ}}$$

$$\frac{\text{अ}+\text{ब}}{\text{अ}-\text{ब}}+\frac{\text{अ}-\text{ब}}{\text{अ}+\text{ब}}=\frac{२\text{अअ}+२\text{बब}}{\text{अअ}-\text{बब}}$$

$$\text{अक्षक्ष}+\text{बक्ष}+\text{क}=\frac{(२\text{अक्ष}+\text{ब})(२\text{अक्ष}+\text{ब})+४\text{अक}-\text{बब}}{४\text{अ}}$$

$$\frac{\text{क्षक्षक्ष}-\text{ययय}}{\text{क्षक्ष}-\text{यय}}=\frac{\text{क्षक्षक्ष}+\text{क्षक्षय}+\text{क्षयय}+\text{ययय}}{\text{क्षक्ष}+\text{क्षय}+\text{यय}}$$

$$\frac{\text{क्ष}+\text{अ}}{\text{क्ष}+\text{ब}}=\frac{\text{क्षक्ष}+(\text{अ}+\text{क})\text{क्ष}+\text{अक}}{\text{क्षक्ष}+(\text{ब}+\text{क})\text{क्ष}+\text{ब}+\text{क}}$$

जेव्हां बीजांत एकरूप अक्षराचीं अनेक पदें असतील तेव्हां त्यांस संक्षेपें करून अधिक सरळ रूपांत आणितां येतील. जसें

अ+१२अ−३अ−६अ+२अ−अ=५अ

या वरचे शेवटील उदाहरणांमध्यें सर्व अधिक पदांची बेरीज मिळवून १५ अ होतात, आणि त्यांतून पहिले अ तीन वेळा, दुसरे अ ६ वेळा, आणि तिसरा अ १ वेळा, ह्मणजे सर्व मिळून १० वेळा; ह्मणजे १० अ वजा करायाचे आहेत; अशानें १५ अ−१० अ=५ अ होतात.

त्याच प्रमाणें अ+ ब−३ अ+४ ब=५ ब−२ अ कांकीं ब आणि ४ ब मिळविले असतां ५ ब होतात, याशी अ मिळविला आहे. आणि नंतर त्यांतून ३ अ वजा केले आहेत. परंतु, पहिला अ मिळवून नंतर ३ अ वजा केले असतां, आणि अ नमिळवितां केवळ २ अ वजा केले, तर हीं दोन्हीं बरोबर आहेत. ह्मणजे त्यांस हें रूप होतें

अ+५ ब−३ अ=५ ब−२ अ

उदाहरणें.

अ+ अब−२ अब+४ अ+६ अ=११ अ−अब

२क्षक्ष+६क्ष−४क्ष − क्षक्ष+क=क्षक्ष+२क्ष+क

३ क्ष − १५ + $\frac{१}{२}$ क्ष − क्ष − ७ = २$\frac{१}{२}$ क्ष − २२

क्ष + य + क्ष − य + ३ क्ष = ५ क्ष

कोणत्येही पद्धतीमध्यें क्ष य हीं अक्षरें सर्व पदांमध्यें साधारण असतील जसें,

+६ क्ष य, − क्ष य, +४ क्ष य, +२ क्ष य, −११ क्ष य, −१२ क्षय, जे क्ष य या वेगवेगळ्या सर्व पदांची किंमत जें एक पद दाखवितें तें याप्रमाणें काढलें जातें; क्ष य या अधिक पदांची बेरीज १२ आहे, आणि उण्ये पदांची बेरीज २४ आहे. तर सर्व अधिक पदांची बेरीज, आणि तितक्येच उण्ये पदांची बेरीज टाक, त्य-

मग संक्षेपरूप होत नाही. उदाहरण; अ अ + अ या पदाचें संक्षेपरूप होत नाही. असें पद २अ नव्हे, किंवा २अ अ, किंवा अ अ अ, असेंही नव्हे; तर तें हें आहे, अ घेतला अ वेळा अधिक अ घेतला एक वेळा, यास्तव हें आहे अ घेतला अ+१ वेळा, अथवा (अ+१) अ. हेंही त्याचें दुसरें रूप आहे, ह्मणजे (अ+१) घेतला अ वेळा, अथवा अ (अ+१), वर १५ वें पृष्ठ पाहा ह्मणजे ध्यानांत येईल.

याप्रमाणें बीजकृतीनें अ+अ या दोन पदांचा २अ, असा एक पदरूप संक्षेप होतो, परंतु अ अ+ अ या पध्दतीचा संक्षेप त्याप्रमाणें होत नाहीं, आणि बीजानें त्यास कांहींच संक्षेपरूप देववत नाहीं. आणि अंकगणितरीतीनें त्यास संक्षेपरूप देतां येतें परंतु, जोंपर्यंत अ कोणत्ये अंकस्थळीं घेतला, हें समजे पावेतों संक्षेप होत नाहीं.

अ+ब यामध्यें अ, किती वेळा जातो? एथें बमध्यें अ किती वेळा जातो हें इतकें जाणल्यावांचून या प्रश्नाचें उत्तर देववत नाहीं; यामुळें अ+ब यांत अ किती वेळा जातो. तेव्हां हें केवळ $\frac{अ+ब}{अ}$, अशी बीजरूप पद्धतीनें दाखविलें जातें. परंतु शिकणारानें लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं, हें प्रश्नाचें उत्तर नाहीं, परंतु प्रश्नानें उत्तर दाखविण्यासाठीं अशी एक बीजरीति योजिली आहे.

मअ−नअ यामध्यें अ किती वेळा जातो? एथें, म आणि न या दोहोंचे अंकांची किंमत जाणल्यावांचून, वरचे प्रश्नाचें उत्तर बरोबर देववत नाहीं; तथापि मअ आणि न अ यांचा बीजअर्थ साहा यानें बीज पद्धतीचें उत्तर त्या गणित पद्धतीचे उत्तराजवळ जवळ एक पायरी आलीकडे आणितें, तशानें $\frac{मअ-नअ}{अ}$ या रूपाशिवाय दुसरे रूपानें लिहितां येतें, कां, स्पष्ट आहे कीं न वेळा म ——— वजा केली असतां म−न वेळा राहाते ——— ——— ———

ळा जातो.

वर सांगितल्या गोष्टी बीजगणितांतील सर्व कृती करित्येसमयीं लक्ष्यांत ठेविल्या पाहिजेत. ८ अ+५अ हे किती किमतीचे आहेत? एथे अ कोणत्ये अंकस्थानीं घेतला आहे, हें जाणल्यावांचून, अशो प्रश्नाचें उत्तर देववत नाहीं; परंतु ८ अ+५अ यांचें अतिसंक्षेप बीजरूप काय आहे? असा प्रश्न केला तर, उत्तर हेंच कीं, १३अ. आणि बीजांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, इत्यादिकांचा कृती बीजपद्धतीस एकरूपांतून दुसरें अधिक संक्षेपरूप देण्याचा रीति दाखवितात. उदाहरण अ+ब आणि अ−ब यांची बेरीज काय आहे? हें बीजरीतीनें विस्तारें लिहिलें असतां, त्यास या प्रमाणें पहिलें रूप होईल; जसें

(अ+ब)+(अ−ब)

परंतु यांचें सर्वांपेक्षां संक्षेपरूप २अ आहे; आणि २अ, असें संक्षेपरूप केल्यानें, त्या कृतीस बीजगणिताची मिळवणी ह्मणतात.

मिळवणी.

क+ई यास अ+ब याशीं मिळवायाची इच्छा आहे. जर अ+ब यास क मिळविला, तर अ+ब+क होतो, परंतु इतकेंच केल्यानें पूर्ण मिळवणी झाली नाहीं; कांकीं मिळवायाचें परिमाण केवळ क नाहीं, तर क+ई इतकें परिमाण आहे. यामुळें अ+ब+क+ई हीच पूर्ण मिळवणी झाली. अथवा

(अ+ब)+(क+ई) = अ+ब+क+ई . . . . . (१)*

अ+ब यास क−ई मिळविणें असल्यास, प्रथम क मिळवून, अ+ब+क होतात. परंतु असें केल्यानें, बेरीज अधिक झाली, कां कीं, क पासून ई वजा करून बाकी मात्र मिळवायाची. ह्मणून बेरिजेंतून ई वजा करून ती बेरीज शुद्ध कर, ह्मणजे अ+ब+क−ई असें होईल.

---

* जेव्हां वर दिलेल्या समीकरणासारिख्या समीकरणाची गरज पुढें लागेल, तेव्हां, त्यास लौकर आणायासाठीं, त्या समीकरणासमोर एक अंक किंवा अक्षर वर प्रमाणें (१) अशी खूण करितात.

(अ+ब)+(क−ई)=अ+ब+क−ई .... (२)

(१) आणि (२) या पद्धतींस अधिक संक्षेपरूप देणें अशक्य. आतां हीं पुढील उदाहरणें तपासावीं.

अ+ब यांस अ−ब मिळीव,

(अ+ब)+(अ−ब)=अ+ब+अ−ब=२अ.

३क्ष−अ यास २अ−क्ष मिळीव

(३क्ष−अ)+(२अ−क्ष)=३क्ष−अ+२अ−क्ष=२क्ष+अ.

अब−ब यास २अब+क−६ब मिळीव

उत्तर २अब+क−६ब+अब−ब, अथवा ३अब+क−७ब

वरचे आणि त्यासारिख्या कृतीवरून, मिळवणीची रीति याप्रमाणें निश्चित होत्ये:

रीती. **एक पद्धती वांचून, बाकी दुसऱ्या सर्व पद्धतींचे प्रथम पदांपुढें + हें चिन्ह कर; आणि असें मनांत आण कीं त्यांचा समुदाय एकच पद्धती आहे. नंतर अक्षरांविषयीं सरूप पदांचा संक्षेप होईपर्यंत कर.**

उदाहरण.

अ−ब+३क−अब

४अब−ब+२अ−क्ष

४क्ष+६अ+अब−७

यांची मिळवणी कर.

उत्तर ९अ−२ब+४अब+३क+३क्ष−७

या पुढील उदाहरणांच्या बेरिजा घे.

अ–ब	अ–२ब	अ+मअ–४
ब–क	ब–२क	६–अ+२मअ
क–ड	क–२ड	१२मअ–१२–३अ
ड–क्ष	ड–२क्ष	प+अ–$\frac{१}{२}$
अ–क्ष	अ–ब–क–ड–२क्ष	१५मअ–२अ–१०$\frac{१}{२}$+प

(१) आणि (२): यांपासून ही पुढील रीती निघत्ये:

जेव्हां कुंडलींतल्ये पत्थतीचे पूर्वी बाहेर + चिन्ह मांडिलें असतें. तेव्हां कुंडलीचा रेघा पुसून टाकून पत्थतीचे किमतींत फेर पडत नाहीं.

अ+(ब+क–ई) = अ+ब+क–ई

वजाबाकी.

अ यांतून ब+क वजा कर. अ यांतून प्रथम ब, वजा केला तर अ–ब होतो, परंतु इतकेंच केल्यानें वजाबाकीची कृती पुरी झाली नाहीं, कांकीं ब, यांत क मिळविला पाहिजे, आणि नंतर त्यांची बेरीज अ यांतून वजा केली पाहिजे. यामुळें कही वजा केला पाहिजे, तेणेंकरून हें रूप होईल अ–ब–क, अथवा

अ–(ब+क) = अ–ब–क · · · · · · (३)

अ यांतून ब–क वजा कर. ब वजा केला, तर अ–ब होईल, परंतु केवळ असें केल्यानें क अधिक वजा केला असें झालें; अथवा खरे किमतीपेक्षां अ–ब, हा क याणें उणा आहे. यामुळें, खरी किंमत अ–ब+क ही आहे, अथवा

अ–(ब–क) = अ–ब+क · · · · · (४)

वरचे गोष्टीप्रमाणें, हीं पुढील कित्येक उदाहरणें आहेत:

अ+ब—(अ—ब)=अ+ब—अ+ब=२ब

मक्ष—(क—३मक्ष)=मक्ष—क+३मक्ष=४मक्ष—क

कुडलींत अनेक पदें असतील, आणि कुंडलीचे बाहेर पूर्वी—चिन्ह असेल, तर कुंडलींतील सर्व पदांचीं चिन्हें बदल केलीं, ह्मणजे + यास — केलें, आणि — यास + केलें, तर ती कुंडली पुसून टाकितां येत्ये.

ही गोष्ट (३) आणि (४) यांपासून उघडी स्पष्ट होत्ये.

ही वर सांगीतली रीति मनांत पक्की ठेविली नाहीं, तर, ती अनास्था चूक करण्याचें कारण होत्ये; तर ही चूक नवे शिकणारेच करितात असें नाहीं, परंतु अधिक शिकलेलेही, ही चूक करितात. ह्मणून लक्षांत येण्याकरितां ती रीति मोठे अक्षरानें वर लिहून दाखविली आहे. आणि नवे शिकणाराचे मनांत ही गोष्ट अधिक ठसायासाठीं, त्यास कळलें पाहिजे कीं, या रीतीची अनास्था करणें ह्मणजे वेडेपणाचा पुढील गोष्टी कबूल केल्याप्रमाणें होतील; ह्मणजे, सर्व कर्जे मिळकती आहेत असें होईल, आणि सर्व प्राप्ती तोटा असें होईल; कर्ज सोडणें ह्मणजे उपद्रव देणें, आणि जसा जसा मनुष्यास लुटावा तसा तसा तो द्रव्यवान होतो; आणि याप्रमाणें मिथ्या वेड्या वेड्या दुसऱ्या हजारों गोष्टी होतील.

पूर्वील रीतीचा दुसरा ताळा पुढें सांगतों. जर पुढील पद्धती काय आहेत; हें जाणण्याची इच्छा असेल ह्मणजे,

अ—(ब+क—प—क)······(७)

तर स्मरण ठेविलें पाहिजे, कीं जरीं भलतीं दोन परिमाणें एक सारिखींच वाढविलीं, तरी त्यांची वजाबाकी पहिल्ये शुद्ध परिमाणाचे वजाबाकी बरोबर होईल: या सांगीतल्याप्रमाणें अ+क्ष आणि ब+क्ष यांची वजाबाकी अ आणि ब याचे वजाबाकी बरोबर आहे. वरचे उदाहरणांत असें दाखविलें कीं, अ यांतून हें उणें क-

रायाचें ह्मणजे,

ब+क−प−क्ष असें होईल

अ याशीं, आणि ब+क−प−क्ष, याशीं ही (प+क्ष) हे वेगवेगळे मिळून, याप्रमाणें होईल. अ+(प+क्ष) उणें

(ब+क−प−क्ष)+(प+क्ष)

अथवा ब+क−प−क्ष+प+क्ष अथवा ब+क

ह्मणजे अ−(ब+क−प−क्ष) याजबरोबर आहे.

अ+प+क्ष−(ब+क) अथवा अ+प+क्ष−ब−क

अथवा अ−ब−क+प+क्ष ...... (घ)

(ग) आणि (घ) ह्या खुणेचा वर्चा दोन पद्धती ताडून पाहातां ही रीति खरी आहे असें स्पष्ट दिसतें.

वजाबाकीची रीति या पुढील प्रमाणें आहे.

रीति. **जी पद्धती वजा करायाची आहे तीचे प्रथम पदास + हें चिन्ह आहे, असें मनांत आण; नंतर त्याच पद्धतीचे दुसऱ्या सर्व पदांचीं चिन्हें बदल कर, ह्मणजे + यास − कर, आणि − यास + कर, नंतर जिचीं चिन्हें अशीं बदल केलीं ती पद्धती जा पद्धतींतून वजा करायाची आहे तिशीं जोडावी; नंतर होईल तितका संक्षेप कर.**

अ+ब−क−क्ष+२ज्ञ+३अब−१४ यांतून

क−२अ+क्ष+ज्ञ−४अब+२½ हे वजा कर

३अ+ब−२क−२क्ष+ज्ञ+७अब−१६½ ही बाकी

अ+क	क्ष+य−३−अ	अ−ब+क−ड+ई	यांतून
२क−अ	क्ष−य+३−अ	अ−२ब+क+ड−ई	हे वजा कर
२अ−क	२य−६	ब−२ड+२ई	ही बाकी

अ+ब+२क+३ड+४ई−५फ−६ग यांतून
१२ड+४ई−३क+२अ+ब−ग+फ हे वजा कर
५क−९ड−६फ−५ग−अ बाकी

अ−(ब−(क+क्ष))+(ब−(क्ष−२ब))

हें काय आहे?

कुंडली काढून टाकण्याची जी रीति सांगीतली आहे तिजपासून हें रूप होतें,

अ−ब+(क+क्ष)+ब−(क्ष−२ब)

याच रीतीनें,याचा ही रूपभेद होतो.

ह्मणजे अ−ब+क+क्ष+ब−क्ष+२ब=अ+क+२ब

हीं पुढील उदाहरणें करून दाखीव.

अ−{अ−(अ−(अ−क्ष))}=क्ष

अ−{ब−(अ−(ब−क्ष))}=२अ−२ब+क्ष

पूर्वी,जें वर सर्व सांगीतलें,त्यावरून समजात आलें कीं,बीजगणित पद्धतीची मिळवणी आणि वजाबाकीचीं,वेगळालीं पदें,कशीं ही क्रमानें मांडिलीं,तरी त्यांत कांहीं अंतर पडणार नाहीं;तर या पुढील पद्धतीचें शक्य अथवा अशक्य रूप आहे किंवा नाहीं,याविषयीं कांहींच लक्षांत आणायाची गरज पडणार नाहीं.१४ आणि १५ वें पृष्ठ पाहा ह्मणजे समजेल,परंतु शक्य किंवा अशक्य रूप हीं दोन्हीं सारिखींच असें मनांत आणवेल.जसें यांत,३−७+८,तर एथें जो वजा करायाचा आहे,तो पहिल्यानेंच अगत्य वजा करावा असें मनांत आणणार नाहीं,आणि यासाठीं अशी पद्धती अशक्य रूपाची ह्मणून कामांत आणवत नाहीं,असें ही मनांत आणणार नाहीं; परंतु पदांचा क्रम कसा ही मांडला तरी त्याची कांहीं चिंता नाहीं;असें मानून,वरचें उदाहरण याप्रमाणें आहे असें समजात घेईल,जसें ३+८−७,याप्रमाणें ही गोष्ट दुसरे सर्व पद्धतींस साधारण लागत्ये. जर मिळवणी आणि वजाबाकीचे कृतीसाठीं पदांचे रचनेचे शक्यपणाविषयीं कांहीं अगोधर विचार करा-

शक्य रूपानें पदें मांडिलीं असतां त्याचें निष्पन्न वरचा प्रमाणें होईल,ह्मणून हें खालीं पहा

$$१२-(३+८-७)=१२-३-८+७=८$$

गुणाकार आणि भागाकार.

बीजगणिताचे पदांशीं गुणाकार आणि भागाकार करतेसमयीं, नेहमी लक्षांत ठेवावें,कीं जीं अक्षरें कामांत घेतात, तीं पूर्ण किंवा अपूर्णांक दाखवितात. अपूर्णांक गणितामध्यें ज्याचे अंश आणि छेद वेगवेगळे पूर्णांक आहेत,त्यांचे मिळवणी इत्यादिकांचे रीतीविषयीं अंकगणितांत जें सांगीतलें आहे तें प्रथम आपण येथें दाखविलों.

जेव्हां अ आणि ब हे पूर्णांक आहेत,तेव्हां हे सर्व पुढील प्रश्न ज्यांचा अर्थ एकच आहे,त्याचें उत्तर $\frac{अ}{ब}$ हें होईल. हें पाहा

१. जर एक एक ब समभागांत विभागिला,आणि त्या भागांतून अ भाग घेतले, तर ते किती एकं किंवा एकंचे भाग होतील?

२. अ याचे ब भागांत किती एकं किंवा एकंचे भाग आहेत?

३. अ यामध्यें ब किती वेळा किंवा वेळेचें भाग जातात? याप्रमाणें $\frac{३}{७}$ ह्मणजे एकंचा एक सप्तमांश तीन वेळा घेतला असें दाखवितें, तर **तीन याचा सातवा भाग काय आहे?** आणि **तीन यामध्यें सात एका वेळेचे किती भाग जातात?** या दोन प्रश्नांचें उत्तर $\frac{३}{७}$ आहे.

जेव्हां अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद हे दोनही अपूर्णांक आहेत, तेव्हां मागील सांगीतल्याप्रमाणें त्या अपूर्णांकाचा अर्थ बोलण्याचे रीतीप्रमाणें सांगाया पडतें.उदाहरण,जेव्हां अ ३आणि ब ७,आहेत तेव्हां त्यास $\frac{अ}{ब}$ असें रूप

देउन सांगण्यास, कठिण पडत नाहीं; परंतु अ $२\frac{१}{२}$ आणि ब $\frac{४}{९}$ असें अपूर्णांकाचें रूप $\frac{अ}{ब}$ असें असलें तर भाषेनें त्याचा अर्थ सांगायास कठीण पडतें. कल्पना कर, कीं काहीं विशेष एक एकं घेतला, ह्मणजे १ कोस आहे असें ह्मण.

उदाहरणें.

कोसाचे $\frac{३}{७}$ काय आहेत?
उत्तर हेंच; एक कोस सात समभागांत विभागून त्यांतून तीन भाग घे.

कोसाचे $\frac{२\frac{१}{२}}{\frac{४}{९}}$ हे काय आहेत?
उत्तर हेंच; (**एक कोस $\frac{४}{९}$ समभागांत विभागून**) त्या भागाचे $२\frac{१}{२}$ घे.

वर दुसऱ्या उदाहरणांतल्ये उत्तरांत जे शब्द मोठ्ये अक्षरांनी लिहिले ते असमजुतीचे आहेत, आणि जरी त्यांनां अर्थ नाहीं; तथापि त्यांचा समजा याजोगा काहीं एक अर्थ दिला जाईल. जेव्हां ७ याचा ठिकाणीं $\frac{४}{९}$, आणि ३ याचा ठिकाणीं $२\frac{१}{२}$ मांडिले, तेव्हां वरचे दोन उदाहरणांतून, प्रथम उदाहरणाचा अर्थ फिरविल्यावांचून, उच्चारण्याची रीति मात्र बदल केल्यानें, समजुतींत येई अशी बोलण्याची रीति काढवेल. या पुढील प्रमाणें.

अशी एक लांबी घे, कीं ती ७ वेळा घेतली असतां एक कोस होईल, नंतर ती प्रथम घेतलेली लांबी ३ वेळा घे.

अशी एक लांबी शोधून घे, कीं ती एक वेळेचे $\frac{४}{९}$ घेतली असता एक कोस होईल नंतर ती प्रथम घेतलेली लांबी $२\frac{१}{२}$ वेळा घे.

आतां $२\frac{१}{२} \div \frac{४}{९}$ ह्मणजे $\frac{४५}{८}$ कोस, अथवा $५\frac{५}{८}$ कोस होतात, जी घेतलेली लांबी तिचे नउ भाग करून त्यांतले चार भाग घेतले असतां एक कोस बरोबर असेल तर ती पहिली घेतलेली लांबी $२\frac{१}{२}$ वेळा घेतली तर $५\frac{५}{८}$ कोस होत्ये; हें गणित रीतीनें शिकणारास स्पष्ट समजेल. आणि जर याप्रमाणें प्रश्न केला कीं, $२\frac{१}{२}$ **यामध्यें $\frac{४}{९}$ किती वेळा किंवा वेळेचे भाग जातात**, तर त्याचें उत्तर $५\frac{५}{८}$ हेंच आहे.

बीजगणितांत अक्षरांविषयीं बोलण्याची जी रीति कामांत आणितात,

असा प्रश्न केला असतां याप्रमाणें सर्वदां उत्तर दिलें जाईल :— य यास क्ष समभागांत विभाग; तेव्हां प्रत्येक भागामध्यें जितके रुपये आहेत, तितके रुपये एक बिघ्याची किंमत होईल. ह्मणून जर १८ बिघ्यांची किंमत ३६ रुपये आहेत, तर ३६ सांचा १८ वा भाग २ रुपये आहेत, याजकरितां एक बिघ्याची किंमत २ रुपये आहेत. परंतु जर एक बिघ्याचा $\frac{१}{२}$ याची किंमत २$\frac{१}{२}$ रुपये आहेत, आणि जर असें ह्मटलें कीं २$\frac{१}{२}$ यास $\frac{१}{२}$ समभागांत भागायाचें, तर त्याचा अर्थ खचित याच बोलण्याप्रमाणें आहे, कीं २$\frac{१}{२}$ **यांस २ वेळा घे,** अथवा गणित रीती प्रमाणें २$\frac{१}{२}$ यांस $\frac{१}{२}$ याणीं भाग. आतां; भलतें कांहीं परिमाण $\frac{१}{१०}$ समभागानीं भाग, हें आणि त्याच परिमाणास १० वेळा घे, हीं दोन्हीं एकच आहेत, असें ह्मणणें, पहिल्या लक्ष्यानें जरी उपहास्य दिसतें, तथापि कांहीं परिमाण १० समभागांत भागून त्यांतून एक भाग घेणें अशी कृती, आणि तेंच परिमाण $\frac{१}{१०}$ याणीं गुणणें हीं दोन्हीं एकच आहेत; या गोष्टीसारिखें पूर्वीं कांहीं काम केलें आहे ही गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, आणि याशिवाय दुसरी ही पुढील गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, कीं जेव्हां असें ह्मणतों जर क्ष बिघ्याला य रुपये पडतात, तर य यास क्ष समभागांत भागिल्यानें एक बिघ्याची किंमत सांपडत्ये, तेव्हां ह्या गोष्टीवरून वरचें उपहास्य नाहीं असें झालें. कांकीं पूर्णांकांचे किंवा अपूर्णांकांचे स्थळीं अक्षरें मांडिलीं जातात.

अपूर्णांकाचे आश्रयानें त्रिराशींतील अनेक प्रश्न शिकणारानें उलगडून काढावे, हें काम त्यास फार उपयोगी आहे; ह्मणून पहिल्यानें त्या अपूर्णांकाचे प्रश्न पूर्णांकाचे आश्रयानें पडताळून पाहावे. मग नुसते आपल्ये विचारानें सिद्ध क-

१. जर ६ गजांची किंमत ७ रुपये असेल तर ५ गजांस काय किंमत पडेल?

जसें ६ गज ५ गजांस आहेत, तसे ७ रुपये यांस आहेत, ह्मणजे $\frac{७\times५}{६}$ अथवा ५$\frac{५}{६}$ रुपये आहेत. हें उत्तर.

जर एक गजाचे $\frac{२}{३}$ यांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{५}{७}$ असेल, तर एक गजाचे $\frac{४}{९}$ याची किंमत काय असेल?

जसें एक गजाचे $\frac{२}{३}$ एक गजाचे $\frac{४}{९}$ शांश आहेत, तसें एक रुपयाचे $\frac{५}{७}$ यांस आहेत, ह्मणजे $\frac{\frac{५}{७}\times\frac{४}{९}}{\frac{२}{३}}$ अथवा एक रुपयाचे $\frac{१०}{२१}$. हें उत्तर.

२. जर, एक गजाचे $\frac{२}{३}$ याची किंमत एक रुपयाचे $\frac{५}{७}$ असेल तर · · ·

जर, २ गजांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{५}{७}\times३$ अथवा $\frac{१५}{७}$ असेल तर · · ·

जर, १ गजांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{१५}{७}\div२$ अथवा $\frac{१५}{१४}$ असेल तर · · ·

जर, ४ गजांची किंमत एक रुपयाचे $\frac{१५}{१४}\times४$ अथवा $\frac{३०}{७}$ असेल तर · ·

जर, एक गजाचे $\frac{४}{९}$ यास एक रुपयाचे $\frac{३०}{७}\div९$ अथवा $\frac{१०}{२१}$ असेल तर · ·

ज्या रीती पूर्णांकांचे संबंधानें अपूर्णांकांविषयीं लागतात, त्या शिकणारास पूर्वींच माहीत झाल्या आहेत; तर त्याच रीती आतां बीजरूपानें मांडितों. पहिल्यानें, पूर्णांकाचे स्थळीं अक्षरें घेतलीं, असें मानून

$$\frac{अ}{ब}=\frac{मअ}{मब} \qquad \frac{अ}{ब}+\frac{क}{ड}=\frac{अड+बक}{बड}$$

$$अ+\frac{ब}{क}=\frac{अक+ब}{क} \qquad \frac{अ}{ब}-\frac{क}{ड}=\frac{अड-बक}{बड}$$

$$अ-\frac{ब}{क}=\frac{अक-ब}{क} \qquad \frac{अ}{ब}-क=\frac{अ-बक}{ब}$$

$$\frac{अ}{ब}\times क=\frac{अक}{ब} \qquad \frac{अ}{ब}\times\frac{क}{ड}=\frac{अक}{बड}$$

$$\frac{अ}{ब}\div क=\frac{अ}{बक} \qquad क\div\frac{अ}{ब}=\frac{बक}{अ}$$

$$\frac{अ}{ब}\div\frac{क}{ड}=\frac{अ}{ब}\times\frac{ड}{क}=\frac{अड}{बक}$$

शिकणारानें वरचे प्रत्येक समीकरणाची वळख करून घेतली पाहिजे, आणि जर शिकणारा अपूर्णांकाचे वेगळाल्ये कृतींविषयीं माहीत असेल, तर त्याला

तीं समीकरणें समजण्यास सोपें पडेल. जसें या पुढील उदाहरणांत $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\times\frac{\text{क}}{\text{ड}}=\frac{\text{अक}}{\text{बड}}$, यावरून शिकणारास अपूर्णांक गणितांतील रीतीची वळख येईल, **एक अपूर्णांक दुसऱ्ये अपूर्णांकाने गुणायाचा असल्यास, अंश अंशानी गुणून ते नवे अंश होतील, आणि छेद छेदानीं गुणून ते नवे छेद होतील.**

जेव्हां अक्षरें, अपूर्णांकाचे ठिकाणीं कामांत घेतलीं आहेत तेव्हां वरची रीति त्यावर ही लागू पडत्ये. हें दाखविण्यासाठीं एक उदाहरण करून दाखवितों. $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{मअ}}{\text{मब}}$. आतां अ,चे ठिकाणीं $\frac{\text{प}}{\text{क}}$, ब,चे ठिकाणीं $\frac{\text{र}}{\text{स}}$ आणि म,चे ठिकाणीं $\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}$, घे, आणि असें मनांत आण कीं, प,क,र,स,क्ष,आणि य,हे सर्व पूर्णांकाचे ठिकाणीं आहेत. तर

$$(\text{गणित रीतीने})\ \frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\frac{\text{प}}{\text{क}}}{\frac{\text{र}}{\text{स}}}=\frac{\text{पस}}{\text{कर}}$$

$$\text{मअ}=\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}\times\frac{\text{प}}{\text{क}}=\frac{\text{क्षप}}{\text{यक}}\qquad \text{मब}=\frac{\text{क्ष}}{\text{य}}\times\frac{\text{र}}{\text{स}}=\frac{\text{क्षर}}{\text{यस}}$$

$$\frac{\text{मअ}}{\text{मब}}=\frac{\frac{\text{क्षप}}{\text{यक}}}{\frac{\text{क्षर}}{\text{यस}}}=\frac{\text{क्षयपस}}{\text{क्षयकर}}$$

$$\text{परंतु}\ \frac{\text{क्षयपस}}{\text{क्षयकर}}=\frac{(\text{क्षय})\times\text{पस}}{(\text{क्षय})\times\text{कर}}=\frac{\text{पस}}{\text{कर}}$$

म्हणून $\frac{\text{मअ}}{\text{मब}}=\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$. या उदाहरणांत अ,ब,म, हे सर्व अपूर्णांक आहेत.

पूर्वीं गणितांत सांगितलें गेलें आहे कीं, पूर्णांकांचे किंवा अपूर्णांकांचे उदाहरणांत, फळांत अंतर पडल्याशिवाय, गुणाकार, किंवा, भागाकार यांचे क्रम फिरवितां येतील. जेव्हां गुणाकार आणि भागाकार, या दोहोंविषयीं, बोलावयाचें आहे, तेव्हां त्यांचे भेदावर लक्ष्य ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं; कांकीं अ, याणें

भागावें आणि $\frac{१}{अ}$ याणी गुणावें हीं दोन्हींही एकसारिखींच आहेत. या पुढील सांगितल्ये उदाहरण समुदायावर लक्ष्य ठेविलें पाहिजे, आणि वेगवेगळाले गुणाकार पर्यायानें पुनःपुनः करून सिद्ध केले पाहिजेत.

१. अ, ब, क, आणि ड, यांचा गुणाकार; २. अब आणि कड, यांचा गुणाकार; ३. अक आणि बड, यांचा गुणाकार; ४. अड आणि बक, यांचा गुणाकार; ५. अबक आणि ड, यांचा गुणाकार; ६. अबड आणि क, यांचा गुणाकार; ७. अकड आणि ब, यांचा गुणाकार; ८. बकड आणि अ, यांचा गुणाकार, ह्मणून कोणत्येही क्रमानें अक्षरें मांडिलीं तरी त्या सर्वांचा गुणाकार अबकड या पदाबरोबर आहे.

एकेरी पदांचे गुणाकार करून त्या गुणाकार पदांचीं अक्षरें कशीही क्रमानें मांडितां येतील, आणि जर त्या पदांस कांहीं गुणकांक जोडिला असेल तर ते अंक परस्पर गुणून गुणाकार मांडावा. नुसते दोन अंक असल्यास त्यांचा मध्यें × हें चिन्ह करावें लागतें. जसें. २अब × ४कड, हे या पुढील वेगळाल्ये रीतीनें मांडतां येतात;

२अब४डक २×४अबकड ८अकबड ८अबकड, इत्यादि.

पदांचे आरंभीं गुणकांक मांडावे हें सोयीचें आहे, आणि पदांचीं एक जातीचीं अक्षरें एकत्र मांडावीं हें ही सोईवार पडतें. ह्मणून

२अअब × ३अबबक, हे, ६अअअबबबक. याप्रमाणें मांडितात.

१२अबक्ष × ४अबक्षक्ष = ४८अअबबक्षक्षक्ष, ३अबक × $\frac{१}{२}$अब = $\frac{३}{२}$ अअबबक

जेव्हां अपूर्णांक परस्परांचे जवळ जवळ, किंवा एका अक्षराजवळ मांडिले असतात, तेव्हां ते परस्परांचा गुणाकार आहे असें आणवितात. जसें. याप्रमाणें २$\frac{अ}{ब}$क$\frac{ई}{फ}$ यांचा अर्थ, २×$\frac{अ}{ब}$×क×$\frac{ई}{फ}$ अथवा, २ $\frac{अकई}{बफ}$ हा आहे.

जरी अ, अब, अबक, इत्यादि, यांस पूर्ण, आणि $\frac{अ}{ब}$, $\frac{क}{ड}$, $\frac{अक}{ब}$, इत्यादि, यांस, अपूर्ण पदें ह्मणतात, तें ह्मणणें त्यांचे अंकगणित गुणाविषयीं नाहीं, परंतु बीजगणित गुणाविषयीं आहे; कांकीं, अपूर्णांकाचे ठिकाणीं अक्षरें मांडिलीं जातात, तर जें बीजरूपानें मनन केलें असतां पूर्ण होतें, तेंच अंकगणित रूपानें

मनन केलें असतां अपूर्ण होतें; आणि याप्रमाणें याचें उलटें ही होतें. उदाहरण, अशी कल्पना कर, कीं अ हा $\frac{१}{२}$ याचे ठिकाणीं घेतला, आणि ब हा $\frac{१}{४}$ याचे ठिकाणीं घेतला, तर अ हा जो बीजरूपानें पूर्ण पद आहे तोच गणित रूपानें $\frac{१}{२}$ अपूर्ण पद होतो; परंतु, $\frac{अ}{ब}$ हें बीज रूपानें जें अपूर्णपद तें अंकगणित रूपानें $\frac{१}{२} \div \frac{१}{४} = २$, पूर्ण पद होतें.

यामुळें, पूर्ण किंवा अपूर्ण पदांविषयीं बोलणें पडलें, तर नेहमी त्याचे बीजरूपावर लक्ष्य ठेवावें, त्यांचे गणित किमतीचा विचार करूं नये.

या पुढील समीकरणांमध्यें जी रीति लक्षांत येत्ये, ती रीति बीजांतल्ये पदांचा गुणाकाराचा आधार आहे:

$$म\,(अ+ब) = मअ + मब$$

$$म\,(अ-ब) = मअ - मब$$

पहिल्यानें, हेंच केलें पाहिजे कीं, अ+ब यांस म वेळा घ्यावा. जर केवळ अ हा म वेळा घेतला, तर स्पष्ट दिसतें, कीं अ जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग घेतला, तितके वेळा ब किंवा बचे भाग घेण्याचे राहिले. यामुळें म अ हा मब इतक्यानें उणा राहील, तर म अ+म ब हा इच्छिला गुणाकार आहे.

दुसऱ्यानें, याप्रमाणें केलें पाहिजे, कीं अ−ब यास म वेळा घ्यावा. जर केवळ अ हा म वेळा घेतला, तर स्पष्ट दिसतें, कीं अ जितक्या वेळा किंवा वेळेचा भाग घेतला, तितक्यानें ब किंवा बचा भाग अधिक घेतला. यामुळें म अ हा मब इतक्यानें अधिक आहे, तर म अ−म ब हा इच्छिला गुणाकार आहे.

यावरून हें पुढील समीकरण सिद्ध केलें जाईल:

$$म\,(अ+ब-क-ड) = मअ + मब - मक - मड$$

म्हणून: अ+ब, यांचे ठिकाणीं, प घे; आणि क+ड, यांचे ठिकाणीं, क घे; तर, अ+ब −क−ड हे प−क आहे २५ आणि २६ पृष्ठ पहा.

आणि म (अ+ब−क−ड) = म (प−क्क) = मप−मक्क

परंतु, मप = मअ+मब आणि मक्क = मक+मड

तेव्हां, मप−मक्क = मअ+मब−(मक+मड)

= मअ+मब− मक−मड

या पुढील उदाहरणास मागील सांगीतलेल्या रीती लागू होतात:

$$३(\text{अ}+\text{ब}) = ३\text{अ}+३\text{ब} \qquad ३\tfrac{१}{२}(\text{अ}-\text{ब}) = ३\tfrac{१}{२}\text{अ}-३\tfrac{१}{२}\text{ब}$$

$$\text{अब}\,(\text{अ}-\text{ब}) = \text{अअब}-\text{अबब} \qquad २\text{अ}(\text{अ}-\text{अअ})^{*} = २\text{अअ}-२\text{अअअ}$$

$$३\text{अबक}\,(\text{अब}-\text{अक}+४) = ३\text{अअबबक}-३\text{अअबकक}+१२\,\text{अबक}$$

$$२\left(\frac{\text{क्ष}}{२}+\frac{\text{क्ष}}{३}\right) = \text{क्ष}+\frac{२\text{क्ष}}{३} \qquad ६\left(\frac{\text{क्ष}}{२}+\frac{\text{क्ष}}{३}\right) = ३\text{क्ष}+२\text{क्ष}$$

$$४०\left(\frac{१}{२}-\text{क्ष}\right) = २०-४०\text{क्ष} \qquad \text{अ}\left(\frac{३}{४}+\text{ब}\right) = \frac{३}{४}\text{अ}+\text{अब}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\left(\frac{\text{ब}}{\text{अ}}+\text{ब}\right) = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}\,\frac{\text{ब}}{\text{अ}}+\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\text{ब} = १+\text{अ}$$

$$\frac{\text{क्षय}}{\text{ज्ञ}}(\text{क्षज्ञ}+१) = \frac{\text{क्षक्षयज्ञ}}{\text{ज्ञ}}+\frac{\text{क्षय}}{\text{ज्ञ}} = \text{क्षक्षय}+\frac{\text{क्षय}}{\text{ज्ञ}}$$

$$\frac{\text{अ}}{\text{अ}+\text{ब}}\left\{\text{क}+\text{ड}-\text{ई}\right\} = \frac{\text{अक}}{\text{अ}+\text{ब}}+\frac{\text{अड}}{\text{अ}+\text{ब}}-\frac{\text{अई}}{\text{अ}+\text{ब}}$$

$$\text{पक्करस}\left(\frac{१}{\text{प}}+\frac{१}{\text{क्क}}+\frac{१}{\text{र}}-\frac{१}{\text{पक्कर}}\right) = \text{क्करस}+\text{परस}+\text{पक्कस}-\text{स}$$

अ+ब यांस क+ड याणीं गुणायासाठीं, क्षण मात्र, अ+ब यांचे ठिकाणीं प, घे. तर प, हा क+ड याणी गुणिला, आणि क+ड हा, प याणीं गुणिला हीं एकच आहेत, ह्मणजे, पक+पड आहे,

(अ+ब) (क+ड) = (अ+ब) क+ (अ+ब) ड

परंतु (अ+ब) क = अक+बक आणि (अ+ब) ड = अड+बड

∴ (अ+ब) (क+ड) = (अक+बक) + (अड+बड)

= अक+बक+अड+बड.

---

* या उदाहरणांत पद्धती शक्य किंवा अशक्य रूपाची आहे किं नाहीं याविषयीं ही गोष्ट एथें लक्षांत आणिली नाहीं.

अ+ब यांस क−ड याणीं गुणायाचें असेल,तेव्हां अ+ब=प,घे,तर प (क−ड) =पक−पड हें होतें,अथवा

(अ+ब) (क−ड) = (अ+ब) क− (अ+ब) ड

= (अक+बक) − (अड+बड)

= अक+बक−अड−बड

अ−ब यांस क−ड याणीं गुणायाचें असेल,तेव्हां अ−ब=प घे,तर प (क−ड)= पक−पड,अथवा

(अ−ब) (क−ड) = (अ−ब) क− (अ−ब) ड

= (अक−बक) − (अड−बड)

= अक−बक−अड+बड

वरची कृति करण्याचा दोन रीती आहेत,परंतु शिकणारानें सद्यः पहिल्या रीतीवर लक्ष्य द्यावें.

पहिली रीति. अ+ब−२क या गुण्यास ड−अ−क या गुणकानें गुणायाचें.

एथे,गुण्य ड वेळा घेऊन,त्या गुणाकारांतून,तो गुण्य अ वेळा,आणि क वेळा घेऊन,एकामागें एक वेगवेगळे वजा केले पाहिजेत; ह्मणजे गुण्य अ+क वेळा घेऊन,ड वेळांतून वजा करायाचा आहे.

गुण्य ड वेळा = अड+बड−२कड

यांची बेरीज { गुण्य अ वेळा = अअ+अब−२अक
गुण्य क वेळा = अक+बक−२कक

ह्मणजे,गुण्य,अ+क वेळा=अअ+अक+अब+बक−२अक−२कक, हें

गुण्य ड वेळांतून वजा करून बाकी } अड+बड+२अक+२कक−२कड
−अअ−अक−अब−बक

दुसरी रीति. वरचीं उदाहरणें पाहिलीं असतां उघड दिसतें,कीं गुणाकाराची रीति या पुढील प्रमाणें आहे: **गुण्य गुणकाचीं पहिलीं पदें यांस + हें चिन्ह आहे असें मनांत आण; नंतर गुण्याचे प्रत्येक पदाला**

अनुक्रमें गुणकाचे प्रत्येक पदानें गूण, आणि पदें एक जातीचे चि-न्हाचीं असतील, त्यांचे गुणाकाराचे पूर्वी + हें चिन्ह कर, आणि जीं प-दें भिन्न जातीचीं असतील तर, त्याचे गुणाकारा पूर्वी − हें चिन्ह कर.

मागील उदाहरण एथे शिरस्त्याप्रमाणें वरचे रीतीवरून वेगळाल्ये पदापुढें यो-ग्य चिन्हें मांडून, करून दाखविलें आहे.

अ+ब−२क

ड−अ−क

ड याणी गुणून······	अड+बड−२कड	हा इच्छिला गुणाकार आहे.
अ याणी गुणून······	−अअ−अब+२अक	
क याणी गुणून······	−अक−बक+२कक	

जेव्हां वेगवेगळ्ये ओळीमध्यें एकसारिखींच पदें येतात, तेव्हां मागून त्यांचा संक्षेप करायासाठीं, तरी एकजातीचीं पदें एकाखालीं एक लिहायास सोई पडते, जसें या पुढील उदाहरणांत:

क्षक्ष−२क्ष+१ यांस

क्ष−४ याणीं गुण

क्ष याणी गुणून···	क्षक्षक्ष−२क्षक्ष+क्ष	हा इच्छिला गुणाकार आहे.
४ याणी गुणून····	−४क्षक्ष+८क्ष−४	
	क्षक्षक्ष−६क्षक्ष+९क्ष−४	हा अतिसंक्षेपरूप आहे.

परंतु सद्यः वरचा रीती पेक्षां ही पुढील रीति बरी वाटत्ये:

क्षक्ष−२क्ष+१ यांस

क्ष−४ याणी गुण

क्षवेळा गुणून यांतून····	क्षक्षक्ष−२क्षक्ष+क्ष	पहिले ओळींतून
४ वेळा गुणून······	४क्षक्ष−८क्ष+४	दुसरी ओळ वजा कर
	क्षक्षक्ष−६क्षक्ष+९क्ष−४	हा इच्छिला गुणाकार झाला

हीं पुढील तीन उदाहरणें मोठ्ये उपयोगाचीं आहेत, यासाठीं शिकणारानें

तीं आणि त्यांसारिखीं दुसरीं उदाहरणें पद्दातांच लिहायास समर्थ असलेंपाहिजे.

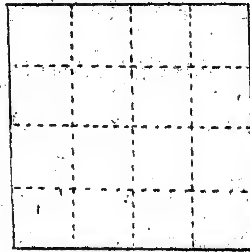
अ+ब यांस
अ+ब याणी गुण
अअ+अब यांशि
अब+बब यांस मेळीव
अअ+२अब+बब हा गुणाकार आहे

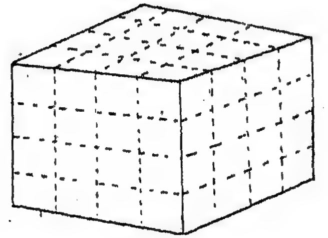
अ–ब यांस
अ–ब याणी गुण
अअ–अब यांतून
अब–बब यास वजाकर
अअ–२अब+बब हा गुणाकार आहे

अ+ब यांस
अ–ब याणी गुण
अअ+अब यांतून
अब+बब यांस वजा कर
अअ–बब हा गुणाकार

ह्या पुढील व्याख्या एथे सांगायास योग्य आहेत.

चौरस ह्मणजे चार बाजूंची आकृति आहे, त्या चार बाजूंची लांबी बरोबर आहे, आणि जवळजवळच्या बाजू परस्परांवर लंब आहेत.





घन ह्मणजे भरींव आकृति आहे, जिच्या मर्यादा साहा समचौरसें आहेत, जसा घडलेला चौरस दगड ज्याची लांबी, रुंदी, आणि जाडी बरोबर आहे.

जें चौरस चार इंच लांबीचें आहे, त्यामध्यें एक एक इंच लांबीचीं ४×४

इतकीं चौरसें आहेत, जें चौरस क्ष इंच लांबीचें आहे, त्यामध्यें एक इंच लांबीचीं, अशीं क्षक्ष इतकीं चौरसें आहेत. चौरस इंचाचा क्ष ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळीमध्यें क्ष चौरसें आहेत.

जो घन चार इंच लांबीचा आहे, त्यामध्यें एकेक इंच लांबीचे, असे, ४×४×४ इतके घन आहेत; जो घन क्ष लांबीचा आहे, त्यामध्यें एकेक इंच लांबीचे क्षक्षक्ष इतके घन आहेत. घन इंचाचे क्ष, थर आहेत, आणि प्रत्येक थरामध्यें क्षक्ष घन इंच आहेत.

वर दाखविलें कीं, कोणती रेघ भलत्ये क्ष एकंमाचे लांबीवर चौरस केलें असतां क्षक्ष असें ह्मटलें जातें, आणि कोणती रेघ भलत्ये क्ष एकंमाचे लांबीवर घन केला असतां, क्षक्षक्ष असें ह्मटलें जातें. अशा संबंधामुळें, क्षक्ष यांस क्ष याचे चौरस, अथवा वर्ग, आणि क्षक्षक्ष यांस क्षचा घन, असें ह्मणण्याची नेहेमी रीति पडली आहे. परंतु क्षक्षक्षक्ष यांस क्षचा चतुर्घात, आणि क्षक्षक्षक्षक्ष यांस क्षचा पंच घात, इत्यादि ह्मणण्याची रीति आहे. अशानें क्ष नुसता असला तर त्यास क्षचा प्रथम घात, आणि क्षक्ष यांस क्षचा द्वितीय घात, आणि क्षक्षक्ष यांस क्षचा तृतीय घात परंतु वर्ग आणि घन, हे दोन शब्द द्वितीय आणि तृतीय घात यांचे ठिकाणीं ह्मटल्यानें, सोईवार पडतें. यासाठीं असें ह्मणण्याची चाल सोडीत नाहीं.

वरचा तीन उदाहरणांचे गुणाकार या पुढील प्रमाणें मांडले जातात.

१. (अ+ब) (अ+ब) = अअ+२अब+बब

अथवा, **भलते कोणते दोन परिमाणाचे** बेरिजेचा **वर्ग, त्या दोन परिमाणाचे वर्गांची** बेरीज, **त्याच दोन परिमाणाचे गुणाकाराचे दुपटीनें** अधिक वाढविली, **इतक्या बरोबर आहे.**

२. (अ−ब) (अ−ब) = अअ−२अब+बब

अथवा **भलते कोणतेही दोन परिमाणाचे** वजाबाकीचा **वर्ग** न **परिमाणाचे वर्गांची** बेरीज **त्यांच दोन परिमाणाचे गुणाकाराचे दुपटीनें** उणी केली **इतक्या बरोबर आहे.**

३. (अ+ब) (अ−ब) = अअ−बब

अथवा भलते कोणतेही दोन परिमाणांचे बेरिजेस, त्याच परिमाणांचे वजाबाकीनें गुणिलें तर तो गुणाकार त्या दोन परिमाणांचे वर्गांचे वजाबाकी बरोबर आहे.

आतां अब आणि २अ हीं दोन भलतीं परिमाणें आहेत. असें मनांत आण. तर वर सांगीतल्यावरून याप्रमाणें होईल.

अब × अब = अअबब, आणि २अ × २अ = ४अअ

२ (अब × २अ) = ४अअब

(अब+२अ) (अब+२अ) = अअबब+४अअब+४अअ

(अब−२अ) (अब−२अ) = अअबब−४अअब+४अअ

(अब+२अ) (अब−२अ) = अअबब−४अअ

हीं पुढील उदाहरणें शिकणाराचें अभ्यासाकरितां फार उपयोगी आहेत.

$(अ \pm \frac{१}{अ})$ यांचा वर्ग =* $अअ \pm २ + \frac{१}{अअ}$

$(अ + \frac{१}{अ})\ (अ - \frac{१}{अ}) = अअ - \frac{१}{अअ}$

(२अक्ष±ब) यांचा वर्ग = ४अअक्षक्ष±४अबक्ष+बब

(२अक्ष+ब) (२अक्ष−ब) = ४अअक्षक्ष−बब

(अ+ब+क) यांचा वर्ग = (अ+ब) (अ+ब)+२ (अ+ब) क+कक

= अअ+बब+कक+२अब+२बक+२कअ

---

* समीकरणांत ± अशीं चिन्हें समीकरणांत, वारंवार आलीं, तर दोन समीकरणें एकठिकाणीं जोडिलेलीं आहेत असें जाणावें. वरचीं चिन्हें घेण्याचा अनुक्रम धरिला तर शेवटपर्यंत वरचीं चिन्हें धरावीं, आणि खालच्यांचा अनुक्रम धरिला तर शेवटपर्यंत खालचीं धरावीं, जसें

अ±ब = क∓ड

हें अ+ब = क−ड अथवा अ−ब = क+ड याप्रमाणें होईल.

शिकणारानें अशीं द्विरूप चिन्हांनीं काम करूं नये परंतु पुस्तकांत अशीं वारंवार येतात म्हणून त्यांचा अर्थ कळायासाठीं मात्र एथें दाखविलीं आहेत.

(अ+ब+क) (अ+ब−क) = (अ+ब) (अ+ब) −कक

= अअ+बब−कक+२अब

(क+अ−ब) (ब+क−अ) = (क+अ−ब) (क−अ−ब)

= कक− (अ−ब)(अ−ब)

= २अब+कक−अअ−बब

= २अब− (अअ+बब−कक)

वरचे दोन शेवटील उदाहरणांवरून, या पुढील चार पद्धतींचा गुणाकार कर.

अ+ब+क, अ+ब−क, ब+क−अ, क+अ−ब;

२अअबब+२बबकक+२ककअअ−अअअअ−बबबब−कककक, हा गुणाकार आहे.

खालचे उदाहरणाचे साहाय्यानें वरचीं उदाहरणें करून दाखीव आणि खालचेंही उदाहरण कर.

(प+क−र) याचा वर्ग = पप+कक+रर+२पक−२कर−२पर

हीं पुढील अनेक प्रकारचीं गुणाकाराचीं उदाहरणें, अभ्यासाकरितां केवळ तोंडानें सांगीतलीं पाहिजेत.

(अ+बक्ष) (अ+कक्ष) = अअ+अबक्ष+अकक्ष+बकक्षक्ष

(क्ष+अ) (क्ष+ब) = क्षक्ष+अक्ष+बक्ष+अब

(क्ष−अ) (क्ष−ब) = क्षक्ष−क्षक्ष−बक्ष+अब

(क्ष+१) (क्ष−३) = क्षक्ष−२क्ष−३

(क्ष−१) (क्ष−३) = क्षक्ष−४क्ष+३

(२क्ष+१) (क्ष−१) = २क्षक्ष−क्ष−१

हीं पुढील कल्यें शिकणाराचे अभ्यासाकरितां लिहिलीं आहेत.

१. जर अ आणि ब हीं भलतीं दोन परिमाणें असतील, आणि त्यांत ब पेक्षां अ मोठा असेल, आणि जर व त्यांचे बेरिजेचा वर्ग, ड त्यांचे वजाबाकीचा वर्ग, त्यांची बेरीज आणि वजाबाकी यांचा गुणाकार असेल तर याप्रमाणें होईल.

वज+उ = २(अअ+बब)　　वज−उ = ४अब

वज+ष = २अ(अ+ब)　　वज−ष = २ब(अ+ब)

उ+ष = २अ(अ−ब)　　ष−उ = २ब(अ−ब)

२. जर भलते दोन अंकांची वजाबाकी केवळ एक एकं आहे, तर त्या अंकाचे वर्गाची वजाबाकी, त्या अंकांचा बेरिजे बरोबर आहे, आणि जर दोन वेगळाले अपूर्णांक एकत्र मिळून पूर्ण एक एकं होईल, जसें $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{३}{४}$, तर त्यांची वजाबाकी त्यांचे वर्गांचे वजाबाकी बरोबर आहे.

३. क्षक्ष− यय आणि २क्षय या दोन पद्धतीचे वर्गांची बेरीज, क्षक्ष+ यय यांचे वर्ग बरोबर आहे.

रीतीप्रमाणें, अ−ब याचा वर्ग आणि ब−अ याचा वर्ग हे दोन्ही बरोबर आहेत; कांकीं अ−ब याचा वर्ग ह्मणजे अअ−२अब+बब आणि ब−अ याचा वर्ग ह्मणजे. बब−२बअ+अअ हीं दोन्ही बरोबर आहेत हें स्पष्ट दिसतें, १५ व्ये पृष्ठावर पहा जेव्हां अ बरोबर ब असेल, तेव्हां ब−अ किंवा अ−ब शून्य आहे; परंतु असें नसेल तर अ−ब अथवा ब−अ, या दोहोंतील एक तरीं अशक्य असावें; कांकीं तसें नसतां अ−ब अथवा ब−अ अशा उदाहरणांमध्यें लाहानांतून मोठें वजा करायाचें अगत्य पडेल. परंतु त्याच कारणावरून, ब−अ अथवा अ−ब या दोहोंतून एक तरीं अगत्य शक्य असावें; यामुळें त्यांतील शक्य पद्धतीचा वर्ग, अअ+बब−२अब, हाही अगत्य शक्य असावा. ह्मणून, जर अ अथवा ब या दोहोंतून एक दुसऱ्यापेक्षां अधिक आहे, तर २अब यापेक्षां अअ+बब हा अगत्य अधिक असावा. जरी बीज कृतीवरून समजण्याजोगें उत्तर निघतें तरी ती कृती समजायाजोगी असावी असा निश्चय करवत नाहीं हेंही नजरेस येतें. (३−७) अशक्यरूप आहे तथापि (३−७) (३−७) यांचा गुणाकार आणि (७−३) (७−३) याचा गुणाकार बीजांती-

व्यक्त पद सापडून त्याचा किंमतीने कृतीची तपासणी पुनः होई, तो-पर्यंत भलत्ये अव्यक्त परिमाणाची किंमत काढायास ती कृती खरी आहे किंवा नाहीं, हें आणवत नाहीं.

भागाकार.

जे भागाकार करायास उघडे, व जे भागाकार करायास उघडे नाहींत, या दोन प्रकारानी सद्यः बीजांतील भागाकार सांगतों. उदाहरण. अब यास अ याणें भाग, ह्मणजे, अब यांत अ किती वेळा जातो, हें विचारिलें असतां, हेंच उत्तर स्पष्ट आहे, कीं जा कारणास्तव अ हा ब वेळा घेतला तोच अ आहे, आणि बअ यांचा अर्थ अब याचे बरोबर आहे, त्या कारणास्तव अब यांत अ हा ब वेळा आहे; या मुळें अब हा अनें भागिला तर भागाकार ब आहे. या प्रकारांत भागाकार करण्याची ही पुढील सांगीतलेली रीति सर्वांपेक्षां सोपी आहे: जेव्हां भाज्यांत, भाजकांतील अक्षरें गुणक असतील तेव्हां तीं अक्षरें दोहोंकडे छेकावीं ह्मणजे भागाकार झाला.

या पुढील उदाहरणांत ही रीति उघड दिसत्ये.

भाज्य	भाजक	भागाकार	भाज्य	भाजक	भागाकार
अब	अ	ब	१२अअक्ष	६अअक्ष	२
अबक	अब	क	२$\frac{१}{२}$ बयज्ञ	$\frac{१}{४}$ बय	१० ज्ञ
२अबक्ष	२क्ष	अब	अअअअ	अअअ	अ
अअबबक्ष	अब	अबक्ष	अअअअ	अअ	अअ
६अबकक	३अबक	२क	क्षयज्ञ	क्षयज्ञ	१

वजाबाकी आणि भागाकार यांचे कल्पनेचे धांदलीमुळें नवे शिकणारे, ० आणि १ या दोहोंचे गुणाविषयीं बहुतकरून चुकतात. हें बहु-

अनेक वेळा जात नाहीत परंतु, केवळ एक वेळ जातात. आतां बीजांत ही गोष्ट सर्वदा लक्षांत ठेविली पाहिजे कीं वेळा ह्मटल्या असतां, एक वेळा, किंवा अनेक वेळा, किंवा एक वेळेचा भाग, किंवा एक वेळा आणि एक वेळेचा भाग, किंवा अनेक वेळा, आणि एक वेळेचा भाग. हाच अर्थ वेळा या शब्दाचा आहे. यामुळें, जरीं

क्ष यास क्ष याणें उणा केला असतां शून्य होतें.

तथापि क्ष यास क्ष याणें भागिला असतां एक होतो.

$\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{मअ}{मब}$ हे सारखेच आहेत, असा अपूर्णांकांतील सिद्धांत वर सांगीतल्ये उदाहरणास अनुसरून जवळ जवळ आहे. कांकिं $\frac{अ}{ब}$ यास म याणें गुणिला असतां $\frac{मअ}{ब}$ होतो, आणि $\frac{मअ}{ब}$ यास म याणें भागिला असतां $\frac{मअ}{मब}$ होतो. परंतु गुणक आणि भाजक बरोबर असेल, तर गुणाकार केला आणि लागलाच भागाकार केला असतां भलतें कांहीं परिमाण पहिल्येच रूपासारिखें रहातें.

गुणाकाराचे रीतीवरून असें घडतें कीं, जर अनेक पदांची कोणतीही पद्धती असेल, आणि त्या प्रत्येक पदामध्यें एक किंवा अनेक अक्षरें साधारण असतील, तर दुसरी एक पद्धती त्याच साधारण एक अक्षरानें अथवा त्या अक्षरांचा गुणाकारानें गुणिली इतकी आहे हें स्पष्ट आहे. जसें, अब+अक हा ब+क गुणिला अ याचे बरोबर आहे; आणि अअब−अबक हा अ−क गुणिला अ ब याचे बरोबर आहे. यावरून, जेव्हां भलत्ये पद्धतीस एक किंवा अनेक अक्षरांचे गुणाकारानें भागायाचें आहे, तेव्हां भाज्याचे प्रत्येक पदांतून तीं अक्षरें छेकून टाकावीं. परंतु जेथे कोणत्ये एक पदाचीं सर्व अक्षरें अशीं छेकलीं जातात, त्या ठिकाणीं १ लिहिण्याचें पक्कें स्मरण ठेवडें पाहिजे. उदाहरण, अ+अब, भागिला अ ह्मणजे १+ब याचें बरोबर आहे, आणि अक−अअक+अकक, भागिला अक ह्मणजे १−अ+क याचे ब-

भाज्य	भाजक	
२अब−२बक+४अबक	२ब	अ−क+२अक
अअअ−अअ+अ	अ	अअ−अ+१
६अब−३अ+३ब	३	२अब−अ+ब
अअब−अबब	अब	अ−ब
अक्षक्षय−क्षक्षक्षयय	क्षक्षय	अ−क्षय

अब यास अ याणें भागायाचें असल्यास या पुढील कृतीनें करावें. अशा कृतीचें फळ $\frac{\text{अब}}{\text{अ}}$ हा अपूर्णांक होतो; त्याचे, अंश आणि छेद यांस अ याणें भागिलें असतां त्यांचे किमतींत अंतर पडत नाहीं. परंतु त्याचा रूपभेद $\frac{\text{ब}}{\text{१}}$ म्हणजे ब हा होतो.

वरचे उदाहरणांत अशी कृती अनुपयोगी आहे; परंतु असें मनांत आण कीं अब यास अक याणी भागायाचें आहे. या उदाहरणांत अ, ब, आणि क, हे कोणत्ये अंकस्थानीं घेतले आहेत, हें कळल्याशिवाय याचा भागाकार पूर्ण होण्यास अशक्य. परंतु त्या भागाकाराचें रूप $\frac{\text{अब}}{\text{अक}}$ अशा चिन्हानें दाखवितात. वरचे रीतीप्रमाणें $\frac{\text{ब}}{\text{क}}$ असें संक्षेपरूप दिलें जाईल. या ठिकाणीं भागाकार पूर्ण झाला नाहीं, परंतु त्यास संक्षेप देऊन भागाकार अधिक सरळ केला आहे.

$$\frac{\text{२ब}}{\text{२क}}=\frac{\text{ब}}{\text{क}} \qquad \frac{\text{अअब}}{\text{अक्ष}}=\frac{\text{अब}}{\text{क्ष}} \qquad \frac{\text{३अममन}}{\text{६अअम}}=\frac{\text{मन}}{\text{२अ}}$$

$$\frac{\text{प}}{\text{पक}}=\frac{\text{१}}{\text{क}} \qquad \frac{\text{३अब}}{\text{अअब}}=\frac{\text{३}}{\text{अ}} \qquad \frac{\text{२१विवब}}{\text{२८क्षब}}=\frac{\text{३वि}}{\text{४क्ष}}$$

एक पदानें भागिलेल्या अनेक पदांचा पद्धतीस संक्षेपरूप देतां येतें. उदाहरण. क्षज्ञ+यज्ञ−ज्ञक्ष यास क्षयय याणीं भागिलें असतां या पुढील प्रमाणें होईल.

$$\frac{क्षय}{क्षयय}+\frac{यज्ञ}{क्षयय}-\frac{ज्ञक्ष}{क्षयय} \text{ अथवा } \frac{१}{य}+\frac{ज्ञ}{क्षय}-\frac{ज्ञ}{यय}$$

$$\frac{२वि-क्षक्ष+विक्ष}{विक्ष}=\frac{२}{क्ष}-\frac{क्ष}{वि}+१$$

$$\frac{अ+ब+क}{अबक}=\frac{१}{बक}+\frac{१}{अक}+\frac{१}{अब}$$

$$\frac{अ+ब}{अअ}=\frac{१}{अ}+\frac{ब}{अअ} \qquad \frac{अअ+१}{अ}=अ+\frac{१}{अ}$$

$$\frac{क्ष+४य-३ज्ञ+२}{६}=\frac{क्ष}{६}+\frac{२य}{३}-\frac{ज्ञ}{२}+\frac{१}{३}$$

वर जें सांगीतलें आहे त्यांत भागाकाराचा उघड प्रकार आहे. जांचीं उत्तरें काढण्यास अधिक कृती केली पाहिजे, त्यांतील एक उदाहरण सांगतों : **क्षक्षक्ष+ययय, यामध्यें क्ष+य किती वेळा जातात?** काहीं वेळपर्यंत अशा कृतीची गरज लागणार नाहीं यास्तव ती तकुब ठेउन तिचे योग्य जागीं पुढें सांगण्यांत येईल. तथापि काहीं जातीचे उदाहरणाचीं उत्तरें पूर्वील गुणाकाराचे कृत्यांपासून एकदांच निघतील. ३७ आणि ३८ पृष्ठ पाहा. उदाहरण, उघड दिसतें कीं, क्षक्ष−९ यामध्यें क्ष+३ हे क्ष−३ वेळा जातात.

कित्येक अपूर्णांकांस नुसत्ये दृष्टीनें संक्षेप देतां येतो त्याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें पाहा.

$$\frac{अ+अब}{अ-अब}=\frac{१+ब}{१-ब} \qquad \frac{३क्ष+६क्षक्ष}{९क्षय-३क्ष}=\frac{१+२क्ष}{३य-१}$$

$$\frac{अ-अअ}{२अ+अज्ञ}=\frac{१-अ}{२+ज्ञ} \qquad \frac{अअ+३अब}{अब+१२अ}=\frac{अ+३ब}{ब+१२}$$

बीजाच्या पद्धतीस काहीं मिळविलें, तर तेंच लागलेंच वजा करावें; आणि तीस कोणेकानें गुणिलें, तितक्यानें लागलेंच भागावें; तसेंच जितकें वजा केलें, तितकें लागलेंच मिळवावें. आणि जितक्यानें भागिलें, तितक्यानें लागलेंच गुणावें. अशा

उलट सुलट कृतीनें किंमत बदलल्यावांचून, बीजाचा पद्धती फिरवून निरनिराळ्ये रूपानें मांडाव्या लागतात. जो क्ष खालीं चार प्रकारानी लिहिला आहे त्यावरून ही वरची कृती समजांत येईल.

$$क्ष+अ-अ \qquad क्ष-अ+अ \qquad \frac{अक्ष}{अ} \qquad \frac{क्ष}{अ}\times अ$$

$$\text{जसें}\quad अ+क्ष = २अ+क्ष-अ = \left(१+\frac{क्ष}{अ}\right)अ$$

$$अअ+२अब-क = अअ+२अब+बब-(क+बब)$$

$$= (अ+ब)(अ+ब) - (क+बब)$$

$$बब-४अक = बब\left(१-\frac{४अक}{बब}\right) = अबक\left(\frac{ब}{अक}-\frac{४}{ब}\right)$$

$$म+न = मन\left(\frac{१}{न}+\frac{१}{म}\right) = न\left(\frac{म}{न}+१\right) = म\left(१+\frac{न}{म}\right)$$

$$क्ष = \frac{१}{\frac{१}{क्ष}} = \frac{१+क्ष}{\frac{१}{क्ष}(१+क्ष)} = \frac{१+क्ष}{\frac{१}{क्ष}+१}$$. ६ आणि ७ वें पृष्ठ पाहा.

अपूर्ण बीजाचा संक्षेप करण्याचा वेगळाल्या रीती जा पुढें येणार त्यांविषयीं खालीं उदाहरणें लिहिलीं आहेत. अंकगणितांत अपूर्णांकांविषयीं जा रीती सिद्ध झालेल्या आहेत, त्या बीजांतल्ये मिळवणी इत्यादिकांचे रीतीसहित लाविल्या आहेत. पुढील उदाहरणें चार प्रकारानीं दाखविलीं आहेत आणि प्रत्येक प्रकाराचे आरंभीं एक एक सोपें उदाहरण लिहिलेलें आहे. आणि त्या उदाहरणाचा उलगडण्यासजी कृती लागत्ये ती बाकी राहिलेल्ये उदाहरणावर लागू होत्ये.

प्रथम प्रकार.

$$\frac{अ}{ब} = \frac{मअ}{मब}$$

$$\frac{१+\frac{१}{क्ष}}{१+\frac{१}{क्षक्ष}} = \frac{\left(१+\frac{१}{क्ष}\right)क्षक्ष}{\left(१+\frac{१}{क्षक्ष}\right)क्षक्ष} = \frac{क्षक्ष+क्ष}{क्षक्ष+१}$$

$$\frac{वि+\frac{१}{२}}{\frac{२}{३}वि+\frac{१}{४}} = \frac{\left(वि+\frac{१}{२}\right)१२}{\left(\frac{२}{३}वि+\frac{१}{४}\right)१२} = \frac{१२वि+६}{८वि+३}$$

$$य = \frac{य(य-१)}{य-१} = \frac{यय-य}{य-१} \qquad \frac{क्ष}{अ} = \frac{क्षक्ष+अक्ष}{अक्ष+अअ}$$

$$\frac{१}{अ+ब} = \frac{अ-ब}{अअ-बब} = \frac{अ+ब}{अअ+२अब+बब} = \frac{४}{४अ+४ब}$$

$$\frac{क्ष-४}{२\frac{१}{२}} = \frac{२क्ष-८}{५} = \frac{४क्ष-१६}{१०} = \frac{२अक्ष+८अ}{५अ}$$

$$\frac{७क्ष-४}{१०} = \frac{\frac{१}{२}(७क्ष-४)}{\frac{१}{२}(१०)} = \frac{३\frac{१}{२}क्ष-२}{५}$$

$$\frac{\frac{१}{अ}+\frac{१}{अब}}{ब-अ+\frac{१}{ब}} = \frac{अब\left(\frac{१}{अ}+\frac{१}{अब}\right)}{अब\left(ब-अ+\frac{१}{ब}\right)} = \frac{ब+१}{अबब-अअब+अ}$$

दुसरा प्रकार.

$$अ+\frac{क्ष}{य} = \frac{अय+क्ष}{य} \qquad अ-\frac{क्ष}{य} = \frac{अय-क्ष}{य} \qquad \frac{क्ष}{य}-अ = \frac{क्ष-अय}{य}$$

$$१-\frac{१}{क्ष} = \frac{क्ष-१}{क्ष} \qquad क्ष-\frac{१}{क्ष} = \frac{क्षक्ष-१}{क्ष}$$

$$२-\frac{य-१}{य+१} = \frac{२य+२-(य-१)}{य+१} = \frac{य+३}{य+१}$$

$$अ-\frac{अअ}{अ+ब} = \frac{अब}{अ+ब} \qquad अ-\frac{अब}{अ+ब} = \frac{अअ}{अ+ब}$$

$$अ+ब-\frac{अअ-२अब}{अ+ब} = \frac{४अब+बब}{अ+ब}$$

$$अ+ब+\frac{अअ-२अब}{अ+ब} = \frac{२अअ+अब}{अ+ब}$$

$$\frac{य+१}{य-१}+य+१ = \frac{य+यय}{य-१} = य\,\frac{य+१}{य-१}$$

$$\frac{अ+ब-क}{अ-क}-२ = \frac{ब-अ+क}{अ-क} \qquad \frac{क्ष}{य}-क्ष = \frac{क्ष-क्षय}{य}$$

$$\frac{अब+बक+कअ}{अ+ब+क}-क = \frac{अब-कक}{अ+ब+क}$$

तिसरा प्रकार.

$$\frac{अ}{ब}+\frac{क्ष}{य} = \frac{अय+बक्ष}{बय} \qquad \frac{अ}{ब}-\frac{क्ष}{य} = \frac{अय-बक्ष}{बय}$$

$$\frac{\text{अ+ब}}{\text{क+ड}} - \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{कब−अड}}{\text{कक+कड}} \qquad \frac{\text{अ−ब}}{\text{क−ड}} - \frac{\text{अ}}{\text{क}} = \frac{\text{अड−बक}}{\text{कक−कड}}$$

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{क्ष+य}} - \frac{\text{य}}{\text{क्ष−य}} = \frac{\text{क्षक्ष−२क्षय−यय}}{\text{क्षक्ष−यय}} \qquad \frac{\text{प}}{\text{क}} + \frac{\text{क}}{\text{पप}} = \frac{\text{पपप+कक}}{\text{पपक}}$$

चवथा प्रकार.

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} \times \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{अक्ष}}{\text{बय}} \qquad \frac{\text{अ}}{\text{ब}} \div \frac{\text{क्ष}}{\text{य}} = \frac{\text{अय}}{\text{बक्ष}}$$

$$\frac{\text{क्ष−१}}{\text{क्ष+१}} \times \frac{\text{क्ष+२}}{\text{क्ष−१}} = \frac{\text{(क्ष−१) (क्ष+२)}}{\text{(क्ष+१) (क्ष−१)}} = \frac{\text{क्ष+२}}{\text{क्ष+१}}$$

$$\frac{\text{२अब}}{\text{अ+ब}} \div \frac{\text{अ−ब}}{\text{३अ}} = \frac{\text{६अअब}}{\text{अअ−बब}} \qquad \frac{\text{३अक्ष}}{\text{यय}} \times \frac{\text{यवि}}{\text{२क्ष}} = \frac{\text{३अवि}}{\text{२य}}$$

$$\frac{\text{म}}{\text{अन}} \div \frac{\text{२म}}{\text{३बन}} = \frac{\text{३ब}}{\text{२अ}} \qquad \frac{\text{पक}}{\text{क}} \times \frac{\text{३कक}}{\text{ककई}} = \frac{\text{३पक}}{\text{कई}}$$

वर चार प्रकारानीं जितकीं उदाहरणें सांगीतलीं आहेत, त्यांचा नव्ये शिकणारानीं स्वतां दृढ अभ्यास करून, त्याशीं अगत्य पक्कें माहित व्हावें; प्रथमतः यापेक्षां अधिक उदाहरणांचा अभ्यास करण्याचें प्रयोजन नाहीं; कांकीं दुसरे उदाहरणाविषयीं यापेक्षां चांगली रीति पुढें सांगण्यांत येईल.

वर जें सर्व सांगीतलें, तें केवळ निरवालस अंक गणितानुरूप आहे, जीं अक्षरें घेतलीं तीं केवळ अंकांचीं संक्षेप चिन्हें आहेत असें मानावें, आणि सर्व एकरूप समीकरणें हीं केवळ गणितांतील प्रतिज्ञांचीं संक्षेपरूपें आहेत, असेंही मानावें. जसें,

$$\text{(अ+ब)}\ \text{(अ+ब)} = \text{अअ+२अब+बब}$$

ही पद्धती या पुढील वाक्याचा अर्थ दाखविल्ये: जर भलत्ये दोन अंकांची मिळवणी

घेतली, आणि ती बेरीज त्याच बेरिजेनें गुणली तर जें फळ उत्पन्न होतें, तें आणि प्रत्येक अंक त्याणीं तेंच गुणावे आणि त्या गुणाकारांचे बेरिजेस त्या अंकांचे गुणाकाराची दुप्पट मिळवावी हें, हीं दोन्हीं बरोबर आहेत.

जर भलते काहीं अंक देउन, आणि त्याशीं काहीं एक कृती करांयास सांगीतली, तर त्यास **अंकगणितानुरूप** कृत्य ह्मणतात; आणि, याप्रमाणें प्रश्न केला, कीं दिलेल्ये अंकांशीं सांगीतलेली कृती केली, तर काय अंक उत्पन्न होईल. उदाहरण, २५ आणि ३०० यांचे गुणाकाराचा पंनासावा भाग काय आहे.

जेव्हां भलते कांहीं खरे अंक दिले, अथवा दिले आहेत अशी कल्पना केली, ती अमळशानें पुढें समजण्यांत येईल. आणि असा प्रश्न केला, ज्याचें इच्छाफळ कोणतें कृतीवरून उत्पन्न होईल. हें पहिल्यानें एकदांच पाहिल्यानें लक्ष्यांत येत नाहीं, तेव्हां त्यास **बीजगणितानुरूप** कृत्य ह्मणतात. तशे जातीचा प्रश्न एथें खालीं सांगीतला आहे: ३, आणि, १७ हे दोन अंक दिलेले आहेत; तर तो अंक काय आहे, कीं जितक्याने त्याचें अर्ध ३ पेक्षां अधिक, तितक्यानें त्याची दुप्पट १७ पेक्षां उणी आहे? या उदाहरणांत हें पुढील प्रश्न केले. १. असा अंक आहे किं काय? २. जर आहे, तर ३ आणि १७ यांशी कोणती कृती केल्यानें तो अंक निघेल? ३. त्या कृतीचें फळ अथवा इच्छिलेला अंक काय आहे? पुढें शिकणाराचे लक्ष्यांत येईल, कीं त्या प्रश्नांस हीं उत्तरें आहेत, कीं असा अंक आहे खरा, आणि तो ३ आणि १७ यांचे बेरिजेचे दोन पंचमांश घेतल्यानें सांपडतो, आणि यामुळें तो अंक ८ आहे.

जर पहिल्या दोन प्रश्नानींच निर्वाह झाला असता, तर प्रश्नांमध्यें ३ आणि १७ हे दोन अंक आहेत, असें सांगायाचें प्रयोजन पडलें नसतें; कारण कीं, तेंच कृत्य भलत्ये कोणत्ये दुसऱ्ये अंकावर लावतां आलें असतें; आणि ते अंक कोणतेही असोत, ते उलगडण्याची रीति एकसारिखीच रहाती. हें पुढें दाखविलें जाईल, ह्मणजे जर हा पुढील प्रश्न केला; अ आणि ब, हे दोन अंक दिले आहेत, त्यांत ब मोठा आणि अ लहान, तर तो अंक काय आहे, किं जितक्यानें त्याचें अर्ध अ पेक्षां अधिक आहे, तितक्यानें त्याची दुप्पट ब पेक्षां उणी होईल? याचें उत्तर $\frac{2}{5}$ (अ+ब)

हेंच आहे, आणि याचा ताळा या पुढील प्रमाणें आहे:

$\frac{2}{5}$ (अ+ब) याची दुप्पट $\frac{4}{5}$ (अ+ब), अथवा $\frac{4}{5}$ अ + $\frac{4}{5}$ ब याचे बरोबर आहे. हे ब पेक्षां ब − ($\frac{4}{5}$ अ + $\frac{4}{5}$ ब) इतक्यानें उणें आहे, अथवा ब − $\frac{4}{5}$ अ − $\frac{4}{5}$ ब, अथवा $\frac{1}{5}$ ब − $\frac{4}{5}$ अ राहातात; परंतु $\frac{2}{5}$ (अ+ब) याचें अर्ध $\frac{1}{5}$ (अ+ब) आहे, हें अ हून $\frac{1}{5}$ (अ+ब) − अ इतक्याने अधिक आहे, अथवा $\frac{1}{5}$ अ + $\frac{1}{5}$ ब − अ, अथवा $\frac{1}{5}$ ब − $\frac{4}{5}$ अ राहातात, हें, $\frac{2}{5}$ (अ+ब) याची दुप्पट जितक्यानें ब पेक्षां कमी आहे, तितक्या बरोबर आहे; हें सिद्ध. आतां पहा, कीं वरचे उदाहरणावरून हें कृत्य उलगडण्याची सामान्य रीति कळत्ये असेंच केवळ नाहीं, तर तें उदाहरण, कोणकोणत्ये पक्षांनीं अशक्य आहे, हें ही त्यापासून कळतें; कारण कीं, जर $\frac{1}{5}$ ब हा $\frac{4}{5}$ अ या पेक्षां अधिक किंवा उणा तरी नसला, ह्मणजे जर ब हा, ४ अ, यापेक्षां अधिक नसला, तर वरचें उत्तर $\frac{1}{5}$ ब − $\frac{4}{5}$ अ हें, वरचे गोष्टीचा अधिकपणा किंवा उणेपणा दाखवितें, तेव्हां तें विरुद्ध आहे. जेथे ब बरोबर १७, आणि अ, बरोबर ३ घेतले, तेथेंच अशी विरुद्ध गोष्ट घडली. जर असें नसेल तर हें कृत्य अशक्य आहे, असें जाणावें; उदाहरण, शिकणारानें शोधून पहावें, कीं असा कांहीं पूर्ण किंवा अपूर्ण अंक आहे कीं काय, कीं ज्याची दुप्पट ११ हून जितक्यानें कमी आहे, तितक्याने त्याचें अर्ध ३ पेक्षां अधिक आहे. या कृत्यांत विरोध अगत्य असावा; विरोध खचित कळल्यानंतर, तो कसकसा घडतो याचा विचार केला, तर या पुढील रीतीनें स्पष्ट दिसतें: इच्छिले अंकाचें अर्ध ३ यापेक्षां अधिक असावें, ह्मणून तो, ६ पेक्षां अधिक असावा. आणि त्याची दुप्पट ११ हून उणी असावी ह्मणजे ती संख्या $5\frac{1}{2}$ पेक्षां उणी असावी. परंतु जी संख्या ६ पेक्षां अधिक आहे, ती $5\frac{1}{2}$ पेक्षां उणी होत नाहीं; यामुळें दोन भागांत परस्पर विरोध येतो.

यावरून समजण्यांत येतें, कीं भलतें कांहीं कृत्य सांगण्यांत येईल, तें अशक्य किंवा विरुद्ध असतें किंवा त्यास उलगडवत नाहीं. परंतु, दुसऱ्ये पक्षीं, असें कृत्य सांगण्यांत येतें, कीं ज्याचीं अनंत उत्तरें होतील, ह्मणून यांस अनंत कृत्यें ह्मणतात. अशक्य कृत्यांमध्यें, कित्येक अशीं येतात, कीं त्यांचा अशक्यपणा उघड असतो; जसें याप्रमाणें, **असा पूर्णांक काढ कीं जो ७ याचे अर्धा**

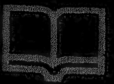
शीं असतात,कीं त्यांचे उत्तरांचा अनंतपणा उघड असेल, आणि दुसऱ्यामध्यें त्यांचा अनंतपणा उघड दिसत नाहीं. उदाहरण, असे दोन विषम अंक काढ कीं जांची बेरीज सम अंक होईल? याचें उत्तर भलते कोणी दोन विषम अंक, हें उघड आहे; आणि ते दोन अंक काय आहेत, कीं जांचे बेरिजेचें अर्ध त्यांचे वजाबाकीचे अर्धाशीं मिळविलें असतां,मोठ्या अंकाबरोबर होईल. याचें उत्तर जरी पहिल्या प्रमाणें स्पष्ट नाहीं, तरी भलते कोणते दोन अंक, हे उत्तर आहे. कृत्यांचे, वरचे सांगीतल्ये दोन प्रकारामध्यें, अशी जातीचीं कृत्यें असतील, कीं कित्येकांस १००० उत्तरें, दुसऱ्यांस, ९९९ इत्यादि,उतरत उतरत, एक उत्तर पर्यंत असतील, अशी गोष्ट मनांत आणतां येईल. आणि एकादें कृत्य अशक्य आहे, असें जाणल्यावर, त्याचा अशक्यपणा कां होतो, हें विचारायास आपणास योग्य दिसेल? कृत्यांतील कोणते दोन भाग परस्परांस विरुद्ध आहेत, आणि त्यांचा विरोध कशामुळें येतो? ह्मणजे कृत्यास, शक्यरूप देण्यासाठीं, संकेतांमध्यें कोणकोणत्ये तऱ्हेचा, आणि किती रूपभेद करावा, लागेल?

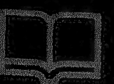
ह्या सर्व प्रश्नांस, अंकगणितानें उत्तर देण्यास काहींच साधन नाहीं; याजकरितां, बीजगणित अंकगणिताहून भिन्नजातीची विद्या आहे, असें मानावें लागतें, आणि बीजांत जे विषय आहेत, ते अंकगणितांत नाहींत, यामुळें बीजगणितांमधील बोलण्याची सरणी, आणि कृत्य करायाची रीति, आणि अर्थ सांगण्याची चाल, हीं तिनही अंकगणितांत नाहीं.

शिकणारा, जासमयीं बीजगणित विद्या शिकायास आरंभ करितो, त्यासमयीं, किंवा त्याचे अगोदर त्याणें भूमिति विद्येचा थोडा अभ्यास केला असतां, बरें पडेल. असें केल्यानें त्यास हें समजेल, कीं भूमितीचे सर्व प्रश्न, अगोदरच, त्यासाठीं तयार केलेले आहेत, ह्मणजे, सर्व कारणें, इत्यादि, त्याचे दृष्टी पुढेंच ठेविलेलीं

करणामध्यें कृत्याचे अवयव वेगळे वेगळे करणें, ह्मणजे सर्व कृत्याचें मनन करून, त्याचीं पदें अधिक अधिक सरळ रूपांत आणून, शेवटीं तें कृत्य उलगडण्यास, किंवा त्याचे सत्यतेचा ताळा पाहाण्यास, कोणकोणत्या कल्पना केल्या पाहिजेत, हा विचार असतो.

आतां पृथक्करण रूपानें बीजगणिताचीं मूळ प्रकरणें, किंवा सिद्धता स्थापून दाखविण्याविषयीं पुढें चालवितों; बीजाची रचना नवीं नावें, किंवा, नवीं मुळें घेऊन, सद्यः करावी; त्याचे बदल जें अंकगणित आपणास माहित आहे, त्यापासून आरंभ करितों; आणि जों पर्यंत दुसरे सर्व विचारांचे कामाची गरज पडे, तोंपर्यंत त्यांस सोडून देतों. यापासून पाहाण्यांत येईल, कीं, जे पहिल्याने कधींही मनांत आले नवते, असे एकामागें एक नवे नवे निश्चितार्थ उत्पन्न होतात, आणि तेणेंकरून एक नवी भाषा बोलण्याची गरज पडेल, आणि चिन्हांस नवे नवे अर्थ द्यावे लागतील, हें कसें करावें, आणि तें कोणत्ये परिणामास जाईल, हें समजण्याविषयीं, शिकणारानें पुढील प्रथम अध्याय शिकावा; याशिवाय दुसरा काहीं मार्ग दाखवितां येत नाहीं.





बीजगणित मूळपीठिका.

पहिला अध्याय.

एकवर्णसमीकरणाविषयीं.

आतां एकवर्ण समीकरणें उलगडायाची रीति दाखवितों. एकवर्ण समीकरण काय आहे, त्याचा अर्थ अगोदर सांगीतला पाहिजे.

बहुत करून पदाचा वर्ण जाणायास, त्या पदांतील अक्षरें मोज. ह्मणजे, अबक, हें पद तीन वर्णाचें आहे; अअबक, हें पद चार वर्णाचें आहे; कांकीं, जरी त्यांत केवळ तीन वेगळाल्ये जातीचीं अक्षरें आहेत, तथापि त्यांतलें एक अक्षर दोन वेळा येतें. हीं पुढील उदाहरणें आहेत:

अ, ब, क, क्ष, ज्ञ, य, इत्यादि, एक वर्णाचीं पदें आहेत.

अअ, बब, कक्ष, बक, यज्ञ, इत्यादि, दोन वर्णाचीं पदें आहेत.

अअअ, अअब, अबब, अबक, पअक, इत्यादि, तीन वर्णाचीं पदें आहेत. आणि याप्रमाणें पुढेंही.

कोणत्येही सांगीतल्ये अक्षरांविषयीं, पदाचा वर्ण काढणें असल्यास, केवळ तींच अक्षरें मोज. ह्मणजे ३अअक्षक्षय, हें पांच वर्णाचें पद, क्ष आणि य, या दोन अक्षरांविषयीं, तीन वर्णाचें आहे; अ आणि क्ष, यांविषयीं, चार वर्णाचें आहे, नुसते क्ष याविषयीं, दोन वर्णाचें आहे, नुसते य विषयीं, एक वर्णाचें आहे, आणि या प्रमाणें पुढेंही. जेव्हां काहींएक पदांत क्ष अगदी नाहीं, तर तें पद, क्ष विषयीं, काहींच वर्णाचें नाहीं, ह्मणजे क्ष याचे संबंधरहित आहे.

ज्या पदामध्यें कोणत्येही अक्षराचा मोठा वर्ण असेल, त्याच अक्षराविषयीं, त्या समीकरणाचा वर्ण, तोच आहे. ह्मणजे हें पुढील समीकरण.

क्षक्ष−ज्ञक्षक्षक्ष=यज्ञ−ययक्ष

हें, क्षविषयीं तीन वर्णांचें, यविषयीं दोन वर्णांचें, आणि ज्ञविषयीं एक वर्णांचें आहे.

हें पुढील कृत्य संकेतसमीकरण उलगडण्याचें आहे:—एक संकेतसमीकरण दिलें आहे, त्यांत एक अक्षराची किंमत अव्यक्त आहे; ज्या अंकाचास्थळीं तें अव्यक्त अक्षर आहे तो अंक कोणता, असा कीं तें समीकरण खरें होईल? असे एकापेक्षां अधिक अंक आहेत कीं काय? जर आहेत, तर ते किती, आणि कोणकोणते? अथवा असा अंक नाहीं कीं काय, ह्मणजे तें समीकरण अशक्यआहे कीं काय? अशक्य असलें, तर त्याचा अशक्यपणा कशानें कळेल?

कांहीं उदाहरणापासून या गोष्टीची अटकळ चांगली समजांत येईल, ज्यांचा खरेपणा शिकणारानें ताडून पाहावा.

२क्ष−१=५क्ष−१९

जेव्हां क्ष=६ असतील, तेव्हांच मात्र हें समीकरण खरें आहे.

२क्ष−१=५क्ष+१२

यांत क्ष कोणत्येही अंकस्थळीं असेल, तर हें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं.

१६क्ष=४८+क्षक्ष

हें समीकरण जेव्हां क्ष=४ असतील, तेव्हां खरें आहे, आणि क्ष=१२ असतील, तेव्हांही खरें आहे; परंतु दुसऱ्ये कोणतेही पक्षीं खरें नाहीं.

१२क्ष=४८+क्षक्ष

यांत क्षची किंमत कोणताही अंक असो, तरी हें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं.

क्षक्षक्ष+११क्ष=६क्षक्ष+६

जेव्हां क्ष=१, किंवा २, किंवा ३, असें असेल, तेव्हां हें समीकरण खरें आहे; परंतु दुसऱ्ये कोणत्येही पक्षीं खरें नाहीं.

खरेपणा आणायासाठीं वरचे उदाहरणांत क्ष=४, असें समजून उलगडू

न पहा. क्र.

क्षक्षक्ष = ६४   ६ क्षक्ष = ९६

११ क्ष = ४४   + ६ = ६

क्षक्षक्ष + ११ क्ष = १०८   ६ क्षक्ष + ६ = १०२

परंतु १०८ = १०२ हें खरें नाहीं; यास्तव क्षक्षक्ष + ११ क्ष ही पद्धती ६ क्षक्ष + ६ यां बरोबर नाहीं; ह्मणून क्ष = ४ हे या समीकरणास स्थापीन नाहीं.

आतां काहीं स्पष्ट खरी गोष्ट सांगतों :

१. बरोबर अंकांशी बरोबर अंक मिळविले असतां, त्यांची बेरीज बरोबर होईल. ह्मणजे, जर अ = ब आणि क = ड, तर अ + क = ब + ड. जर अ = ब − क, आणि क्ष = प − क्क, तर अ + क्ष = (ब − क) + (प − क्क) = ब + प − क − क्क. जर अ = क्ष − य, आणि ब = क्ष + य, तर अ + ब = (क्ष − य) + (क्ष + य) = क्ष − य + क्ष + य = २ क्ष. जर अ = ब + क, तर अ + ब = ब + क + ब.

२. बरोबर अंकांतून बरोबर अंक वजा केले, तर, त्यांची वजाबाकी बरोबर होईल. ह्मणजे, जर अ = ब आणि क = ड, तर अ − क = ब − ड. जर अ = प − क्क आणि ब = प − २क्क, तर अ − ब = (प − क्क) − (प − २क्क) = प − क्क − प + २क्क = क्क. जर अ = ज्ञ + य, तर अ − म = ज्ञ + य − म.

३. बरोबर अंक बरोबर अंकानी गुणिले, तर, त्यांचे गुणाकार बरोबर होतील. ह्मणजे, जर अ = ब आणि क = ड, तर अक = बड. जर अ = ब + क आणि ज्ञ = न तर, अज्ञ = न (ब + क) = नब + नक. जर ड = ल − व, तर २ड = २ल − २व.

$$\text{जर } \frac{\text{क्ष}}{२} + \frac{\text{क्ष}}{३} = १$$

$$\text{तर } २\frac{\text{क्ष}}{२} + २\frac{\text{क्ष}}{३} = २, \text{ अथवा क्ष} + \frac{२\text{क्ष}}{३} = २$$

$$३\text{क्ष} + ३\frac{२\text{क्ष}}{३} = ६$$

$$\text{अथवा } ३\text{क्ष} + २\text{क्ष} = ६$$

४. बरोबर अंक बरोबर अंकानी भागिले, तर त्यांचे भागाकार बरोबर हो-

समीकरणें उलगडल्यसमयीं, वारंवार मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि करा-यास सांगण्याचें प्रयोजन पडेल, ह्मणून संक्षेपानें दाखविण्यासाठीं या पुढील प्रमाणें चिन्हें करितात.

(+) अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोनी बाजूंस अ मिळवायाचा आहे.

(−) अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोनी बाजूंतून अ वजा करायाचा आहे.

(×) अ याचा अर्थ हाच, कीं वरील समीकरणाचे दोनी बाजूंस अ याणें गुणायाचें आहे.

(÷) अ याचा अर्थ हाच आहे, कीं वरील समीकरणाचे दोनी बाजूंस अ याणें भागायाचें आहे.

(+) (−) (×) आणि (÷) जेव्हां यांतील नुसतें एक चिन्ह अक्षरावांचून मांडिलें असेल, तेव्हां त्याचा अर्थ हाच होईल, कीं वरचे दोन समीकरणांची, मिळवणी, वजाबाकी, इत्यादि करायाची आहे.

वर सांगीतले संक्षेप या पुढील उदाहरणावरून समजांत येतील.

१.		अ = ब − क		अ − ब = क + क्ष
	(+) क	अ + क = ब	(+) ब	अ = क + क्ष + ब
२.		क − ड = ल − म		२क्ष − ३ = ९
	(+) $\overline{\text{ड+म}}$	क + म = ल + ड	(+) ३	२क्ष = १२
३.		प + क = अ − ब		११क्ष + १८ = १००
	(−) क	प = अ − ब − क	(−) १८	११क्ष −

४. $प+क्र-ज्ञ = ३अ+४$

$(-)\overline{क्र-ज्ञ}.$ $प = ३अ+४-क्र+ज्ञ$

५. $\frac{क्ष}{२}-\frac{क्ष}{३}+\frac{२७}{४} = \frac{७क्ष}{६}-\frac{५क्ष}{१२}+\frac{३}{४}$

$(\times)१२$ $\frac{१२क्ष}{२}-\frac{१२क्ष}{३}+\frac{३२४}{४} = \frac{८४क्ष}{६}-\frac{६०क्ष}{१२}+\frac{३६}{४}$

अथवा $६क्ष-४क्ष+८१ = १४क्ष-५क्ष+९$

६. $अक्ष = ब$ $(अ+ब)क्ष = क$

$(\div)$ अ $क्ष = \frac{ब}{अ}$ $(\div)$ $\overline{अ+ब}$ $क्ष = \frac{क}{अ+ब}$

७. $अ-ब+२क-३ड = क्ष-अ+ब$

$ब+३क-२ड = ४क्ष-अ-२ब$

$(+)$ $अ+५क-५ड = ५क्ष-२अ-ब$

८. $२अक्ष = ब-ज्ञ$

$अ = ब+ज्ञ$

$(\div)$ $२क्ष = \frac{ब-ज्ञ}{ब+ज्ञ}$

(५५आणि५६) या दोन दृष्टांतील गोष्टींवरून, आणि वरचे सांगितल्या कृतीं वरून, जांत एक अव्यक्त पद आहे, अशा एकवर्णसमीकरणाचे उलगडण्या-विषयीं सांगतों.

१. या समीकरणाचा खरेपणा स्थापायास, क्षची किंमत काय असावी.

$३क्ष-७ = क्ष+१९.$

$(+)७$ $३क्ष = क्ष+२६$

$(-)क्ष$ $२क्ष = २६$

$(\div)२$ $क्ष = १३$

ताळा जर $क्ष=१३$, तर $३क्ष-७ = ३२$

$क्ष+१९ = ३२$

२. $३क्ष+१६=१०क्ष+९$

(−) ३क्ष $१६=७क्ष+९$

(−) ९ $७=७क्ष$

(÷) ७ $१=क्ष$

ताळा जर $क्ष=१$ तर $३क्ष+१६=१९$

$१०क्ष+९=१९$

३. $२०क्ष-१३=१०२\frac{१}{२}-क्ष$

(+) १३ $२०क्ष=११५\frac{१}{२}-क्ष$

(+) क्ष $२१क्ष=११५\frac{१}{२}$

(÷) २१ $क्ष=\frac{२३१}{२\times२१}$

$=\frac{२३१}{४२}=५\frac{१}{२}$

ताळा जर $क्ष=५\frac{१}{२}$ तर $२०क्ष-१३=९७$

$१०२\frac{१}{२}-क्ष=९७$

४. $\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}=१-\frac{क्ष}{४}$

(×) २ $क्ष+\frac{२क्ष}{३}=२-\frac{क्ष}{२}$

(×) २ $२क्ष+\frac{४क्ष}{३}=४-क्ष$

(×) ३ $६क्ष+४क्ष=१२-३क्ष$

(+) ३क्ष $६क्ष+४क्ष+३क्ष=१२$

म्हणजे $१३क्ष=१२$

(÷) १३ $क्ष=\frac{१२}{१३}$

ताळा जर $क्ष=\frac{१२}{१३}$ तर, $\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}$ अथवा $\frac{५}{६}क्ष=\frac{१२}{१३}$ चे $\frac{५}{६}=\frac{१०}{१३}$

आणि $१-\frac{क्ष}{४}=१-\left(\frac{१२}{१३}\right)$ चे $\left(\frac{१}{४}\right)=१-\frac{३}{१३}=\frac{१०}{१३}$

या समीकरणाचे दोनी बाजूस २, ३, ४, या अंकांचे कोणत्याही साधारण गुणाकारानें गुणिलें असतां, सहज उलगडा होतो. याविषयीं लघुतम गुणाकार फार उपयोगी आहे. ही गोष्ट समजण्यासाठीं मागलें उदाहरण करून पाहिलें असतां,

ध्यानांत येईल :—

$$\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}=१-\frac{क्ष}{४}$$

आतां २,३,आणि ४, यांचा साधारण गुणाकार ३६ आहे.

(×) ३६ $$\frac{३६क्ष}{२}+\frac{३६क्ष}{३}=३६-\frac{३६क्ष}{४}$$

अथवा $१८क्ष+१२क्ष=३६-९क्ष$

(+) ९क्ष $१८क्ष+१२क्ष+९क्ष=३६$

ह्मणजे, $३९क्ष=३६$

(÷) ३९ $$क्ष=\frac{३६}{३९}$$

अतिसंक्षेपेंकरून $$क्ष=\frac{१२}{१३}$$

आतां **लघुतम गुणाकारानें** कृती करून पहा.

२,३,४, यांचा **लघुतम गुणाकार** १२ आहे.

$$\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष}{३}=१-\frac{क्ष}{४}$$

(×) १२ $$\frac{१२क्ष}{२}+\frac{१२क्ष}{३}=१२-\frac{१२क्ष}{४}$$

अथवा $६क्ष+४क्ष=१२-३क्ष$

(+) ३क्ष $६क्ष+४क्ष+३क्ष=१२$

$१३क्ष=१२$

(÷) १३ $$क्ष=\frac{१२}{१३}$$

यांत वरप्रमाणें संक्षेप करण्याचें प्रयोजन नाहीं.

५. $अब+अ-ब=१$

या उदाहरणांत आणि वरचे सर्व उदाहरणांत, भेद हाच आहे कीं वरचांत एक अव्यक्त परिमाण आहे, आणि यांत दोन अव्यक्त परिमाणें आहेत. याचें खरें उत्तर हेंच, कीं या समीकरणास स्थापित करायासाठीं, अ आणि ब यांचा पुष्कळ किंमती आहेत. ब याची भलती किंमत **घेतली**, तर त्या घेतले किमतीचे सहायानें, अ याची किंमत **काढिली** जाईल. या दोन किमतीनी, हें समीकरण स्थापिलें जाईल. जसें ब=१२ असें होऊं शकतें कीं नाहीं? असें विचारिलें तर, वरचे समीकरणा—

त बच्यास्थळीं १२ मांडून पहा. तेव्हां याप्रमाणें होईल.

$$१२अ+अ-१२=१$$

अथवा $$१३अ-१२=१$$

(+) १२ $$१३अ=१३$$

(÷) १३ $$अ=१$$

उत्तर हेंच, कीं जर अ=१, तर ब=१२ होऊं शकतात. यापक्षीं अब=१२ आणि १२+१-१२=१.

ब याची कांहीं **विशेष** किंमत घेतल्याशिवाय मनांत आणावें कीं त्याची किंमत दिलेली आहे; तर समीकरणाचे पहिले बाजूचा व्यक्त ब त्याच समीकरणाचे दुसरे बाजूस व्यक्त एक आहे त्याशीं कशो तऱ्हेनें संयोग करावा. म्हणजे ब याला भलती कांहीं विशेष किंमत दिल्यावर, अ याची किंमत काढायाची रीति समजांत येईल. वरचें समीकरण पुनः मांड.

$$अब+अ-ब=१$$

(+) ब $$अब+अ=१+ब$$

परंतु, अब+अ, हे अ एक अधिक ब वेळा घेतला याचे बरोबर आहे; म्हणजे अब+अ= (१+ब)अ.

याजकरितां, (१+ब) अ=१+ब

(÷) $\overline{१+ब}$ $$अ=\frac{१+ब}{१+ब}=१$$

तर, उत्तर हेंच कीं, अ=१ असें असल्यास, तर ब याची म्हटली ती किंमत होईल.

ताळा जर अ=१, तर

$$अब+अ-ब=ब+१-ब=१.$$

बीजगणितरीतीनें, ज्याची अगा नसल्ये, अशीं फळें किती वगैरेनें उत्पन्न होतात तीं दाखविण्यासाठीं, हें उदाहरण दिलेलें आहे. आतां पुढें एक दुसरें उदाहरण देतों.

६. $$\text{क्षय}=\text{क्ष}+\text{य}+१$$

यांत यची किंमत व्यक्त आहे, असें जाणून, क्षची किंमत काढायाची आहे.

(−) क्ष $$\text{क्षय}-\text{क्ष}=\text{य}+१$$

परंतु, क्षय−क्ष हे क्ष, य−१ एक वेळा घेतला, इतका आहे; अथवा (य−१)क्ष.

याजकरितां $(\text{य}-१)\,\text{क्ष}=\text{य}+१$

($\div$) $\overline{\text{य}-१}$ $$\text{क्ष}=\frac{\text{य}+१}{\text{य}-१}$$

विशेषपक्ष. य = ५ हे घे, तर

$$\text{क्ष}=\frac{५+१}{५-१}=\frac{६}{४}=\frac{३}{२}$$

ताळा $$\text{क्षय}=\frac{३}{२}\times ५=\frac{१५}{२}$$

$$\text{क्ष}+\text{य}+१=\frac{३}{२}+५+१=\frac{३}{२}+\frac{१०}{२}+\frac{२}{२}=\frac{१५}{२}$$

सामान्यताळा $\text{क्ष}=\frac{\text{य}+१}{\text{य}-१}$ तर $\text{क्षय}=\frac{\text{य}(\text{य}+१)}{\text{य}-१}$

$$\text{क्ष}+\text{य}+१=\frac{\text{य}+१}{\text{य}-१}+\text{य}+१$$

$$=\frac{\text{य}+१}{\text{य}-१}+\frac{\text{य}(\text{य}-१)}{\text{य}-१}+\frac{\text{य}-१}{\text{य}-१}$$

$$=\frac{(\text{य}+१)+\text{य}(\text{य}-१)+(\text{य}-१)}{\text{य}-१}$$

$$=\frac{\text{य}+१+\text{यय}-\text{य}+\text{य}-१}{\text{य}-१}$$

$$=\frac{\text{यय}+\text{य}}{\text{य}-१}=\frac{\text{य}(\text{य}+१)}{\text{य}-१}$$

७. एक शेत, दोन मजूरांतून, एक जण ४ दिवसांत, आणि दुसरा ७ दिवसांत, याप्रमाणें ते कापूं शकतात. त्याणीं तें शेत बरोबर कापायास आरंभ केल्यावर, दुसरे दिवशीं तिसरा मजूर त्या कामांत मिळाला, तो एकटा तें शेत १० दिवसांत कापील असा होता. तो मजूर त्या दोन मजूरांचे संगतीं कांहीं वेळ काम करून, त्यांस सोडून गेला; सोडितेसमयीं असें कळलें, कीं त्या शेताचे चारपंचमांश कापले गेले. तेव्हां झाल्ये कामास किती दिवस लागले?

अंकगणितांतील कठीण उदाहरणें, बीजगणिताचे चिन्हांनीं उलगडायास, केवढें सोपें पडतें, हें दाखवायासाठीं हें उदाहरण घेतलें आहे.

तो पहिला मजूर, एक दिवसांत, ...
थांश कापितो, इत्यादि, तर तो क्ष दिवसांत क्षचा चतुर्थांश कापील, अथवा सर्व शेताचे $\frac{क्ष}{४}$ इतके कापील. तितकेच वेळांत दुसरा मजूर $\frac{क्ष}{७}$ इतकें कापील, परंतु तिसरा मजूर, एक दिवस उणें काम करतो, आणि तो एक दिवसांत शेताचा एक दशांश कापितो, तर, तो आपले वेळांत $\frac{क्ष-१}{१०}$ इतकें कापील. यामुळें, तिघां मिळून झालेलें काम या पुढील प्रमाणें आहे,

$$\frac{क्ष}{४}+\frac{क्ष}{७}+\frac{क्ष-१}{१०}$$

परंतु प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें, वरचे तिघांचें सर्व काम मिळून, शेताचे $\frac{४}{५}$ कापले गेले, तर,

$$\frac{क्ष}{४}+\frac{क्ष}{७}+\frac{क्ष-१}{१०}=\frac{४}{५}$$

४, ७, १०, ५; या अंकांचा लघुतम गुणाकार १४० आहे

$$(\times)१४० \quad \frac{१४०क्ष}{४}+\frac{१४०क्ष}{७}+\frac{१४०}{१०}(क्ष-१)=\frac{४\times१४०}{५}$$

$$\text{अथवा} \quad ३५क्ष+२०क्ष+१४(क्ष-१)=११२$$

$$\text{अथवा} \quad ३५क्ष+२०क्ष+१४क्ष-१४=११२$$

$$\text{यामुळें,} \quad ६९क्ष-१४=११२$$

$$(+)१४ \quad ६९क्ष=१२६$$

$$(\div)६९ \quad क्ष=\frac{१२६}{६९}=\frac{४२}{२३}=१\frac{१९}{२३}$$

ताळा. एक दिवसांत आणि एक दिवसाचे $\frac{१९}{२३}$ शांत, पहिले मजूरानें शेताचे $\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{४}$ चे $\frac{१९}{२३}$ श कापले, अथवा $\frac{१}{४}$ चे $\frac{४२}{२३}$; अथवा शेताचे $\frac{२१}{४६}$ कापले; दुसरे मजूरानें $\frac{१}{७}$ शाचे $\frac{४२}{२३}$ श अथवा $\frac{६}{२३}$. म्हणून शेताचे $\frac{१२}{४६}$ श कापले; आणि तिसरा मजूर, ज्याणें दुसरे दोघांपेक्षां १ दिवस उणें काम केलें, अथवा $\frac{१९}{२३}$ श दिवस काम केलें, त्याणें त्या वेळांत $\frac{१}{१०}$ चे $\frac{१९}{२३}$ श अथवा $\frac{१९}{२३०}$, म्हणजे $\frac{३८}{४६०}$

$२\frac{१}{२}$ आणि $६\frac{१}{३}$, यांचा साधारण गुणाकार ५७० आहेत; यांत $२\frac{१}{२}$ हे २२८ वेळा जातात, आणि त्यांत $६\frac{१}{३}$ हे ९० वेळा जातात. हेंही ५ यांचाही साधारण गुणाकार आहे. परंतु ५७०, हा लघुतम गुणाकार नव्हे, तर यांचा लघुतम गुणाकार १९ आहे, हा घेऊन शिकणारानें उदाहरण उलगडावें, परंतु ५७०, या साधारण गुणाकारानें, हें उदाहरण उलगडितों.

$$(\times)५७० \quad \frac{५७०}{२\frac{१}{२}}(\text{क्ष}-३)-\frac{५७०}{६\frac{१}{३}}(\text{क्ष}-४)=१७१०-\frac{५७०}{५}(\text{क्ष}+१)$$

$$\text{अथवा} \quad २२८(\text{क्ष}-३)-९०(\text{क्ष}-४)=१७१०-११४(\text{क्ष}+१)$$

$$\text{परंतु} \quad २२८(\text{क्ष}-३)=२२८\,\text{क्ष}-६८४ \text{ इत्यादि}$$

$$\text{यामुळें} \quad (२२८\,\text{क्ष}-६८४)-(९०\,\text{क्ष}-३६०)=१७१०-(११४\,\text{क्ष}+११४)$$

$$\text{अथवा} \quad २२८\,\text{क्ष}-६८४-९०\,\text{क्ष}+३६०=१७१०-११४\,\text{क्ष}-११४$$

$$(+)\overline{६८४+११४\,\text{क्ष}-३६०} \quad \text{तर } २२८\,\text{क्ष}-९०\,\text{क्ष}+११४\,\text{क्ष}=१७१०-११४+६८४-३६०$$

$$\text{अथवा} \quad २५२\,\text{क्ष}=१९२०$$

$$(\div)१२ \quad २१\,\text{क्ष}=१६०$$

$$(\div)२१ \quad \text{क्ष}=\frac{१६०}{२१}=७\frac{१३}{२१}$$

ताळा जर $\text{क्ष}=\frac{१६०}{२१}$ तर

$$\frac{\text{क्ष}-३}{२\frac{१}{२}}=\frac{\frac{९७}{२१}}{२\frac{१}{२}}=\frac{\frac{९७}{२१}}{\frac{५}{२}}=\frac{१९४}{१०५}=\frac{१९४}{५\times२१}$$

$$\frac{\text{क्ष}-४}{६\frac{१}{३}}=\frac{\frac{७६}{२१}}{\frac{१९}{३}}=\frac{२२८}{३९९}=\frac{२२८}{१९\times२१}$$

$$\text{३} - \frac{\text{क्ष} + \text{१}}{\text{५}} = \frac{\text{१३४}}{\text{५} \times \text{२१}}$$ हें वरचे बरोबर.

वरचे उदाहरणांपासून एकवर्णसमीकरणें उलगडायाचा या पुढील रीती निघतात.

समीकरणांतील अपूर्णपदांचा अपूर्णपणा काढायाचा असेल, तर सर्व पदांचे छेदांचा कोणत्याही साधारण गुणाकारानें समीकरणाचा दोनही बाजू गूण; बहुत करून, या कृतीस लघुतम गुणाकार, दुसरे सर्व साधारण गुणाकारापेक्षां, सोईस पडतो.

हीं वरची रीति या पुढील उदाहरणावर लागू करून दाखवितों.

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{ड}} \quad (\times)\ \text{बड} \quad \frac{\text{अबड}}{\text{ब}} = \frac{\text{कबड}}{\text{ड}}, \quad \text{अथवा अड} = \text{बक}$$

या समीकरणापासून शिकणारानें हीं पुढील समीकरणें उलगडावीं.

$$\text{अ} = \frac{\text{कब}}{\text{ड}}, \quad \text{ब} = \frac{\text{अड}}{\text{क}}, \quad \text{क} = \frac{\text{अड}}{\text{ब}}, \quad \text{ड} = \frac{\text{बक}}{\text{अ}}$$

$$\frac{\text{१}}{\text{अ}} = \frac{\text{ड}}{\text{कब}}, \quad \frac{\text{१}}{\text{ब}} = \frac{\text{क}}{\text{अड}}, \quad \frac{\text{१}}{\text{क}} = \frac{\text{ब}}{\text{अड}}, \quad \frac{\text{१}}{\text{ड}} = \frac{\text{अ}}{\text{बक}}$$

या पुढले समीकरणांतले, पहिले समीकरणावरून, शिकणारानें दुसरीं सर्व समीकरणें उलगडावीं.

$$\frac{\text{अब}}{\text{क्षय}} = \frac{\text{कड}}{\text{पक}}, \quad \text{अ} = \frac{\text{कडक्षय}}{\text{पकब}}, \quad \text{क्ष} = \frac{\text{अबपक}}{\text{कडय}}, \quad \frac{\text{अ}}{\text{य}} = \frac{\text{कडक्ष}}{\text{पकब}},$$

$$\frac{\text{अब}}{\text{क}} = \frac{\text{डक्षय}}{\text{पक}}, \quad \text{अबपक} = \text{क्षयकड}, \quad \frac{\text{ब}}{\text{डय}} = \frac{\text{कक्ष}}{\text{अपक}},$$

२. समीकरणांतील कोणतेंही पद एका बाजूंतून काढून, दुसरे बाजूस, त्याचें चिन्ह बदल केल्यानें, नेलें जातें. यास स्थळांतर करणें ह्मणतात. ही गोष्ट जर वरचे उदाहरणापासून आढळली नसली

लिहिल्यावरून स्पष्ट कळेल.

$$\text{अ}+\text{ब} = \text{क}+\text{ड}-\text{ई}$$

$$(-)\ \text{ब} \qquad \text{अ} = \text{क}+\text{ड}-\text{ई}-\text{ब}$$

$$(+)\ \text{ई} \qquad \text{अ}+\text{ई} = \text{क}+\text{ड}-\text{ब}$$

समीकरणांतील अपूर्ण पदांचा अपूर्णपणा काढण्याकरितां रीति लावल्येसमयीं, संभाळलें पाहिजे कीं, छेद काढल्यावर, जें चिन्ह पूर्वी अपूर्णपदाचे पुढें असतें, तें आतां अंशांचें चिन्ह होतें; यामुळें तें अंशपद कुंडळीमध्यें ठेविलें पाहिजे, नाहीं तर लागलीच मिळवणी किंवा वजाबाकी करून मांडलें पाहिजे. या सांगण्याचा अर्थ या पुढील उदाहरणावरून समजेल.

$$\text{क्ष}+\frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{ब}}-\frac{\text{क}+\text{क्ष}}{\text{अब}}=\text{ड}-\frac{\text{क्ष}-\text{ई}}{\text{अ}}$$

$$(\times)\ \text{अब} \qquad \text{अबक्ष}+\text{अ}(\text{क्ष}-\text{अ})-(\text{क}+\text{क्ष})=\text{अबड}-\text{ब}(\text{क्ष}-\text{ई})$$

$$\text{अथवा} \qquad \text{अबक्ष}+(\text{अक्ष}-\text{अअ})-(\text{क}+\text{क्ष})=\text{अबड}-(\text{बक्ष}-\text{बई})$$

$$\text{अथवा} \qquad \text{अबक्ष}+\text{अक्ष}-\text{अअ}-\text{क}-\text{क्ष}=\text{अबड}-\text{बक्ष}+\text{बई}$$

नवा शिकणारा अशी चूक बहुतकरून करितो. ह्मणजे. – क – क्ष यांचे स्थळीं आणि – बक्ष + बई यांचे स्थळीं – क + क्ष आणि – बक्ष – बई, असें लिहितो.

वरचे दुसऱ्या रीतीवरून उदाहरण,

$$\text{अबक्ष}+\text{अक्ष}+\text{बक्ष}-\text{क्ष} = \text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}+\text{बई}$$

$$\text{अथवा} \quad (\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1)\,\text{क्ष} = \text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}+\text{बई}$$

$$(\div)\ \overline{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1} \qquad \text{क्ष} = \frac{\text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}+\text{बई}}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1} \quad \cdots\cdots (1)$$

तांव्हा

$$\text{क्ष}-\text{अ} = \frac{\text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}+\text{बई}}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1}-\text{अ}$$

$$= \frac{\text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}+\text{बई}-\text{अ}(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1)}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1}$$

$$= \frac{\text{अबड}+\text{अअ}+\text{क}+\text{बई}-\text{अअब}-\text{अअ}-\text{अब}+\text{अ}}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1}$$

$$= \frac{\text{अबड}+\text{अ}-\text{अब}-\text{अअब}+\text{क}+\text{बई}}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1}$$

$$\frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{अबड}+\text{अ}-\text{अब}-\text{अअब}+\text{क}+\text{बई}}{\text{ब}(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(१) (२) (३) आणि (४) या सर्वांस समछेद कर. ते याप्रमाणें होतील

(१) याचे अंश आणि छेद अब यांणीं गूण, (२) याचे अंश आणि छेद अ यांणीं गूण, (४) याचे अंश आणि छेद ब यांणीं गूण. नंतर हें समीकरण करून मांड

$$\text{क्ष}+\frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{ब}}-\frac{\text{क}+\text{क्ष}}{\text{अब}},\ \text{अथवा}\ (१)+(२)-(३)$$

अशी कृती केल्यानें याप्रमाणें निघेल

$$\frac{\text{अअबबड}+\text{अअबड}+\text{अबबई}+\text{अबई}-\text{अअब}-\text{अबड}-\text{बक}-\text{बई}}{\text{अब}\,(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)}$$

अथवा याचे अंश आणि छेद ब यांणीं भागून $=\dfrac{\text{अअबड}+\text{अअड}+\text{अबई}+\text{अई}-\text{अअ}+\text{अड}-\text{क}-\text{ई}}{\text{अ}\,(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)}$

तशीरीतीनेंही,

$\text{ड}-\dfrac{\text{क्ष}-\text{ई}}{\text{अ}}$ अथवा ड−(४), वरचे (१) + (२) − (३) याचे किंमती बरोबर होईल.

नवे शिकणारानें वरचीं समीकरणें कागदावर पुस्तकावांचून उलगडून मांडण्याविषयीं निपुण व्हावें

मनांत आण कीं वरचे समीकरणांत, क आणि ई, हीं दोनी शून्य आहेत, तर त्या समीकरणाचें याप्रमाणें पुढील रूप होईल

$$\text{क्ष}+\frac{\text{क्ष}-\text{अ}}{\text{ब}}-\frac{\text{क्ष}}{\text{अब}}=\text{ड}-\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}}$$

त्यावरून क्षची किंमत ही होत्ये

$$\text{क्ष}=\frac{\text{अबड}+\text{अअ}}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१}$$

आणि यावरून मागें काढिलेलीं समीकरणाचा दोन बाजूची किंमत

$$\frac{\text{अअबड}+\text{अअड}-\text{अअ}-\text{अड}}{\text{अ}\,(\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१)}$$

अथवा अंश आणि छेद अ याणी भागून $=\dfrac{\text{अबड}+\text{अड}-\text{अ}-\text{ड}}{\text{अब}+\text{अ}+\text{ब}-१}$

या सर्व पद्धती शिकणाराने समीकरणापासून काढाव्या.

वर सामान्य कृतीविषयीं गोष्टी झाल्या. आतां काहीं विशेष कृतीविषयीं शोध केला पाहिजे; ह्मणून त्या समजायासाठीं कसे कसे अर्थ केले पाहिजेत त्यांचा आतां विचार करितों. पूर्वी मनांत आली नवतीं अशीं तऱ्हेतऱ्हेचीं उदाहरणें पहाण्यांत येतील, आणि हरएक उदाहरण उलगडून सांगीतलें जाईल, आणि जी गोष्ट हरएक उदाहरणांत अगोदर पहाण्यांत आली नसेल, तीचें कारण दाखविण्याविषयीं, हर एक उदाहरणास एक एक कृत्य लावलें जाईल.

१. **उलटाविषय.** अ=२, ब=३, ड=$\frac{१}{६}$, असें असलें तर वरचें समीकरण याप्रमाणें होतें

$$क्ष+\frac{क्ष-२}{३}-\frac{क्ष}{६}=\frac{१}{६}-\frac{क्ष}{२}$$

$$तर\ क्ष=\frac{२\times३\times\frac{१}{६}+२\times२}{२\times३+२+३-१}=\frac{५}{१०}=\frac{१}{२}$$

वरचे समीकरणाचा ताळा पाहिला असतां, विपरीत गोष्ट त्वरेनें नजरेंत येईल. या उदाहरणांत क्ष=$\frac{१}{२}$ आहे, आणि समीकरणाचे दुसरे पदामध्यें क्ष−२, ह्मणजे $\frac{१}{२}$ उणें २ करायास अशक्य. यावरून असें दिसून येतें कीं **समीकरणाचें उत्तर शक्य निघून, त्या उत्तराने त्याचा ताळा पाहूं गेल्यास, तें समीकरण त्या रीतीनें अशक्य, असें दृष्टीस येतें.** तर ह्याच प्रश्न केला पाहिजे, कीं काहीं कृतीपासून असें समीकरण उत्पन्न होऊं शकतें कीं काय? जर होऊं शकतें, तर तें कृत्यच खोटें आहे, अथवा उलगडण्याची रीति खोटी आहे? उलगडण्याची रीति खोटी असल्यास ती नीट कशी करावी?

दृष्टांतार्थ उदाहरण. अ, बशीं याप्रमाणें करार करितो, कीं तुझी सर्व मालमत्ता घेऊन, तुझें सर्व कर्ज मी चुकवीन, मग दैवगतीनें नफा होऊ, किंवा तोटा होऊ. शोध केल्यावर, असें समजण्यांत आलें, कीं बची मालमत्ता, कर्जसहित, अचे मालमत्तेचे बरोबर आहे, इतकेंच कीं ब दुसरे पुरुषाशीं भागीदार आहे, आणि

यांनीं मिळून, तिसरे क पुरुषाशीं, वर प्रमाणेंच क-

रार केला होता. नंतर कचें सर्वस्व तपासल्यावर, असें समजण्यांत आलें कीं तो १०० रुपयांचा कर्जदार आहे. या सर्व व्यवहाराचा सारांश हाच कीं. अची असल मालमत्ता होती, ती दुप्पट होण्यास ७५ रुपये उणें आहेत. तेव्हां अची असल मालमत्ता काय होती ?

अ याची असलची मालमत्ता दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर ब आणि त्याचा सर्कती यांची मालमत्ता, कचे व्यवहार संबंधी जो त्यांचा भाग, तो खेरीज करून, अचे मालमत्ते बरोबर आहे. या वरचे उदाहरणाचे शेवटील गोष्टी वरून असें मानलें जातें, कीं या व्यवहारापासून अला नफा झाला. तो असा कीं ब आणि त्याचा सर्कती यांणीं कशीं करार केल्यावरून जो तोटा होणार, त्यापेक्षां त्यांचे क्ष रुपये अधिक आहेत. ती गोष्ट तशीच आहे, असें मनांत आण; तर ब आणि त्याचा सर्कती यांस क्ष−१०० रुपये राहातात; ह्मणून ब याचा भाग $\frac{१}{२}$ (क्ष − १००) आहे. ह्या संकेताप्रमाणें ब कडून अचेकडे गेला, ह्मणून अचे जवळ या बरोबर होईल,

$$क्ष + \frac{क्ष - १००}{२}$$

हें अचे मालमत्तेचे दुपटी बरोबर होण्यास, ७५ रुपयानीं उणें आहे, यास्तव हें २क्ष −७५ याचेही बरोबर आहेत

यामुळें $$क्ष + \frac{क्ष - १००}{२} = २क्ष - ७५$$

(×) २ $$२क्ष + क्ष - १०० = ४क्ष - १५०$$

$$४क्ष - २क्ष - क्ष = १५० - १००$$

$$क्ष = ५०$$

जा उलट्ये विषयाचा विचार चालला आहे, तोच अशाने या समीकरणांत येतो; कांकीं $\frac{५० - १००}{२}$ हें अशक्य आहे. आणि क्ष हा १०० पेक्षां अधिक आहे या कल्पनेवरून तें निघालें, त्या कल्पनेस विरोध येतो. यामुळें अशी उलगडण्यावर कांहीं भरंवसा ठेववत नाहीं. तर दुसरी कल्पना कर.

हीं. असें असतां, ब आणि त्याचा

न त्यांचे क्ष रुपये मात्र रहातील; बाकी अथवा १०० – क्ष यांतून अला बचा भाग अथवा ½ (१०० – क्ष) इतकें मिळेल. तो भाग अ यानें वला कराराप्रमाणें द्यावा, ह्मणून अला इतका तोटा होईल; अजवळ पहिले क्ष रुपये होते, तर इतका तोटा झाल्यानें इतकें राहील

क्ष – (१०० – क्ष)/२

हे तरी अ याची मालमत्ता दुप्पट करण्यास ७५ रुपयांनीं कमी असावें. असें बोललें असतां उदाहरणाचा एक भाग दुसरे भागास विरोध आणतो. तर याच प्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं अचे पहिल्ये मालमत्तेचे दुपटींत ७५ कमी इतकी त्याजवळ हालीं झाली.

ह्मणून क्ष – (१०० – क्ष)/२ = २क्ष – ७५

(×) २ २क्ष – (१०० – क्ष) = ४क्ष – १५०

अथवा २क्ष – १०० + क्ष = ४क्ष – १५०

अथवा २क्ष + क्ष – १०० = ४क्ष – १५०

हें ही वरचे समीकरणाचे बरोबर आहे, तथापि या रूपानें खोटें नाहीं; कां, जरी यापासून क्ष = ५० असें निघतें, आणि त्याप्रमाणें क्ष – १०० अशक्य आहेत, तथापि २क्ष + क्ष – १०० हें शक्य आहे. यावरून असें दिसतें, कीं क्ष – ½ (१०० – क्ष) याचे ठिकाणीं खोटे कल्पनेवरून, क्ष + ½ (१०० – क्ष) याप्रमाणें लिहिलें, त्यापासून जो खोटा परिणाम होणार, तो समीकरण उलगडल्यावर नाहींसा होतो, आणि नीट रीतीनें केल्याप्रमाणें उत्तर निघतें.

असा उलटा विषय या जातीचे चुकीनें उत्पन्न होतो. जर कपेक्षां ब मोटा असेल, तर स्पष्ट आहे, कीं

अ – (ब – क) = अ – ब + क

परंतु जर अ – ब + क अशी पद्धती असेल, आणि जर असें इच्छिलें, कीं ब आणि क [illegible] वे तर, जोंपर्यंत ब आणि क यांत मोटा कोणता, तो समजपर्यंत त्यास शुद्ध रीतीनें मांडवत नाहीं. ब मोठा असला तर वरची पद्धती

याप्रमाणें होईल.

$$अ-(ब-क);$$

परंतु क मोठा असला, तर याप्रमाणें होईल.

$$अ+(क-ब);$$

जेव्हां ब=क आहे, तेव्हां एकपक्षीं अ-० होतें, आणि दुसरे पक्षीं अ+० होतें. अथवा दोहों पक्षीं अ मात्र रहातो, असें नसल्यास त्या दोहोंतून एक तरी रव-चीत अशक्य होईल.

वर सांगीतल्ये गोष्टीवरून हेंच दिसतें, कीं जर अ-ब+क या पदर्नाचें अ+(क-ब) हें शुद्धरूप चुकून, त्याचे ठिकाणीं अ-(ब-क) असें लिहिलें असतां, शेवटले उत्तरांत काहीं अंतर पडत नाहीं. एथें खालीं त्यासारिखींच दोन उदाहरणें लिहून दाखवितों

$$क्ष-\frac{अ-क्ष}{ब}=क+\frac{क्ष-ब}{ब} \qquad क्ष+\frac{क्ष-अ}{ब}=क-\frac{ब-क्ष}{ब}$$

$$बक्ष-(अ-क्ष)=बक+(क्ष-ब) \qquad बक्ष+(क्ष-अ)=बक-(ब-क्ष)$$

$$बक्ष-अ+क्ष=बक+क्ष-ब \qquad बक्ष+क्ष-अ=बक-ब+क्ष$$

या दोन्ही उदाहरणाचें उलगडणें जें बाकी राहिलें तें एक सारिखेंच आहे. म्हणून

$$बक्ष=बक+अ-ब$$

$$क्ष=\frac{बक+अ-ब}{ब}$$

२ उलटाविषय.

उदाहरण

$$अक्ष+ब=कक्ष+ड$$

$$अक्ष-कक्ष=ड-ब$$

$$(अ-क)क्ष=ड-ब$$

$$क्ष=\frac{ड-ब}{(अ-क)}$$

मनांत आण, कीं ब पेक्षां ड उणा आहे, परंतु क पेक्षां अ अधिक आहे. ज-

स्पष्ट आहे, कीं हें समीकरण अशक्यरूप आहे; कांकीं जर क पेक्षां अ अधिक आ-हे तर अक्ष हें कक्ष पेक्षां अधिक आहे; त्यावरून, जर ड पेक्षां ब अधिक आहे, तर अक्ष+ब ही कक्ष+ड यापेक्षां अगत्य अधिक असावी, ह्मणून त्या परस्पर बरोबर होऊं शकत नाहीं.

१. कृत्य. सन् १८३० या वर्षांत, अचें वय ५० होतें आणि बचें वय ३५ होतें. तर अचें वय बचे वयाचे दुप्पट होण्याचा समय सांग. तर ही गोष्ट सन १८३० यांचे पूर्वीं किंवा यानंतर असावी. यांत दुसरा पक्ष पहा, ह्मणून इच्छिला समय १८३० + क्ष होईल असें मनांत आण.

तेव्हां ५०+क्ष हें अचें वय होईल

आणि ३५+क्ष हें बचें वय होईल

तर ५०+क्ष = २(३५+क्ष)

अथवा ५०+क्ष = ७०+२क्ष

२क्ष−क्ष = ५०−७०

या उदाहरणांत अशक्यरूपाची वजाबाकी दिसत्ये. आणि स्पष्ट आहे, कीं २क्ष+७० ही क्ष+५० हिजपेक्षां अधिक आहे. आतां १८३० यांचे पूर्वींचा समय पहा ह्मणजे १८३०−क्ष

तेव्हां ५०−क्ष. हें अचें वय होतें

३५−क्ष हें बचें वय होतें

तर ५०−क्ष = २(३५−क्ष)

अथवा ५०−क्ष = ७०−२क्ष

२क्ष−क्ष = ७०−५०

क्ष = २०

हें स्पष्ट खरें उत्तर आहे; कांकी १८३०–२०, अथवा १८१०, या समयांत अ याचे वयाचीं वर्षें ३० होतीं आणि ब याचे वयाचीं वर्षें १५ होतीं. यावरून दिसतें, कीं भळूनें कांहीं सांगीतलें सनाचा नंतरचा समय घेतला, तरही अशक्य रूपाची वजाबाकी होत्ये, ह्मणून त्याचे पूर्वींचा समय असावा हें खरें आहे, अथवा याचे उलटें ही.

२. कृत्य अ आणि ब यांचे परस्पर खातें आहे. त्याची स्थिती अशी आहे, कीं अ-चा खात्याची रकम त्यांचे परस्परांचे व्यवहारांत, ५०० रुपयांचे किमतीची व्हावयास, जें लागेल त्याचें अर्ध अला देऊन, आणि बला १०० रुपये देऊन, परस्परांचे खात्याचा फडशा केल्यानंतर, प्रत्येकाजवळ ऐवज बरोबर होईल. तर त्यांचें खातें कसें आहे?

शिलकबाकी, बला किंवा अला घेणें असेल. मनांत आण कीं अला घेणें आहे, आणि त्यास क्ष रुपये घ्यावयाचे, तर या व्यवहारापासून अचे जवळ ५००–क्ष, हे ५०० रुपयांचे किमतीचे बरोबर करतील, कांकीं

$$क्ष+(५००-क्ष)=५००$$

त्यांतील $\frac{१}{२}$ (५००–क्ष) एवढे अला दे. नंतर ब याणें शिलक बाकी पैका दिल्यावर, अ जवळ याप्रमाणें होईल

$$क्ष \frac{५००-क्ष}{२}$$

आतां, बला १०० रुपये मिळाल्यानंतर, अ यास क्ष रुपये शिलक बाकी द्यावे लागतील, ह्मणून, त्याजवळ (१००–क्ष) एवढे रुपये होतील. परंतु असें खातें चुकल्यावर प्रत्येकाजवळ ऐवज बरोबर होईल; यामुळें.

$$क्ष+\frac{५००-क्ष}{२}=१००-क्ष$$

(×) २ $$२क्ष+५००-क्ष=२००-२क्ष$$

अथवा $$२क्ष+५००-क्ष=२००-२क्ष$$

$$२क्ष+२क्ष-क्ष=२००-५००$$

अथवा $$३क्ष=२००-५००$$

ले पाहिजेत. परंतु यांतून केवळ अर्धे मिळायाचे, अथवा $\frac{१}{२}$(५०० + क्ष) यांतून बला क्ष रुपये दिल्यानंतर, त्याजवळ याप्रमाणें राहील

$$\frac{५०० + क्ष}{२} - क्ष$$

आतां बला १०० रुपये, आणि याशिवाय अ पासून शिलक बाकी क्ष रुपये एवढे मिळतात, यामुळें त्याजवळ १०० + क्ष रुपये होतील. असें झाल्यावर दोघांचा ऐवज बरोबर आहे.

म्हणून $$\frac{५०० + क्ष}{२} - क्ष = १०० + क्ष$$

(×) २ $$५०० + क्ष - २क्ष = २०० + २क्ष$$

$$२क्ष + २क्ष - क्ष = ५०० - २००$$

अथवा $$३क्ष = ३०० \quad आणि \quad क्ष = १००$$

यामुळें अ याणें बचे १०० रुपये शिलक बाकी देणें आहे.

३. **कृत्य.** कोणीएक वाटसरू रस्त्यानें पुढें चालत आहे, त्या रस्त्यावर, जागोजागीं निरनिराळ्ये अंतरानें दिक्‌दर्शन खांब* होते, त्यांतील कित्येक खांबावर उत्तर दिशा दाखविणाऱ्या, व कित्येकांवर दक्षिण दिशा दाखविणाऱ्या खुणा होत्या. तो वाटसरू पहिल्ये खांबाशीं पोंचल्यावर, त्या खांबावरचे दाखविल्ये खुणेप्रमाणें जात असतां, दुसरे खांबाशीं पोंचतो. याप्रमाणें पुढेंही. तो निघाल्यापासून उत्तरेकडे १६ मैल चालल्यावर तो पहिल्ये दिक्‌दर्शन खांबाशीं पोंचला, आणि **पहिले दिक्‌दर्शन खांबाशीं** पोंचल्यानंतर** बाकीचे प्रत्येक खांबाशीं चाल-

---

* कित्येक प्रांतांमध्यें रस्त्यावर जागोजागीं दगडी, किंवा लांकडी खांब असतात, आवर गांवोगांवचे रस्त्यांचा दिशा, व त्यांचीं अंतरें वाटसरूंस कळायासाठीं लिहिलीं असतात.

** पहा या कृत्यामध्यें पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यानंतर, त्याचे चालण्याची दिशा फिरत्ये किंवा नाहीं, हें कांहीं सांगितलें नाहीं.

ण्याची दिशा फिरत्ये असें त्यास कळलें; प्रत्येक दोन खांबांचें अंतर त्याचे पूर्वीचे खांबाचे अंतराचे दुप्पट आहे, आणि पांचव्ये खांबाशीं पोंचल्यावर, तो आपले निघाले स्थळापासून, उत्तर दिशेस, ८६ मैल दूर गेलों, हें ही त्यास कळलें. तर त्या खांबांची रचना आणि स्थिति कशी आहे.

उत्तरेकडे १६ मैल चालून, तो पहिल्ये खांबाशीं पोंचलो, परंतु तेथे, पोंचल्यावर, त्या दिशेस पुढें चालायाचें, किंवा मागें फिरायाचें, तें सांगीतलें नाहीं. मनांत आण कीं पुढें उत्तरे कडे चालायाचें आहे, आणि पहिल्या आणि दुसऱ्या खांबाचें अंतर दाखविण्यासाठीं क्ष घे, तर दुसऱ्या खांबाशीं पोंचल्यावर तो त्याचे पहिल्या स्थितीपासून १६ + क्ष मैल उत्तरेकडे होईल. दुसऱ्या खांबापासून तिसऱ्या खांबाशीं पोंचायास त्याला मागें दक्षिणे कडे २ क्ष मैल जावें लागतें. या कल्पनेपासून दोन पक्ष उत्पन्न होतात. जर २ क्ष, हे १६ + क्ष, यांपेक्षां उणें असतील, तर तिसरा खांब त्याचे निघालेल्या स्थळापासून उत्तरे कडेस १६ + क्ष − २ क्ष एवढे मैल होईल; परंतु जर २ क्ष हे, १६ + क्ष, यांपेक्षां अधिक असतील, तर तिसरा खांब, त्याचे निघाल्ये स्थळापासून दक्षिणे कडेस २ क्ष − (१६ + क्ष) मैल होईल. मनांत आण, कीं पहिला पक्ष आहे; तिसऱ्या खांबापासून चौथ्ये खांबाशीं पोंचावयास, त्याला उत्तरे कडे ४ क्ष मैल जावें लागतें, म्हणून चौथा खांब निघाल्ये स्थळापासून, उत्तरेकडे, १६ + क्ष − २ क्ष + ४ क्ष, इतके मैल आहे. चौथ्या खांबापासून, दक्षिणेकडे फिरून, ८ क्ष मैल चालल्यावर, पांचव्या खांबाशीं पोंचतो, १६ + क्ष − २ क्ष + ४ क्ष − ८ क्ष एवढे मैल पांचव्या खांबापावेतों तो चालला. हें अंतर, कल्पनेचे संकेताप्रमाणें, निघाल्या स्थळापासून उत्तरे कडे ८६ मैल असावें. यामुळें

$$१६ + क्ष - २ क्ष + ४ क्ष - ८ क्ष = ८६$$

अथवा $$८ क्ष - ४ क्ष + २ क्ष - क्ष = १६ - ८६$$

अथवा $$५ क्ष = १६ - ८६$$

यावरून, ही अशक्यरूप वजाबाकी आहे. आतां दुसऱ्यापक्षीनपासून पाहा, आ-

णि मनांत आण, कीं वाटसरू पहिल्या खांबाशीं पोंचल्यावर त्याची दिशा मागें फिरण्याची आहे, ह्मणून, त्याला दक्षिणेकडेस क्ष मैल जावें लागतें. जर क्ष हा १६ पेक्षां उणा असेल, तर दुसरा खांब, त्याचे निघाल्ये स्थळापासून उत्तरेकडे १६ – क्ष मैल होईल. जर क्ष, हा १६ पेक्षां अधिक असेल, तर दुसरा खांब, त्याचे निघाल्ये स्थळापासून दक्षिणेकडे, क्ष – १६ मैल, होईल. कृत्याचे संकेतावरून, या प्रमाणें समीकरण होईल

$$१६ - क्ष + २क्ष - ४क्ष + ८क्ष = ८६$$
$$८क्ष - ४क्ष + २क्ष - क्ष = ८६ - १६$$
$$५क्ष = ७०$$
$$क्ष = १४$$

यामुळें खांबांची स्थिति या पुढील प्रमाणें आहे.

दक्षिण ———————— उत्तर

(४)☞	+	(२)☞	☜(१)	☜(३)	(५)
२६		२	१६	३०	८६

वाटसरू निघाल्ये स्थळापासून, प्रत्येक खांबाचें अंतराचे मैल त्या त्या खांबाखालीं लिहिले आहेत.

मागील तीन कृत्यांतील खरीं आणि खोटीं समीकरणें, एकापुढें एक मांडून पाहिलीं असतां, पुढील प्रमाणें होईल:

१. कृत्य.

खोटें समीकरण, $५० + क्ष = २(३५ + क्ष)$ अथवा $क्ष = ५० - ७०$ वर्षें सन् १८३० याचे नंतर.

खरें समीकरण, $५० - क्ष = २(३५ - क्ष)$ अथवा $क्ष = ७० - ५०$ वर्षें सन् १८३० याचे पूर्वीं.

२. कृत्य.

खोटें समीकरण, $\frac{५०० - क्ष}{२} + क्ष = १०० - क्ष$ अथवा $क्ष = \frac{२०० - ५००}{३}$ ब याणें अला द्यावें.

खरें समीकरण, $\frac{५०० + क्ष}{२} - क्ष = १०० + क्ष$ अथवा $क्ष = \frac{५०० - २००}{३}$ अ याणें बला द्यावें.

३ कृत्य:

खोटें समीकरण, १६+क्ष−२क्ष+४क्ष−८क्ष=८६ अथवा क्ष=$\frac{१६-८६}{५}$ मैल उत्तरेकडे.

खरें समीकरण, १६−क्ष+२क्ष−४क्ष+८क्ष=८६ अथवा क्ष=$\frac{८६-१६}{५}$ मैल दक्षिणेकडे.

वरचे, आणि त्यासारिखे दुसरे उदाहरणापासून, ही पुढील गोष्ट स्पष्ट होत्ये:

काहीं समीकरणें उलगडल्यावर, जर क्षचा किमतींत अशक्यरूप वजाबाकी असेल, तर तें समीकरण आणि क्ष यांचा अर्थ हीं दोनीं समजांत आलीं नाहीं, असें जाणावें, तर त्यांस फिरवून तीं नीट केलीं पाहिजे.

१. समीकरणास खरें रूप द्यावयासाठीं, याप्रमाणें केलें पाहिजे, जा पदामध्यें क्ष नुसता एक वर्ण येतो, त्या प्रत्येक पदाचीं चिन्हें बदल कर.

जा समीकरणाचा पूर्वीं विचार झाला, तीं सर्व एक वर्ण समीकरणें आहेत, याजकरितां जा समीकरणामध्यें, क्षक्ष, क्षक्षक्ष, इत्यादि येतांत, त्यांविषयीं ही गोष्ट लागू नाहीं, असें शिकणारानें पक्कें ध्यानांत ठेवावें.

२. समीकरणाचे उत्तराला खरें रूप द्यावयासाठीं, याप्रमाणें केलें पाहिजे. अशक्यरूप वजाबाकीचीं पदें फिरवून, उलटी मांड, ह्मणजे असें ५०−७० हे, ७०−५० असे मांड, आणि जो गुण खोट्ये रीतीनें उत्तरामध्यें येतो, त्याचा उलटा अर्थ कर. असें जीं वर्षें नंतरचीं आहेत, तीं पूर्वीचीं असें मान; जो ऐवज घेणें आहे तो देणें असें मान; जा दिशेस जाण्याचें आहे, ती दिशा उलटी असें मान; याप्रमाणें पुढें ही. ह्मणून क्षचे किमतीचे कल्पनेविषयीं, कितीही पक्ष असोत, आणि जर त्यांतून एक पक्ष दुसऱ्याचे विरुद्ध आहे, तर त्या पक्षांतून, जर एकाचे उत्तरावरून क्षची किंमत अशक्यरूप वजाबाकी होत आहे, तर असें जाणावें, कीं दुसरा पक्ष स्वीकारायास योग्य आहे.

कृत्याचा अर्थ त्याचे शब्दावरून जो मनांत येतो, त्यामध्यें सर्व अर्थाची एकरूपता नसत्ये, असें वारंवार घडतें, ह्मणून, कोणतें ही कृत्य त्याचे केवळ सरळ शब्दाचे अर्थानें समजांत येत नाहीं, यामुळें कृत्यप्रश्नाचा अर्थ अधिक विस्तार रूपानें

जे, प्रथम कृत्यामध्ये असे शब्द आहेत कीं, ...
होण्याचा समय सांग. परंतु अचें वय बचे वयाचे दुप्पट कोणत्ये समयीं होईल? असे शब्द नाहींत. अशा शब्दानीं मनांत अशी कल्पना येत्ये, कीं, ही गोष्ट पुढें येण्याची आहे; परंतु समीकरणानें शोध केला असतां, असें कळतें कीं ही गोष्ट पूर्वीं घडून गेली; आणि प्रश्न अशे शब्दांनीं सांगीतला, ही चूक आहे. या प्रश्नाची खरी आणि खोटी सांगण्याची रीति खालीं लिहून दाखवितों.

खरीरीति	खोटी रीति
सन् १८३० यावर्षांत अचें वय ५० होतें आणि बयाचें वय ३५ होतें. तर अचें वय बचे वयाचे दुप्पट होण्याचा समय सांग	सन् १८३० या वर्षांत अचें वय ५० होतें. आणि ब याचें वय ३५ होतें. तर अचें वय बचे वयाचे दुप्पट केव्हां होईल?
उत्तर	उत्तर
सन् १८३० याचे पूर्वीं २० वर्षें अथवा सन् १८१० त	या पुढें कधीं ही होणार नाहीं; परंतु २० वर्षां पूर्वीं अचें वय बचे वयाचे दुप्पट होतें

वरचा प्रश्न या दोन ही रीतीनें सांगीतल्यानें, अशक्यरूप वजाबाकी होण्याची संभावना घडेल; परंतु पहिल्या तऱ्हेचे सांगण्यावरून, शिकणारापुढें मोघम प्रश्न टाकिला आहे, तेव्हां कदाचित् तो खोटा ही पक्ष स्वीकारील; आणि दुसरे तऱ्हेचे सांगण्यानें, अशक्यरूप वजाबाकी होण्याचें कारण हेंच, कीं कृत्याचे प्रश्नांत त्याच शब्दांचे सरळ अर्थावरून खोटा पक्ष शिकणाराचे मनांत सहज येतो.

कृत्यांत किती पक्ष आहेत हें बहुत करून सहज समजण्यांत येतें; परं-

$$३क्ष - १० = २क्ष - ८$$

$$३क्ष - २क्ष = १० - ८$$

$$क्ष = २$$

वरचे समीकरणाची सत्यता आणल्यावरून, असें दिसतें, कीं, त्याचे प्रत्येक बाजूस अशक्य वजाबाकी आहे, ह्मणजे ३क्ष−१० हे ६−१० आहेत, आणि २क्ष−८ हे ४−८ आहेत. याचे मागल्ये उदाहरणाविषयीं काहींजें लिहिलें आहे त्यानंतर या पक्षीं एथें फार सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. पुढें या समीकरणा सारिखें कृत्य सांगीतलें आहे: उत्तर अपूर्णांक असेल, तर त्याचे अंश आणि छेदांमध्यें अशक्य वजाबाकी जा कृतीनें येत्ये, त्या कृतींत वरचे सारिखी काहीं चूक असत्ये. जर अक्ष+ब =कक्ष+ड, हें या प्रमाणें उलगडलें ह्मणजे, अक्ष−कक्ष=ड−ब, अथवा $क्ष = \frac{ड-ब}{अ-क}$ असें रूप होतें, त्यानंतर असें कळतें, कीं अ हा कपेक्षां उणा आहे, आणि ड हा बपेक्षां उणा आहे, तर यापासून अशी सूचना होत्ये कीं, याचे उलगडण्याचे रीतींत चूक झाली, आणि नीट उलगडण्याची रीति हीच आहे, ह्मणजे कक्ष−अक्ष =ब−ड. वरची चूक केवळ कृतीचे क्रमांत आहे, आणि कृत्याचे कल्पनेंत कांहीं चूक नाहीं.

कृत्य. १३ या अंकाचे दोन भाग कर, अशे रीतीनें कीं, पहिल्या भागाची तिप्पट जितक्यानें दुसऱ्या भागाचे अर्धापेक्षां अधिक आहे, तितक्यानें पहिला भाग ४ यापेक्षां अधिक असावा.

असें सांगीतल्यावरून, जर पहिला भाग क्ष असेल, तर हें पुढील समीकरण होतें.

$$३क्ष - \frac{१३-क्ष}{२} = क्ष - ४.$$

यास उलगडून, क्ष=१ निघतो, यामुळें १३चे दोन भाग, १ आणि १२ असावे. परंतु

अशी तऱ्हेनें हें कृत्य अशक्य आहे, कांकीं पहिल्याची तिप्पट दुसऱ्याचे अर्धापेक्षां अधिक नाहीं. परंतु कृत्यामध्यें सर्व ठिकाणीं, अधिक या शब्दाचेस्थळीं, उणें मांडिलें, तर या पुढील प्रमाणें समीकरण होईल,

$$\frac{१३-क्ष}{२}-३क्ष=४-क्ष$$

या समीकरणाचें उत्तर पूर्वीचे समीकरणाचे बरोबर आहे, ह्मणजे, क्ष=१, आणि कृत्य शक्यरूप आहे; कांकीं ३क्ष अथवा ३ हे, $\frac{१}{२}$(१३-क्ष), अथवा ६, यापेक्षां जितक्यानें उणे आहेत तितक्यानें क्ष अथवा १, हा ४ पेक्षां उणा आहे.

आतां विचार केला पाहिजे, कीं समीकरणास उलगडून उत्तर सत्यरूप धरितें, परंतु त्या उत्तरानें तपासून, समीकरणाचा असत्यपणा प्रघट होतो, तर ही गोष्ट कशी घडत्ये? आणि जोंपर्यंत समीकरणास उत्तरानें तपासून त्याची सत्यता स्थापिली जाई, तोंपर्यंत कोणतें ही उत्तर त्याला स्थापीत नाहीं, असें समजावें कीं काय? वरचा उलट्या विषयाचें पहिलें रूप पहा. समीकरण हेंच आहे.

$$३क्ष-१०=२क्ष-८$$

याचें उत्तर क्ष=२. हें समीकरणांत लावलें असतां,

$$६-१०=४-८$$

समीकरणाचे उलगडण्याचे रीतीवरून हीच गोष्ट घडत्ये कीं, या पुढील दोन समीकरणाचें उत्तर एकच आहे:

$$३क्ष-१०=२क्ष-८$$

$$१०-३क्ष=८-२क्ष$$

ही गोष्ट कशी घडत्ये, हें या पुढील उदाहरणापासून दाखविलें जाईल:

$$अक्ष-ब=कक्ष-ड \qquad ब-अक्ष=ड-कक्ष$$

$$अक्ष-कक्ष=ब-ड \qquad ब-ड=अक्ष-कक्ष$$

$$क्ष=\frac{ब-ड}{अ-क}$$ हें दोहोंचें उत्तर आहे.

यावरून, जेव्हां अशा उलट्या जातीचा विषय आढळतो, तेव्हां असें जाणावें कीं कृत्याचे पहाण्याचे शुद्ध रीतीची उलटी समजून आहे, परंतु अशे उलटे स-

मजुतीपासून उत्तरामध्यें कांहीं फेर पडत नाहीं.

४ उलटाविषय.

उदाहरण.

अक्ष+ब=कक्ष+ड यास उलगडण्यानें

$$क्ष=\frac{ड-ब}{अ-क}$$

उलगडल्ये समयीं दृष्टी चुकून, असें जरी घडलें, कीं अ=क अथवा अ−क=०, तेव्हां या पुढील रूपाचें उत्तर सांपडलें जाईल,

$$क्ष=\frac{ड-ब}{०}$$

असें उत्तर समजायाजोगें नाहीं; कांकीं ड−ब यामध्यें ० किती वेळा जातें असे प्रश्नास कांहीं उत्तर देववत नाहीं. जर कांहीं उत्तर दिलें, तर तें हेंच आहे, कीं शून्य कितीही वेळा वारंवार घेतलें, तथापि कांहीं होत नाहीं; यामुळें ड−ब या बरोबर होण्यासाठीं, ० वारंवार घेतलें, तरी पुरत नाहीं. समीकरणावर पुनः लक्ष्य ठेवः जर अशी कल्पना केली, कीं अ=क, तर अक्ष=कक्ष होईल; ह्मणून, जेव्हां ब=ड, तेव्हां हें समीकरण नेहेमी खरें आहे; परंतु ब आणि ड बरोबर नसले, तर हें समीकरण, कधींही, खरें होऊं सकत नाहीं. परंतु जा कृत्यापासून अशी जातीचीं समीकरणें उत्पन्न होतात, त्या कृत्याचा उलगडा करितानां, ही पुढील रीती कामांत आणिली जाईल. त्या रीतीची सत्यता स्पष्ट आहे.

वरचे समीकरणामध्यें, अशी कल्पना केली कीं, अ=क, ह्मणून अशी तऱ्हेचे कल्पनेपासून, जर, चालत्ये रीतीचीं उत्तरें समजायाजोगीं नसतील, तर अ हा केवळ कचे बरोबर करूं नये, परंतु फारकरून जवळ जवळ करून, उलगडून, त्याचें उत्तर पहाः नंतर अ पूर्वीपेक्षां कचे किमतीचे अधिक, जवळ जवळ, आहे असें मनांत आण, याप्रमाणें पुढें. या वेगळाले उत्तरावरून अ=क अशी कल्पनेचे उत्तराचा खरा अर्थ आहे कीं नाहीं, हें समजण्यांत येईल. जामध्यें अशी अवघड गोष्ट येत्ये, त्या जातीचें कृत्य तपासून पहातों.

कृत्य. व्यापाराच्या तीन मंडळ्या आहेत, आणि त्यांतल्ये एकेक मंडळीचा

४०००, ५०००, आणि ९००० याप्रमाणें पांत्या आहेत, ह्या तीन मंडळ्यांचा व्यापार एकदांच बंद झाला असतां. ते आपआपल्या पांत्यांविषयीं वांटे बरोबर करतील; परंतु जर दुसऱ्यांत प्रत्येक पांतीदारानें आपआपले पांतीविषयीं, मंडळीचे पुंजीला १० रुपये प्रमाणें अगाऊ पैसा भरला असेल, आणि त्याप्रमाणें तिसऱ्यांत प्रत्येक पांतीदारानें १२ रुपये प्रमाणें अगाऊ दिले असतील, तर बंद होत्येसमयीं पहिले आणि दुसरे मंडळीच्या ऐवज, एकत्र मिळून, तिसऱ्ये मंडळीचे ऐवजाचे बरोबर होईल; असें झालें, तर प्रत्येक मंडळींतल्ये, प्रत्येक पांतीचे वांट्यास काय मिळेल?

प्रत्येक पांतीचे वांट्याचे रुपये दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तेव्हां, कल्याचे कल्पने प्रमाणें अगाऊ पैका भरल्यावर, ह्यातीन मंडळ्यांनी आपआपल्या पांतीदारास, पांतीचा वांटा याप्रमाणें देऊं सकतात, ह्मणजे पहिली मंडळी, एकएक पातीस, क्ष रुपये देऊं सकेल, दुसरी मंडळी, क्ष+१० रुपये, देऊं सकेल, आणि तिसरी मंडळी, क्ष+१२ रुपये, देऊं सकेल; तर वेगळाल्ये मंडळीचे पांतीची संख्या नजरेंत आणून, या वरचे कल्पनेनें ४००० क्ष, ५००० (क्ष+१०), आणि ९००० (क्ष+१२), हे त्यांचे वेगवेगळाले ऐवज आहेत: तर कल्याचे शेवटील, संकेताप्रमाणें, हें पुढील समीकरण होतें

$$४०००\,क्ष+५०००\,(क्ष+१०) = ९०००\,(क्ष+१२)$$

$$(\div)\,१००० \qquad ४\,क्ष+५\,(क्ष+१०) = ९\,(क्ष+१२)$$

$$अथवा \qquad ९\,क्ष+५० = ९\,क्ष+१०८$$

या कलमामध्यें उलटे विषयाविषयीं जी गोष्ट सांगीतली ती उलटेपणा यांत दिसतो ७६ आणि ७७व्ये दृष्टांवर जी गोष्ट सांगीतली, कीं कल्याचे शब्दांचा अर्थ बरोबर समजला नसेल, ही गोष्ट या उदाहरणाचे अशक्यतेविषयीं लावतां येत नाहीं, कांकीं अशा गोष्टीवरून, अशी कल्पना केली पाहिजे, कीं व्यापार बंद होण्याचे समयीं, तिन्हीं मंडळ्या नादार आहेत, आणि प्रत्येक पांतीविषयीं कर्जदारही आहेत; अशी कल्पना केली असतां, प्रत्येक पांतीचें कर्ज दाखविण्यासाठीं

क्ष घे; तर पूर्वी पाहिल्याप्रमाणें, शेवटचें समीकरण या पुढील प्रमाणें होईल. शिकणारानें यास मांडून उलगडून पहावें.

$$५० - ९क्ष = १०८ - ९क्ष$$

हेंही समीकरण पूर्वीप्रमाणेंच अशक्य आहे. तर आतां, वर सांगीतल्या वरून, कृत्याचे संकेतामध्यें, किंचित् भेद करून, त्याचें उत्तर पहा. अशी कल्पना कर, कीं तिसऱ्ये मंडळीत ९००० एवढ्या पांत्या नाहींत, परंतु केवळ ८९९९ पांत्या आहेत. अशी कल्पना केली असतां, समीकरण या प्रमाणें होईल.

$$४०००क्ष + ५००० (क्ष + १०) = ८९९९ (क्ष + १२)$$

अथवा $४०००क्ष + ५०००क्ष + ५०००० = ८९९९ क्ष + १०७९८८$

अथवा $४०००क्ष + ५००० क्ष - ८९९९क्ष = ५७९८८$

अथवा $क्ष = ५७९८८$

यामुळें उत्तर हेंच, कीं आरंभीं प्रत्येक मंडळी, पांती प्रमाणें, ५७९८८ इतके रुपये देऊं शकली. आतां वरपेक्षां अणखी थोडा भेदकर, आणि अशी कल्पना धर, कीं तिसऱ्या मंडळीचा ९००० पांत्यांमध्यें, केवळ एक पांतीचा एक शंभरांश कमी आहे, म्हणजे, असें समजावें कीं त्या मंडळीत $८९९९\frac{९९}{१००}$ इतक्या पांत्या आहेत. तर समीकरण याप्रमाणें होईल.

$$४०००क्ष + ५००० (क्ष + १०) = ८९९९\frac{९९}{१००} (क्ष + १२)$$

$$४०००क्ष + ५०००क्ष + ५०००० = ८९९९\frac{९९}{१००}क्ष + ८९९९\frac{९९}{१००} \times १२$$

$$४०००क्ष + ५०००क्ष - ८९९९\frac{९९}{१००}क्ष = ८९९९\frac{९९}{१००} \times १२ - ५००००$$

$$\frac{१}{१००}क्ष = \frac{८९९९९९}{१००} \times १२ - ५००००$$

$(\times)१००$ $$क्ष = ८९९९९९ \times १२ - ५००००००$$

$$क्ष = ५७९९९८८$$

अथवा, प्रत्येक मंडळी दर पांतीस ५७९९९८८ इतके रुपये देऊं शकत्ये. अशाच रीतीनें, जर तिसऱ्ये मंडळीचा $८९९९\frac{९९९}{१०००}$ इतक्या पांत्या असल्या, तर, समीकरणापासून वरपेक्षां अधिक मोठें उत्तर निघेल, आणि याप्रमाणें पुढें ही. ४००० आणि ५०००

पांत्याचे मंडळ्यांतील एकाची पांती वाढविली असतां, वर सांगितल्याप्रमाणें उत्तरें येतील. यामुळें, वरचे प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे, कीं प्रश्नाचे संकेत स्थापायासाठीं, कितीही मोठे अंक घेतले, तरी संकेतास पुरत, असे होत नाहीं; परंतु संकेतामध्यें किंचित् फेर केला असतां, उत्तर सांपडलें जाईल, आणि तो फेर जसा जसा कमी कमी केला जाईल, तसे तसे उत्तराचे अंक अधिक वाढत जातील. बीजगणित लागू केल्यानें, वर सारिखे उलटे विषय उत्पन्न होतात, ते कळायासाठीं, एथे वरचें कृत्य घेतलें आहे. तर आतां ही गोष्ट सोडून देऊन वरचे सारिखे समीकरणाचा काहीं विचार करितों.

उदाहरण.

$$अक्ष = बक्ष + क$$

यास उलगडून $$क्ष = \frac{क}{अ-ब}$$

यांत, अ = ब असें झालें, तर उत्तर $\frac{क}{०}$ होईल. हें समजायाजोगें नाहीं, आणि समीकरण अशक्य आहे. कांकीं त्याचें हें पुढील रूप होतें,

$$अक्ष = अक्ष + क$$

परंतु जर ब पेक्षां अ अति लहान परिमाणानें मोठा असला, तर तें समीकरण आणि त्याचें उत्तर, हीं दोन्हीं खरीं होतील. तें लहान परिमाण दाखविण्यासाठीं $\frac{१}{म}$ हें घे, तर समीकरण याप्रमाणें होईल,

$$\left(ब + \frac{१}{म}\right) क्ष = बक्ष + क$$

अथवा $$बक्ष + \frac{क्ष}{म} = बक्ष + क$$

(–) बक्ष $$\frac{क्ष}{म} = क$$

(×) म $$क्ष = मक$$

ही क्षची किंमत वरचे उत्तरापासून ही निघेल, कांकीं

$$क्ष = \frac{क}{अ-ब} = \frac{क}{\frac{१}{म}} = मक$$

अ हा ब पेक्षां काहीं लहान परिमाणानें अधिक करायासाठीं $\frac{१}{म}$ हा

लहान असला पाहिजे, म्हणून, म हा मोठा असला पाहिजे; या रीतीनें एक समीकरण उत्पन्न होईल, ज्याचें उत्तर इच्छेप्रमाणें मोठें होईल. उदाहरण, क=१ असें घे; आणि मनांत आण, कीं वरच्ये रूपाचें समीकरण पाहिजे, ज्याचें उत्तर १०००००० इतकें होईल. म = $\frac{१}{१००००००}$ असें घे. तर क्ष = १०००००० असें उत्तर या पुढच्ये सारिख्ये समीकरणापासून निघेल.

$$७\frac{१}{१००००००}\text{क्ष} = ७\text{क्ष} + १$$

जरी एकादा अंक समीकरणास बरोबर स्थापीत नाहीं, तरी तो त्यास जवळ जवळ स्थापील, अशी कल्पना करितां येत्ये. परंतु जवळ जवळ, हा शब्द मोघम अर्थाचा आहे, यासाठीं आपले कामास पडत नाहीं, हें दाखविण्यासाठीं हें पुढें उदाहरण देतों. मनांत आण कीं, ७ क्ष=५क्ष+२ याप्रमाणें समीकरण आहे. क्ष=१ असें असलें तर शोधून पहा कीं, अशे किमतीनें, वरच्यें समीकरण स्थापिलें जातें कीं नाहीं ? तो अंक समीकरण स्थापीत नाहीं; कांकीं क्ष=१, तर समीकरणाची एक बाजू ७ आहे, आणि दुसरी बाजू ५ आहे; म्हणून पहिली बाजू दुसऱ्ये बाजूचे बरोबर नाहीं, परंतु २ इतक्यानें त्यापेक्षां अधिक आहे. तसेंच उत्तर, तशेंच शब्दांनीं या पुढील समीकरणास लागतें.

७क्ष=५क्ष+१९९८. यांत, क्ष=१००० असें कल्पून, त्याणें समीकरण स्थापिलें जातें कीं नाहीं हें पहा. एणेंकरून समीकरणाची पहिली बाजू ७००० होत्ये, आणि दुसरी बाजू ६९९८ होत्ये. जेव्हां क्ष=१, हा पहिले समीकरणास जितके जवळजवळ स्थापितो, तितके क्ष=१००० हे दुसऱ्ये समीकरणास जवळजवळ स्थापितात, असें म्हणतां येतें कीं काय ? ७००० हे ६९९८ यांचे जितके जवळ आहेत, तितके ७ हे ५ यांचे जवळ होतील कीं काय ? अंकांचीं अंतरें मात्र पाहिलीं असतां, होय असें उत्तर देतां येतें, कांकीं

$$७ - ५ = २$$

$$७००० - ६९९८ = २$$

परंतु जवळ जवळ* हे शब्द सरळ अर्थानें समजले असतां, असें बोलवेल, कीं ७ आणि ५ हे जितके परस्पर जवळ आहेत, त्यांपेक्षां ७००० आणि ६९९८ हे दोन परस्पर अधिक जवळ जवळ आहेत. पहिल्ये पक्षीं ७ इतके लहान अंकांत २ अंतर निघालें; दुसऱ्या पक्षीं ७००० इतके मोठ्ये अंकांत ही २ अंतर निघालें, परंतु जवळ जवळ, या शब्दांचा अर्थ वर सांगीतल्या प्रमाणें, लक्षांत घेऊन, क्षची किंमत लहान असेल, त्यापेक्षां जेव्हां ती किंमत मोठी असेल, तेव्हां अक्ष आणि अक्ष+क हे अधिक जवळ जवळ होतील, याविषयीं पुढें विचार करूं. तर अशा अर्थानें असें ह्मणतां येतें कीं, जेव्हां एकादे कृत्यावरून असें समीकरण निघतें. ह्मणजे

$$अक्ष = अक्ष + क$$

तेव्हां त्याचें उत्तर हेंच आहे, कीं अशा कृत्याचे उत्तरास कोणताही अंक, कसा ही मोठा असला, तरी पुरत नाहीं. परंतु जितका जितका अंक मोठा असेल, तितके तितके उत्तर जवळ जवळ येईल.

सरळ रीतीनें वरचें समीकरण उलगडल्यानें, या पुढील प्रमाणें उत्तर निघतें.

$$क्ष = \frac{क}{अ - अ} \text{ अथवा } \frac{क}{०}$$

$\frac{क}{०}$ याचा अर्थ **अनंत अंक** आहे, आणि यामुळें समीकरणाचें उत्तर **अनंत मोठें** आहे, असें ह्मणण्याची चाल आहे. अशा बोलण्याचा चाली शब्दाचे मूळ अर्थानें समजत नाहीं, कांकीं अनंत मोठा, अशा अंकाचा बोध होऊं शकत नाहीं. ह्मणजे असा अंक एवढा मोठा, किं तो गणायास किंवा मोजायास येत नाहीं, परंतु अनंत, हा शब्द बहुत करून कामांत आणितात; यास्तव या पुढील सांगीतल्या अर्थानें हा शब्द स्वीकारितों :

क = ० असलें तर $\frac{१}{क}$ अनंत आहे. असें ह्मटलें असतां, असें समजावें कीं.

---

* साटें करत्येसमयीं ६९९८ रुपये, यत्किंचित् अंतरानें, ७००० यांचे बरोबर असें मानण्यांत येईल. परंतु कांहीं वस्तू ५ रुपयांचे किमतीनें घेतली, तशीच वस्तू ७ रुपयांचे किमतीनें घेतली, तर फार महाग दिसेल.

ही पुढील गोष्ट सांगण्याचे संक्षेपरीती वाचून, यांत दुसरा कांहीं अर्थ नाहीं. जेव्हां क लहान आहे, तेव्हां $\frac{१}{क}$ मोठा आहे; जर क अधिक लहान होईल तर $\frac{१}{क}$ अधिक मोठा होईल, आणि याप्रमाणें पुढेंही; ह्मणून क, हवा तेवढा लहान केला असतां, $\frac{१}{क}$ हा, दुसरा कोणता अंक कसाही मोठा दिलेला असेल, त्यापेक्षां अधिक करितां येतो. आणि जेव्हां असें ह्मणतों कीं कृत्याचें उत्तर अनंत आहे, तेव्हां असें समजावें, कीं प्रश्नाचे संकेत स्थापायासाठीं कोणताही अंक, कितीही मोठा असला, तरी पुरेसा होत नाहीं; परंतु कोणताही मोठा अंक जवळजवळ पुरतो, त्यापेक्षां अधिक मोठा अंक, अधिक जवळजवळ पुरतो, आणि याप्रमाणें पुढेंही; ह्मणून यद्यपि कृत्याचे उत्तराचा खरेपणा बरोबरच निघत नाहीं, तथापि यथेच्छ मोठा अंक घेतल्यानें, उत्तर इच्छेप्रमाणें खरेपणाचे जवळ जवळ येईल.

५ उलटा विषय.

उदाहरण.

अक्ष + ब = कक्ष + ड यास उलगडण्यानें

$$क्ष = \frac{ड - ब}{अ - क}$$

आतां पूर्वींचे विषयाप्रमाणें, या समीकरणाचें उलगडणें झाल्यानंतर असें जरी घडेल कीं, अ बरोबर क, आणि याशिवाय ब बरोबर ड, अशी कल्पना करण्याची गरज पडेल, तर उत्तर

$\frac{ड - ब}{अ - क}$ हें, $\frac{०}{०}$ असें मांडिलें पाहिजे.

यांत कांहीं अर्थ नाहीं. तर समीकरणाकडे लक्ष्य लावलें असतां, क्ष याला कांहीं निश्चित किंमत देण्याचें प्रयोजन नाहीं, असें दिसतें; कां कीं, जर अ = क, आणि ब = ड, तर क्ष ची कशी ही किंमत असली, तर अक्ष + ब = कक्ष + ड आहे. यामुळें प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे; कीं क्ष ला कशी ही किंमत दिली, तरी समीकरणाचे संकेत स्थापिले जातात. ही गोष्ट या पुढील उदाहरणावर लावून दाखवितों

कृत्य. असा कांहीं अंक आहे कीं काय, कीं, तो अंक एकाने उणा करून अ वेळा घेतला, आणि तोच अंक दोहोंनी अधिक करून ब वेळा घेतला, या दोहोंची बेरीज, तो-

त्व अंक क वेळा घेतला, याचे बरोबर होईल; अ, ब, क, हे व्यक्त अंक, पूर्ण किंवा अपूर्ण असोत?

इच्छिला अंक क्ष बरोबर आहे, असें मनांत आण, तर

$$अ(क्ष-१)+ब(क्ष+२) = कक्ष$$
$$अक्ष-अ+बक्ष+२ब = कक्ष$$
$$अक्ष+बक्ष-कक्ष = अ-२ब$$
$$(अ+ब-क)क्ष = अ-२ब$$
$$क्ष = \frac{अ-२ब}{अ+ब-क}$$

ताळा.

$$क्ष-१ = \frac{क-३ब}{अ+ब-क} \qquad अ(क्ष-१) = \frac{अक-३अब}{अ+ब-क}$$
$$क्ष+२ = \frac{३अ-२क}{अ+ब-क} \qquad ब(क्ष+२) = \frac{३अब-२बक}{अ+ब-क}$$
$$अ(क्ष-१)+ब(क्ष+२) = \frac{अक-२बक}{अ+ब-क} = \frac{क(अ-२ब)}{अ+ब-क}$$
$$= क\times\frac{अ-२ब}{अ+ब-क} = कक्ष$$

कल्पना कर, कीं अ = ८, ब = ४, क = १२, असें असेल, अथवा कृत्य पुढील प्रमाणें असेल: तो अंक काय आहे, कीं त्यास एकानें उणा करून बाकी ८ नी गुणिली, तो गुणाकार, आणि त्याच अंकास २ मिळवून ती बेरीज ४ होंनी गुणिली या दोहोंची बेरीज त्या इच्छिले अंकाचे १२ पट होईल? यांत असें दिसतें, कीं अ-२ब=०, आणि अ+ब-क=०; तर यावरून वरचें उत्तर हेंच रूप धरितें, $\frac{०}{०}$: हें असें उत्तर कसें घडतें, तें समजायासाठीं हा पक्ष तपासून पहातां हें पुढील समीकरण येतें

$$८(क्ष-१)+४(क्ष+२) = १२क्ष$$
$$८क्ष-८+४क्ष+८ = १२क्ष$$
$$१२क्ष = १२क्ष$$

ही गोष्ट नेहेमी अशी खरी आहे, यामुळें वरचे सारिखे प्रश्नाला हेंच उत्तर, कीं हरएक पूर्ण किंवा अपूर्णांक, जो १ पेक्षां मोठा आहे, तो कृत्याचे संके-

त स्थापितो; $\frac{०}{०}$ या रूपास जो अर्थ देण्याची कल्पना केली होती, त्यासारिखें हें उत्तर आहे.

समीकरणाच्या रीतीविषयीं आणि त्याचे मूळपीठिकेविषयीं ज्या गोष्टी वर सांगीतल्या, त्यांच्या साह्याने, आतां कांहीं कृत्यें उलगडितों. पदार्थविज्ञानाचे निरनिराळ्ये भागांतून उदाहरणें घेतलीं जातील, तीं अनुक्रमाने वेगवेगळ्या भागांत मांडिलीं जातील, आणि ज्या अनुभविक गोष्टीवरून उलगडणें होतें, त्या गोष्टी प्रत्येक भागाच्या आरंभीं सांगीतल्या जातील.

उदाहरणें, १ भाग. स्पिसिफिक् ग्राविटीविषयीं.* कांहींएक पदार्थाची स्पिसिफिक् ग्राविटी ह्मणजे पदार्थाचें आकारमान तितकेंच पाण्याचे आकारमाना बरोबर असेल, तर त्या पाण्याचें वजन जितके वेळा पदार्थाचे वजनांतून जातें, त्यास त्या पदार्थाची स्पिसिफिक् ग्राविटी ह्मणतात. जसें, इटेची स्पिसिफिक् ग्राविटी दोन आहे, असें ह्मटलें तर त्याचा अर्थ हाच, कीं इटेचें आकारमान एक घनफूट असलें, तर, त्याचें वजन एक घनफूट पाण्याचे वजनाचे दुप्पट आहे असें जाणावें. पाण्याचे घनफुटीचें वजन सुमारें १००० आवारड्युपाईसचे† औंसांबरोबर आहे.

१ कृत्य. दुधाची स्पिसिफिक् ग्राविटी १·०३ आहे, तर एक पैंट पाणी तीन पैंट दुधांत मिळविलेलें असतां त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी काय आहे?

जर एक पैंट पाण्याचें वजन किती औंस आहे, हें दाखविण्यासाठीं म घे-

---

* स्पिसिफिक् ग्राविटी, हे दोन इंग्रेजी शब्द आहेत, यांचा अर्थ संबंधी वजन, ह्मणजे दोन समान आकाराचे जे दोन पदार्थ, त्यांचा परस्पर वजनाचा संबंध. या इंग्रेजी शब्दांचे बरोबर भाषांतर होण्यास कठीण. यामुळें इंग्रेजी शब्दच कामांत घेतले आहेत, आणि त्यांचा अर्थ वर सांगीतले गोष्टीवरून लवकरेनें मनांत येईल.

† पदार्थविज्ञानाविषयीं वजनाची कांहीं गोष्ट आली, तर इंग्लिश वजनें कामांत घेतलीं पाहिजेत; त्यांचे सर्व कोष्टक अंकगणित पुस्तकांत दाखविले आहेत, आणि पढण्याकरितां हे कोष्टक या ग्रंथाचे शेवटीं लिहिले आहेत.

तला, तर दुधाचें एक पैंटाचें वजन १·०३×म इतके औंस होतील, तर त्या सर्व चार पैंटांचें मिश्राचें वजन म+(१·०३म)३, अथवा म+३·०९म औंस, याजबरोबर आहे, परंतु पाण्याचें चार पैंटाचें वजन ४म औंस आहे; यास्तव. वरची अनुभविक गोष्ट सांगीतल्यावरून, मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी याप्रमाणें आहे.

$$\frac{म+३\cdot०९म}{४म} = \frac{४\cdot०९म}{४म} = \frac{४\cdot०९}{४} = १\cdot०२२५$$

सोपें पडण्याकरितां या उदाहरणांत म असें एक परिमाण घेतलें, परंतु तें उलगडण्याची कृती केल्यानें उडून जातें. हें उदाहरण इतकें सोपें आहे कीं त्याला समीकरण रूप देऊन उलगडण्याचें प्रयोजन नाहीं.

२ कृत्य. कांहीं एका पदार्थाचे म घनफुट आहेत, आणि त्याची स्पिसिफिक् ग्राविटी अ आहे, तर दुसऱ्या कांहीं ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचे न घनफुट त्यांत मिळविले, तर त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी काय होईल?

स्पष्ट दिसतें कीं मिश्राचें म+न घनफुटींचें वजन पाण्याचें मअ+नब घनफुटींचे वजना बरोबर होईल. यामुळें मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी $\frac{मअ+नब}{म+न}$ याजबरोबर होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरण. $\frac{मअ+नब}{म+न}$ हे अ आणि ब यांचे मध्यें अवश्य आहेत असें सिद्ध करून दाखीव.

३ कृत्य. १० स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा २० घनफुटी आहेत, त्याशीं २ स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थाचा किती घनफुटी मिळवाव्या, कीं त्या मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी ५ होईल?

त्या पदार्थाचा इच्छिल्या घनफुटी दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर २०+क्ष या सर्व मिश्राचा घनफुटींचें वजन, २०×१०+क्ष×२, अथवा २००+२क्ष इतक्या पाण्याचे घनफुटीचे वजना बरोबर आहे. यामुळें मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी $\frac{२००+२क्ष}{२०+क्ष}$ या बरोबर होईल. आणि,

$$\frac{२००+२क्ष}{२०+क्ष} = ५, \text{अथवा}, २००+२क्ष = ५\ (२०+क्ष) \therefore क्ष = ३३\tfrac{१}{३}.$$

वरचे उदाहरणावरून सर्व साधारण रीति. ब स्पिसिफिक् ग्राविटी-चे पदार्थाचा म घनफुटी आहेत, तर त्यास अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा किती घनफुटी मिळवाव्या, कीं मिश्राची स्पिसिफिक ग्राविटी क होईल?

दुस्र्‍या पदार्थाचा घनफुटी दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर अ चे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा क्ष घनफुटी, पाण्याचे अ क्ष घनफुटीचे वजना बरोबर होतील, आणि ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म घनफुटी, पाण्याचे ब म घनफुटीचे वजना बरोबर होतील. यावरून मिश्राचा म + क्ष घनफुटी पाण्याचे बम + अक्ष घनफुटींचे वजना बरोबर होतील. ह्मणून, वरचे विशेष उदाहरणा प्रमाणें,

$$\frac{बम + अक्ष}{म + क्ष} = क \qquad बम + अक्ष = क(म + क्ष)$$

$$बम + अक्ष = कम + कक्ष$$

$$\therefore\ बम - कम = कक्ष - अक्ष \text{ अथवा } (ब - क)म = (क - अ)क्ष$$

$$क्ष = \frac{ब - क}{क - अ} \cdot म$$

यांत जर ब हा क पेक्षां अधिक आहे, आणि क हा अ पेक्षां अधिक आहे; ह्मणजे, जेव्हां ब - क आणि क - अ हीं दोन शक्यरूप आहेत, तर हें उत्तर खरें आहे. आणि ब - क आणि क - अ हीं दोन अशक्य रूप असतां ही हें उत्तर खरें; कांकीं, या पक्षीं, जो खोटेपणा दृष्टीस येतो तो या पुढील उलट्ये मांडण्यानें झाला, ह्मणजे

$$बम + अक्ष = कम + कक्ष$$

याची खरी मांडण्याची रीति $कम - बम = अक्ष - कक्ष$ अशी आहे.

परंतु चुकून त्याचे जागीं $बम - कम = कक्ष - अक्ष$ असें मांडलें गेलें.

तर खरें उत्तर याप्रमाणें आहे, $क्ष = \frac{क - ब}{अ - क} \cdot म$. यापक्षीं क पेक्षां अ अधिक, आणि ब पेक्षां क अधिक आहे. ह्मणजे, जेव्हां क हा अ आणि ब या दोहोंचे मध्यें आहे, तेव्हां हें कृत्य शक्यरूप आहे. जर क हा अ आणि ब या दोहोंचे मध्यें नसला, तर, ७० आणि ७१ व्ये पृष्ठावर जी रीति दाखविली, त्याप्रमाणें क्षचा जो पहिला अर्थ कल्पिलेला होता, त्यास अगदीं उलटा फिरवून, शक्यरूपाचें

कृत्य होतें; ह्मणजे, जर अशी कल्पना केली, कीं ब चे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म घनफुटी यांतून अचे स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ वजा होतो, अथवा जर अशी कल्पना केली, कीं त्या ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे पदार्थामध्यें अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ पूर्वींच मिश्रित आहे तेव्हां खरे रूपाचें कृत्य होतें. ही गोष्ट या पुढील कृत्यास उलगडल्याने समजांत येईल: प्रश्न. ब स्पिसिफिक् ग्राविटीचे, म घनफुटींतून अ स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती वजा केला पाहिजे, असें कीं बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल? क हा अ आणि ब या दोहोंपेक्षां जसजसा अधिक किंवा या दोहोंपेक्षां कमी असेल, तसतसें या पुढील प्रमाणें उत्तर होईल.

$$क्ष = \frac{क - ब}{क - अ} \cdot म \qquad अथवा \qquad क्ष = \frac{ब - क}{अ - क} \cdot म$$

परंतु पूर्वी जो उलटा विषय दाखविला त्या सारिखाच या वरचे उदाहरणावरून निघेल. उदाहरण, असें मनांत आण कीं ब (=६) अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचा म (=२०) घनफुटींतून अ (=१०) अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचा पदार्थ किती वजा केला पाहिजे, असें कीं बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी, क (=१२) होईल? हें कृत्य दाखवायासाठी ७७ घे. एथे, जरी कृत्य अशक्यरूप असें उघड दिसतें, तरीं उत्तर शक्यरूप होईल, ह्मणजे,

$$क्ष = \frac{क - ब}{क - अ} \cdot म = \frac{१२ - ६}{१२ - १०} \cdot २० = \frac{६}{२} \cdot २० = ६०$$

उत्तराचे रूपावरून, याचा अशक्यपणा ओळखला जात नाहीं, परंतु कृत्यावर चांगला विचार केला असतां दिसण्यांत येईल, कीं याशीं उत्तर असंगत आहे; कांकीं ६० घनफुटी २० घनफुटींतून काढायास अशक्य. जा समीकरणावरून असें उत्तर सांपडतें तें हेंच आहे.

$$\frac{१२० - १०क्ष}{२० - क्ष} = १२ \quad अथवा \quad १२० - १०क्ष = २४० - १२क्ष$$

यांत, उत्तर क्ष = ६० असें असतां, ७९ व्ये पृष्ठांतल्ये तिसरे उलटे विषया प्रमाणें घडतें. ८० व्ये पृष्ठावरचे गोष्टीवरून, या समीकरणास नीट करून, याप्रमाणें होईल.

१०क्ष−१२० = १२क्ष−२४० अथवा $\frac{१०क्ष−१२०}{क्ष−२०}$ = १२

हें उत्तर या पुढील कृत्यावरून निघतें: अ (=१०) या स्पिसिफिक् ग्राविटी-च्या पदार्थ किती असावा कीं जाणून, ब (=६) स्पिसिफिक् ग्राविटीचे म (=२०) घनफुटी वजा केल्या असतां, बाकीचाची स्पिसिफिक् ग्राविटी क (=१२) बरोबर होईल? **हें कृत्य दाखविण्यास घ घे**

क्ष=६० हें उत्तर शक्यरूप किंवा अशक्यरूप असें ह्मणणें, या पुढील प्रश्नांचे उत्तरांचे आधारावर आहे. जेव्हां (अ) कृत्य सांगीतलें तेव्हां (घ) कृत्याचा कांहीं भास आपल्ये मनांत आला होता कीं नाहीं? ह्मणजे, (अ) आणि (घ) या दोहोंतून जें खरें होईल त्यास घ्यावयाचें होतें कीं काय; आणि (अ) कृत्याचा तपास केल्याचे पूर्वींच, तें खरें आहे असें समजून घेतलें कीं काय? अथवा शब्दांचे सरळ अर्थावरूनच (घ) कृत्याचें मनन झालें कीं काय? तर, पहिल्या पक्षीं उत्तर हेंच, कीं १. खोटी कल्पना घेतली, आणि २. दुसरी कल्पना घेण्यास योग्य होती; आणि ३. उत्तर क्ष=६० असें आलें; दुसरे पक्षीं, उत्तर हेंच कीं कृत्य अशक्य रूप आहे.

४ **कृत्य.** सोन्याची स्पिसिफिक् ग्राविटी १९$\frac{१}{४}$, आणि रुप्याची १०$\frac{१}{२}$, आहे; आणि एक सोनार $\frac{१}{४}$ घनफुटीचा तुकडा विकायास आणितो, आणि सांगतो कीं, तो तुकडा शुद्ध सोन्याचा आहे, आणि त्याचें वजन २६० पौंड आहे. तर तो शुद्ध सोन्याचा असेल कीं काय? जर नसला, तर त्यांत रुप्याची भेळ असेल कीं काय? त्या पक्षीं रुपें आणि सोनें हीं कोणकोणत्या प्रमाणानें मिळविलेलीं आहेत तें सांग.

पाण्याचें एक घनफुटीचें वजन १००० औंस आहे, आणि सोनें १९$\frac{१}{४}$ वेळा पाण्यापेक्षां भारी असतानां, सोन्याचे एक घनफुटीचें वजन १९२५० औंस होईल, आणि एक घनफुटीचे $\frac{१}{४}$ शाचें वजन ४८१२$\frac{१}{२}$ औंस होईल, अथवा ३०० पौंड आणि १२$\frac{१}{२}$ औंस आहे. यामुळें तो तुकडा शुद्ध सोन्याचा नाहीं असें कळतें. पुनः रुप्याचे एक घनफुटीचें वजन १०५०० औंस, आणि एक घनफु-

टीचे $\frac{१}{४}$चें वजन १६४ पौंड आणि १ औंस आहे. यामुळें त्या तुकडयाचें वजन तितक्ये शुद्ध रुप्याचे तुकडयापेक्षां अधिक आहे, परंतु तितक्येच शुद्ध सोन्याचे तुकडयांपेक्षां कमी आहे, यामुळें तो तुकडा या दोन धातूंचे मिश्राचा आहे. यापक्षीं, त्यांतल्ये सोन्याचा भाग दाखविण्यासाठीं क्ष घे, ह्मणून याजागीं क्ष हा घनफुटीचा अपूर्णांक आहे; तेव्हां $\frac{१}{४}$ – क्ष, ही बाकी रुप्याचा भाग आहे, आणि ११२५० क्ष औंस हें सोन्याचें वजन आहे, आणि १०५०० ($\frac{१}{४}$ – क्ष) औंस हें रुप्याचें वजन आहे. परंतु तुकडयाचें सर्व वजन २६० पौंड, अथवा ४१६० औंस आहे; यामुळें,

$$११२५० क्ष + १०५०० \left(\frac{१}{४} - क्ष\right) = ४१६०$$

अथवा $क्ष = \frac{१५३५}{८७५०} = \frac{३०७}{१७५०} = \frac{३}{१७}$ जवळ जवळ, अथवा $\frac{१}{४}$चे $\frac{१२}{१७}$

$\therefore$ १७ भागांतून १२ भाग सोन्याचे आणि बाकी भाग रुप्याचे आहेत.

आर्किमिदीज याणें जें नामांकित कृत्य पहिल्यानें उलगडलें तें कृत्य हेंच, आणि तें कृत्य या रीतीनें सर्वसाधारण केलें जाईल: तर अ आणि ब अशा स्पिसिफिक् ग्राविटीचे दोन पदार्थ कोणत्या प्रमाणानें मिळवावे, कीं मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी क होईल? इच्छिलें मिश्र करायासाठीं, त्यांचें प्रमाण याप्रमाणें घे, ह्मणजे पहिल्याचा १ घनफुटीस दुसऱ्याचा क्ष घनफुटी असाव्या. अशानें पहिल्याचे १ घनफुटीचें वजन, पाण्याचे अ घनफुटी बरोबर होईल, आणि दुसऱ्याचे क्ष घनफुटीचें वजन पाण्याचे ब क्ष घनफुटी बरोबर होईल; ह्मणून मिश्राचे १ + क्ष घनफुटीचें वजन पाण्याचे अ + ब क्ष घनफुटीचें वजना बरोबर होईल. परंतु संकेताप्रमाणें मिश्राची स्पिसिफिक् ग्राविटी क असावी, तर त्या मिश्राचें वजन पाण्याचे क (१ + क्ष) घनफुटीचे वजना बरोबर आहे; यामुळें

$$अ + ब क्ष = क\ (१ + क्ष)\ \text{अथवा}\ क्ष = \frac{अ - क}{क - ब},$$

यास ९१ आणि ९२ व्ये पृष्ठावर सांगितलेली गोष्ट लागू पडल्ये.

उदाहरणें. २ भाग. **तरफेविषयीं.** एक दांडी, दोन शेवटा-

मध्यें कोणताही बिंदू धरून टांगिली असतां, ती एका बिंदूवर मात्र स्थिर राहील, ह्मणजे आडवी सारखी लोंबत राहील; परंतु, तिजवर यथायोग्य वजनें ठेविलीं असतां, तिला भलत्ये बिंदूवर स्थीर राही असें करितां येईल, असें केलें असतां तीस **बरोबर तोललेली तरफ** असें ह्मणतात. याविषयीं रीती याप्रमाणें आहेत; पहिल्यानें, असें मनांत आणावें कीं दांडीचें सगळें वजन तिचे मध्य बिंदूवर एकत्र होतें. दुसऱ्यानें, एकादे वजनांत जितके **पौंड*** असतील, त्यांस अटीपासून जितक्या **फुटी** अंतर असेल तितक्या फुटींनी गुणावें त्या गुणाकारास त्याच वजनाचें **मोमेंट†** असें ह्मणावें; यावरून जर अटीचे एक बाजूचे वजनाचे मोमेंटांची बेरीज दुसऱ्ये बाजूचे वजनाचे मोमेंटांचे बेरिजे बरोबर असेल, तर ती दांडी बरोबर तोललेली राहील. जर दांडी तिचे मध्य बिंदूवर टांगिली नसली, तर दांडीचें सर्व वजन मध्यबिंदूमध्यें एकत्र आहे, असें जाणलें पाहिजे. जर अटीचे एक्ये बाजूचे मोमेंटाची बेरीज, दुसऱ्या बाजूचे बेरिजेचे बरोबर नसली, तर जिची बेरीज मोठी आहे ती बाजू दबली जाईल.

१. **कृत्य.** १८ फुटी लांबीची एक दांडी आहे, तिचें वजन ४० पौंड आहे; तिचे एक शेवटावर १२ पौंडांचें आणि दुसरे शेवटावर २० पौंडांचें वजन ठेविलें आहे. तर अट कोठे असावी, कीं ती दांडी त्या अटीवर सारखी तोललेली राहील.

अ	क	ड	ब
१२ पौंड	४० पौंड		२० पौंड

दांडीचें वजन ४० पौंड ह्मणून, हें **क** मध्य बिंदूवर एकत्र आहे असें मनांत आण. तर **अक = कब** = ९ फुटी. आतां **६८ वे पृष्ठावरचे** १ उल-

* पौंड आणि फुटी यांचे जागीं दुसरे कोणतेही जातीचे एकं कामांत घेतां येतील; परंतु कृत्यांत सर्व ठिकाणीं एकच जातीचे एकं घेण्याविषयीं जपलें पाहिजे.

† मोमेंट हा इंग्लीश शब्द आहे त्याचा अर्थ बहुतकरून भारमान किंवा गतिमान आहे.

दये विषयासारिखा खोटेपणा उत्पन्न होईल.ह्मणून, **क** चे कोणत्ये बाजूस अट ठेवावी हें अगोधर निश्चय कळत नाहीं,असें असलें तरी उत्तरांत कांहीं फेर होणार नाहीं. आतां मनांत आण कीं, **ब** आणि **क** चे मध्यें कोठेही अटीचें ठिकाण **ड** असो,ह्मणजे **अ** ठिकाणीं १२ पौंड आणि **क** ठिकाणीं ४० पौंड हीं दोन मिळून **ब** ठिकाणाचे २० पौंडांशीं समतोल असावीं. **अड** = क्ष फुटी घे. तर **कड** = (क्ष−९) फुटी,आणि **डब** = (१८−क्ष) फुटी. आतां वेगवेगळे वजनाचे **मोमेंट** याप्रमाणें आहेत, **अ** चें मोमेंट = १२ क्ष, **क** चें मोमेंट = ४० (क्ष−९) , आणि **ब** चें मोमेंट = २० (१८−क्ष) ; तर वर सांगीतल्ये गोष्टीवरून,समतोल असायासाठीं, याप्रमाणें होईल

१२क्ष+४० (क्ष−९) = २० (१८−क्ष) ,अथवा क्ष=१०;

यामुळें अटीचें ठिकाण **क** मध्य बिंदूपासून १ फूट उजवेकडे आहे, अशानें या कृत्याचा अर्थ बरीबर ध्यानांत घेतला, कांकीं उत्तरावरून ताडिलें असतां,क्ष−९ आणि १८−क्ष हीं दोनी शक्य आहेत. आतां **ड** हा **क** चे डाव्या बाजूस आणि वरप्रमाणें **अड** = क्ष आहे,असें मनांत आणलें असतां, पूर्वीं सांगीतल्याप्रमाणें **क** आणि **ब** याचे वजनाची बेरीज **अ** चे वजनाशीं समतोल असावी आणि यावरून, **डब** = १८−क्ष असावा, परंतु **कड** = क्ष−९ याचेजागीं ९−क्ष असें होतें. अशी संकेताने समीकरण याप्रमाणें झालें असतें

१२क्ष=४० (९−क्ष) +२० (१८−क्ष)

अथवा १२क्ष−४० (९−क्ष) =२० (१८−क्ष) ,अथवा क्ष=१०

या आणि पहिल्ये पक्षांत इतका भेद आहे कीं,

यांत +४० (९−क्ष) याचेजागीं −४० (९−क्ष) आहेत.

या पक्षीचें उत्तर क्ष=१० यावरून ६८ व्ये पृष्ठावरचा **पहिला उलटा विषय** दृष्टीस पडतो.

हें कृत्य या रीतीनें सर्व साधारण होतें. दांडीची लांबी ल, तिचें व-

जन व[*]. आणि उजव्ये व डाव्ये कडचे दोन शेवटांवर वजनें प आणि क्क अशीं घे, आतां अड = क्ष घे, आणि मनांत आण कीं अटीचें ठिकाण क मध्याचे उजव्ये कडे आहे. यावरून कड = क्ष − ½ ल, डब = ल − क्ष. तर समीकरण या प्रमाणें होतें

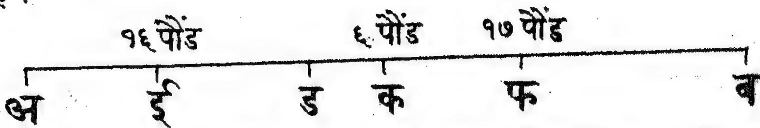
$$\text{प क्ष} + \text{व}\left(\text{क्ष} - \tfrac{1}{2}\text{ल}\right) = \text{क्क}\left(\text{ल} - \text{क्ष}\right)$$

$$\text{यावरून}\quad \text{क्ष} = \frac{\text{व ल} + 2\,\text{क्क ल}}{2\text{प} + 2\,\text{क्क} + 2\text{व}} = \frac{\text{व} + 2\,\text{क्क}}{\text{प} + \text{क्क} + \text{व}} \times \frac{\text{ल}}{2}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. जी वर क्षची किंमत काढिली तीपासून ही गोष्ट सिद्ध करून दाखीव, कीं जसा जसा क्क हा प पेक्षां अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षां कमी असेल, तसा तसा क्ष हा ½ ल यापेक्षां अधिक किंवा त्याचे बरोबर किंवा त्यापेक्षां कमी आहे.

स्टील यार्ड[†] या नावाचा तोलाचा कांटा या वरचे कृत्याचे आधारावरून झाला आहे.

२ **कृत्य.** एक २० फुटी लांबीची दांडी आहे, तिचें वजन ६ पौंड, आणि तिचे डाव्ये शेवटापासून उजव्ये कडे ९ फुटींवर तिची अट आहे, तर ७ फुटींचे अंतरानें १६ आणि १७ पौंडांचीं दोन वजनें कोठकोठे ठेवावीं, असें कीं तीं सर्व समतोलांत होतील, यांत अशी कल्पना कर, कीं १६ पौंडांचें वजन डाव्ये कडे आहे?



क दांडीचा मध्यबिंदु, ड अटीची जागा, ई आणि फ या दोन वजना-

---

[*] व ह्या वजनांतील पौंड, अथवा दुसरे कांहीं जातीचे एकमाचा वजनाची संख्या दाखवितो, आणि ल फुटीची संख्या, अथवा दुसरे कांहीं लांबीचे एकमाची संख्या दाखवितो.

[†] ह्या शब्द एका तऱ्हेचे तोलाचे कांट्याचें इंग्रेजी नांव आहे.

च्या जागा आहेत, अशी कल्पना कर. तर अड = ९ फुटी, बड = ११ फुटी, अक = १० फुटी, ईफ = ७ फुटी, आणि डक = १ फुट. आतां अई = क्ष घे; तर ईड = ९ − क्ष, डफ = अफ − अड = अई + ईफ − अड = क्ष + ७ − ९ = क्ष − २. तर याची रचना याप्रमाणें होईल,

१६ पौंड अटीपासून $\overline{९ - क्ष}$ फुटी लांब आहे; ह्मणून याचें मोमेंट १६ (९-क्ष), हें याशीं पुढील दोन मोमेंट समतोल होतील,

ह्मणजे ६ पौंड अटीपासून १ फुट लांब आहे; ह्मणून याचें मोमेंट ६ × १ अथवा ६ आहे.

१७ पौंड अटीपासून $\overline{क्ष - २}$ फुटी लांब आहे; ह्मणून याचें मोमेंट १७ (क्ष-२) यामुळें १६ (९ − क्ष) = ६ + १७ (क्ष − २) क्ष = ५ $\frac{७}{३३}$ फुटी.

हें समीकरण खऱ्या रीतीनें मांडिलें, कां कीं, ९ − क्ष आणि क्ष − २ हीं दोनीं शक्यरूप आहेत. जर अशी कल्पना केली, कीं ई आणि फ हीं दोन वजनें ड चे एक्ये बाजूस ठेविलीं, तर त्यावरून या पुढील प्रमाणें समीकरण उत्पन्न होईल,

१६ (९ − क्ष) + १७ (२ − क्ष) = ६

अथवा १६ (९ − क्ष) = ६ − १७ (२ − क्ष) क्ष = ५ $\frac{७}{३३}$ फुटी;

यावरून ही क्षची किंमत वरचे प्रमाणेंच निघाली; परंतु, २ − क्ष हें अशक्यरूप आहे. डचे जा बाजूस क आहे, त्याच बाजूस ई आणि फ आहेत, अशी कल्पना केल्यानें, ई, फ, आणि क, हीं वजनें अटीचा एके बाजूस असून, अटीचा दुसरे बाजूस कांहींच वजन नाहीं, तरी समतोल होतात; अशी खोटी कल्पना केली तरी, त्या संकेतापासून जें समीकरण उत्पन्न होतें, त्यास चालत्या रीती लाविल्या असतां, उत्तर समीकरणाशीं ताडून पाहिल्या पावेतों त्याचा अशक्यपणाचें रूप कांहीं एक दिसत नाहीं. या पक्षीं,

अ   ड क ई   फ ब

जर अई = क्ष, तर डक = १, डई = क्ष − ९, डफ = (क्ष − ९) + ७ = क्ष − २; यामुळें, क, ई आणि फ, या वजनाचीं मोमेंटें याप्रमाणें आहेत, ६, १६ (क्ष − ९),

आणि १७ (क्ष−२) . वरचे कल्पने प्रमाणें, ह्मणजे, ड्चे डाव्ये बाजूस कांहीं वजन नाहीं, यापासून काय होईल तें शोधायास हें पुढील समीकरण शक्यरूप असें मानून काय होईल तें पहा.

६+१६ (क्ष−९) +१७ (क्ष−२) =०

यापासून हेंच होतें

६+१६ क्ष−१४४+१७ क्ष−३४ = ०

३३ क्ष−१७२=०, ३३क्ष=१७२, क्ष = ५ $\frac{७}{३३}$

हें ही वरचे उत्तरा सारिखें आहे. परंतु हें समीकरण अशक्यरूप आहे, कांकीं कोणत्येही तीन परिमाणांची बेरीज शून्यापेक्षां अगत्य अधिक असावी. अणखी ही दिसतें, कीं क्ष−९ हें ही अशक्यरूप आहे.

७० आणि ७१ व्ये पृष्ठावर जी गोष्ट सांगीतली, त्याच प्रमाणें एथें कांहीं गोष्ट सांगीतली पाहिजे.

क्ष− (क−ब) =०, अथवा क्ष+ब−क=०

हें समीकरण शक्यरूप आहे, कांकीं तें हें मात्र दाखवितें, कीं क्ष=क−ब. परंतु

क्ष+ (ब−क) =०

हें अशक्यरूप आहे. तथापि, जेव्हां क पेक्षां ब अधिक आहे, तेव्हां क्ष+ (ब−क) ही आणि क्ष+ब−क या दोनही एक सारिख्याच आहेत; परंतु जेव्हां क पेक्षां ब कमी आहे, तेव्हां असा रूपभेद केल्यानें, हें पुढील अशक्य रूप कदाचित घडेल,

क्ष+ (ब−क) =०,

याचे जागीं हें पुढील शक्यरूप समीकरण घेण्यास योग्य होतें

क्ष− (क−ब) =०.

याज वरून जर,

क्ष+प=०,

असें समीकरण कधीं आलें, तर निश्चय जाणावें, कीं प हें परिमाण करत्येसमयीं, कांहीं एक वजाबाकीचीं पदें उलटीं केलीं; ह्मणजे, क−ब याचे जागीं ब−क अशी

प ची किंमत कल्पिली. आतां क−ब ही शुद्ध कल्पना क याचे बरोबर आहे असें मनांत आणलें; तर याप्रमाणें होईल

$$क्ष - क = ०, \text{ अथवा } क्ष = क.$$

९७ व्ये पृष्ठावर दुसरे कृत्याचें प्रथम उदाहरण साधारण रीतीनें याप्रमाणें होतें. ल फुटी लांबीची एक दांडी आहे, तिचें वजन **व** पौंड आहे, आणि डाव्ये शेवटापासून ती अ फुटी इतक्ये अंतरावर टेंकिली आहे, अशी कल्पना कर. तर **प** आणि **क** अशी पौंडांचीं दोन वजनें आहेत, त्यांतून एक वजन **प** अटीचे डाव्ये कडेस असावें, आणि **क** उजव्ये कडेस, आणि त्या दोन वजनांचे मध्यें अंतर म फुटी असावें. तर त्यांची रचना कशी करावी कीं दांडी समतोल होईल? या प्रमाणें समीकरण होईल,

$$प\,(अ - क्ष) = व\,(\tfrac{1}{2}ल - अ) + क\,(क्ष + म - अ)$$

$$क्ष = \frac{पअ + कअ + वअ - \frac{1}{2}वल - कम}{प + क}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरण. अ शेवटापासून डाव्येकडे, आणि **ब** शेवटापासून उजव्येकडें, अशी दोहोंकडे दांडी वाढविली अशी कल्पना कर, **परंतु अशे वाढविल्ये दोन तुकडयास कांहीं वजन नाहीं** असें मनांत आण. तर **व**=२० पौंड, ल=५० फुटी, अ=५ फुटी, **प**=४ पौंड, **क**=७ पौंड, म=१० फुटी, अशा वेगवेगळ्या किमती घेऊन, त्या **९८ व्ये पृष्ठाचे** उदाहरणावर लाऊन उलगडून दाखीव.

उदाहरण. ३ भाग. अनेक प्रकारच्या गोष्टीविषयीं. १. कृत्य. १० इंच लांबीची एक **अ ब** सरळ रेघ आहे, **ती दोहोंकडेस वाढविली.** ती रेघ **अ** पासून उजव्ये कडेस ७ इंचांवर **क** बिंदूवर छेदिली आहे. तर **ड** बिंदू कोठे असावा, असा कीं जा प्रमाणानें* **अड** हा **डब** यास त्याच प्रमा-

---

* या जागेवर समजावें, कीं अ हा ब शीं प्रमाण, आणि क हा ड शीं प्रमाण, जेव्हां हीं दोन प्रमाणें, एकसारिखींच आहेत, जेव्हां $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ हे बरोबर आहेत.

णाने **अक** हा **कब** यास होईल?

अ क ब ड

यांत **अक**=७ इंच, आणि **कब**=३ इंच आहेत. तर **ड** बिंदू हा **अ** आणि **ब** यांचे मध्यें, अथवा **ब**-चे उजव्ये कडेस, अथवा **अ**-चे डाव्येकडेस असावा. अथवा कदाचित एकापेक्षां अधिक ही बिंदू असतील; ह्मणजे, **ड** दोन जागीं असला, तर एक बिंदू **अ**-चे उजव्ये कडेस, आणि दुसरा **अ**-चे डाव्येकडेस येईल. परंतु कृत्याचे संकेतावर चांगला विचार केला असतां, स्पष्ट दिसेल, कीं **ब**-चे उजव्ये कडे असल्या शिवाय **ड** दुसऱ्ये कोणत्ये ही स्थळीं असण्यास अशक्य आहे. कांतर, असें मनांत आण कीं **ड** हा **अ** आणि **ब** यांचे मध्यें कोठे ही येतो. ह्मणजे असें मनांत आण, कीं **क** आणि **ब** यांचे मध्यें कोठे ही येतो; तेव्हां, कृत्या प्रमाणें, **अक** ७ इंच यांत **बक** ३ इंच जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग जातो. तितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग ७ इंचापेक्षां अधिक **अड** यांत ३ इंचांपेक्षां कमी **बड** जाईल. हें तरी किंचित विचारानें अशक्य आहे, असें उघड दिसेल. शिकणारानें सिद्ध करून दाखववावें, कीं वरचे कारणावरून, **ड** बिंदू **अ** आणि **क** यांचे मध्यें कोठे असण्यास अशक्य. आणि **ड** हा **अ**-चे डाव्येकडेस ही असण्यास अशक्य; कांकीं असें असलें, तर जितक्या वेळा **डब** मोठा भाग **अड** या लहान भागांत जातो तितक्या वेळा **कब** ३ इंच **अक** ७ इंचांत गेले पाहिजेत, ह्मणजे $२\frac{१}{३}$ वेळा, हेंही अशक्य. तेव्हां मनांत आण, कीं **ड** बिंदू **ब**-चे उजव्ये कडेस आहे, आणि **अड**=क्ष इंच घे; तर **बड**=क्ष−१० इंच. कृत्याचे संकेतानें, जा प्रमाणानें ७ हे ३ यांस आहेत त्या प्रमाणानें क्ष हा क्ष−१० यांस आहे; ह्मणजे,

$$\frac{क्ष}{क्ष-१०}=\frac{७}{३} \qquad (\times)\ ३\ (क्ष-१०) \qquad ३क्ष=७\ (क्ष-१०)$$

$$\text{यापासून } क्ष=\frac{३५}{२}=१७\frac{१}{२} \text{ इंच.}$$

जरी अशी कल्पना केली असती कीं **ड** बिंदू **अ** आणि **ब** यांचे मध्यें कोठें ही आला, ह्मणजे **क** आणि **ब** यांचे मध्यें कोठें ही आला तर, **अड**=क्ष असें असतां, **डब** १०−क्ष होईल, आणि यावरून समीकरण याप्रमाणें झालें असतें.

$$\frac{क्ष}{१० - क्ष} = \frac{७}{३}, \text{ अथवा } क्ष = ७;$$

ह्मणजे **ड** आणि **क** हे दोन बिंदू एकाजागीं येतात. उलटा विषय असें जास नांव दिलें त्यामध्यें हा वरचा पक्ष लिहिला नाहीं. कांकीं उत्तर असें येईल, असें जरी पूर्वी लक्षांत आलें नव्हतें, तरी कांहीं अधिक समजावल्या वांचून सहस समजायाजोगें आहे. यापासून बोध होतो, कीं जर **ड** हा **अ** आणि **ब** या दोहोंचे मध्यें कोठेही ठेवायाचा असेल, असा कीं जा प्रमाणानें **अक** हा **कब** यास आहे त्या प्रमाणानें **अड** हा **डब** ला होईल, तेव्हां **ड** हा **क** चे स्थळीं अगत्य असावा. परंतु **ड** हा **अ** चे डाव्येकडेस आहे अशी कल्पना केली असतां, आणि **अड** = क्ष असें घेतलें, तर **डब** = १० + क्ष होईल, आणि समीकरण याप्रमाणें होतें

$$\frac{क्ष}{१० + क्ष} = \frac{७}{३}, \text{ अथवा } ३क्ष - ७क्ष = ७०,$$

७० पासून ७८ पर्यंत पृष्ठावर जो उलटा विषय आहे त्या प्रमाणें हें आहे. यावरून उघड होतें कीं **अड** ह्मणजे क्ष हा खोट्ये दिशेकडे घेतला, आणि जर **अ** चे उजव्येकडे घेतला, तर समीकरण या प्रमाणें झालें असतें

$$७क्ष - ३क्ष = ७०, \text{ अथवा } क्ष = १७\tfrac{१}{२} \text{ इंच},$$

हें वर निघाल्या प्रमाणें आहे.

आतां कृत्य फिरवून या प्रमाणें रूप देवुन पहा: मनांत आण, कीं **क** हा **अ** आणि **ब** यांचे बरोबर मध्यस्थळीं आहे. ह्मणजे, अशी कल्पना कर, कीं **अब** = १२ इंच, आणि **अक** आणि **कब** हे प्रत्येक ६ इंचाबरोबर आहेत. तर जा प्रमाणानें **अक कब** ला आहे, त्याच प्रमाणानें **अड डब** ला होई, तर कोणताही **ड** बिंदू **क** बिंदूवर न पडेल, असा आहे कीं काय? खचित नाहीं; कांकीं **अक** यांत **कब** बरोबर १ वेळा जातो, परंतु जर **ड** बिंदू **ब** चे उजव्यकडे किंवा **अ** चे डाव्येकडे असेल, तेव्हां **अड डब** पेक्षां एक पक्षीं अधिक होईल, आणि दुसरे पक्षीं कमी होईल. परंतु जर **ड** बिंदू **अ** चे डाव्येकडे किंवा **ब** चे उजव्येकडे फारच लांब ठेविला असेल, तेव्हां **अड** यांत **डब** एक वेळेचे जवळ जवळ जातो; **८५ आणि ८६ पृष्ठ पहा**, अशी रीतीनें **ड** पाहिजे तितका लांब ठेविला असेल, ते-

व्हां **अड** यांत **डब** इच्छे प्रमाणें हवा तेवढा एक वेळां जवळ जाई असें करितां येईल[*]. यापक्षीं समीकरणानें **ड**चें स्थळ जाणण्याविषयीं यत्न केला, तर **८१ पृष्ठावरचा** उलटा विषय, ज्याचा अर्थ **८४ पृष्ठावर** समजाविला आहे तसा विषय एथे घडेल असें मनांत येईल. मनांत आण कीं **ड** बिंदू **ब**चे उजव्ये कडे ठेविला असतां, या कृत्याचे संकेत तो स्थापितो. **अड**=क्ष घे. तेव्हां **डब**=क्ष−१२, **अक**=६, आणि **कब**=६. यामुळें कृत्याचें समीकरण याप्रमाणें होईल

$$\frac{क्ष}{क्ष-१२}=\frac{६}{६}=१ \text{ अथवा } क्ष=क्ष-१२.$$ **८१ पृष्ठ पहा.**

साधारण रीतीनें वरचें कृत्य याप्रमाणें होईल. मनांत आण कीं, **अब**=अ, **अक**=ब, आणि **अड**=क्ष असे घे, आणि **ड** बिंदू **ब**चे उजव्ये कडे असला, तर समीकरण याप्रमाणें होईल

$$\frac{क्ष}{क्ष-अ}=\frac{ब}{अ-ब}. \quad \text{अथवा } क्ष=\frac{अब}{२.ब-अ}$$

जे जे वेगळाले पक्ष बीजगणित लागू करत्ये समयीं आढळतात, त्या सर्वांस लागू होई असें आतां एक कृत्य सांगतों. हें कृत्य सांगत्ये समयीं उत्तराविषयींची जी कल्पना मनांत येत्ये तिचे बाहेर त्याचें उत्तर जातें याचें कारण, केवळ कृत्य करण्याचा अशक्यपणा आहे असें नाहीं, परंतु तें उत्तर उपयोगी किंवा सोईचें नसतें, हें त्यास कारण आहे. उदाहरण, जेव्हां अंकगणितामध्यें, कांहीं एक अंक दुसरे अंकाचे डाव्ये कडे मांडिले, तेव्हां त्यांचा अर्थ असा होतो, कीं डाव्येकडचा अंक १० नीं गुणून त्यांत उजव्ये कडचा अंक मिळवायाचा आहे. ह्मणजे, २४ हे २×१०+४ असे आहेत. अशाच रीतीनें बहुत करून अपूर्णांक कामांत आणीत नाहीं: ह्मणजे, $२\frac{१}{२}$ ४ हे $२\frac{१}{२}$×१०+४, अथवा २९ असा अर्थ कधींही होत नाहीं; परंतु इच्छिला असतां असा अर्थ होईल; तसेंच $३\frac{१}{६}$ $२\frac{१}{२}$ हे $३\frac{१}{६}$×१०+$२\frac{१}{२}$, अथवा $३४\frac{१}{६}$, याचे जागीं असतील. या गोष्टीवरून हें पुढील सांगतों.

---

* ह्मणजे, अ पासून जेवढा ब लांब आहे तितक्याचे हजार पट अंतरावर बचे उजव्येकडे ड बिंदू ठेव, तेव्हां १००१ यांस जसे १००० तसा अड डबला, अथवा १+$\frac{१}{१०००}$ जसें १ स; हें प्रमाण १ स १ याप्रमाणाचे जवळ आहे.

२ कृत्य. दोन अंकस्थळांचा एक अंक आहे, त्याचे स्थळ अंकांची बेरीज १० आहे, आणि, त्या अंकांचीं स्थळें उलटीं मांडल्यानें तो दुप्पट होतो, तो अंक काय आहे?

पहाण्यांत येतें, कीं ९१ हा अंक १९ यांचे दुप्पट नाहीं, ८२ हा अंक २८ यांचे दुप्पट नाहीं, ७३ हा अंक ३७ यांचे दुप्पट नाहीं, ६४ हेही ४६ यांचे दुप्पट नाहीं. यामुळें, व्यवहारांतल्ये दशगुणक अंकगणित रीतीप्रमाणें, हें कृत्य अशक्य आहे. तर अशे कृत्याला समीकरणाचें रूप देउन कशी तऱ्हेचें उत्तर निघेल? ह्मणून, अंकाचीं दोन स्थळें दाखविण्यासाठीं, क्ष आणि य हीं दोन अक्षरें घे: तर

क्ष+य=१०, अथवा य=१०−क्ष.

२४ हा अंक=२×१०+४, आणि ५८=५×१०+८, इत्यादि असे आहेत, त्याच सारिखें, क्ष स्थळ य चे डाव्येकडे मांडिलें असतां, त्याचे अंक १० क्ष+य हेच आहेत; अंकाचीं स्थळें फिरविलीं असतां, जसें ४२=४×१०+२, आणि ८५=८×१०+५, इत्यादि, तसें, क्ष आणि य फिरविले असतां, १० य+क्ष असें होतें, हें कृत्याचे संकेताप्रमाणें, वरच्याचे दुप्पट आहे; ह्मणजे,

१० य+क्ष=२ (१० क्ष+य), अथवा २० क्ष+२य.

यामुळें १० य−२य=२० क्ष−क्ष, अथवा ८ य=१९ क्ष.

परंतु य=१०−क्ष, अथवा ८ (१०−क्ष)=१९ क्ष;

यामुळें, क्ष=$\frac{८०}{२७}$=२$\frac{२६}{२७}$, य=१०−क्ष =७$\frac{१}{२७}$.

यामुळें उत्तर हेंच आहे, कीं जर एकं आणि दहं इत्यादि जागीं चालत्ये रीतीप्रमाणें एकंचा अंकाशिवाय दुसरा अंक मांडला जात नाहीं असें समजलें, तर हें कृत्य अशक्य आहे; परंतु जर एकादा अपूर्णांक दुसऱ्या अपूर्णांकाचे डाव्येकडे मांडिल्या असतां, त्याची किंमत दसपट होत्ये, असा अंक मांडण्याचे रीतीचा विस्तार केला असतां, हें कृत्य शक्य आहे, आणि नीट आणि उलटे मांडिलेले अंक हेच आहेत.

नीट अंक $२\frac{२६}{२७}$ $७\frac{१}{२७}$, आणि उलटे अंक $७\frac{१}{२७}$ $२\frac{२६}{२७}$

यांत $२\frac{२६}{२७}$ $७\frac{१}{२७}$ याचा अर्थ हाच $२\frac{२६}{२७}\times१०+७\frac{१}{२७}=३६\frac{१८}{२७}$ आणि

$७\frac{१}{२७}$ $२\frac{२६}{२७}$ याचा अर्थ हाच $७\frac{१}{२७}\times१०+२\frac{२६}{२७}=७३\frac{९}{२७}$

हे पहिल्याचे दुप्पट आहेत.

वरचे उदाहरणावरून ही गोष्ट निश्चित होत्ये: जेव्हां कृत्यापासून अपूर्णांक रूप उत्तर येतें, तें उत्तर केवळ या पुढील संकेताप्रमाणें कामांत आणिलें जातें, ह्मणजे समीकरण मांडण्यास पूर्णांक मांडण्याची जी चालती रीति लागत्ये, ती रीति अपूर्णांकांसही लावली जाईल.

वरचें मूळकारण व्यवहारांत आणिलें असतां, हें बहुतकरून कांहीं वस्तूंचा अपूर्ण भागांची कल्पना मनांत आणितें. वास्तविक रीतीने आणि मूळचा अर्थाने त्या वस्तूंचा अपूर्ण भाग होत नाहीं. असें, शुद्ध बोलण्याचे रीतीप्रमाणें अर्धा घोडा असें होत नाहीं: आकार किंवा भारमानाविषयीं अर्धा घोडा असें बोलण्यांत येतें, किंवा घोडयाचे बळाचे अर्धाविषयीं बोलण्यांत येतें, ह्मणजे तें अर्धे बळ कांहीं भारमानाचे अर्धाबरोबर असेल, किंवा कोणी एका घोडयाचा आकार आणि शक्ती दुसऱ्या घोडयाचा आकार आणि शक्ती यांचा अर्धाबरोबर असेल, ह्मणून घोडयाचा जो कांहीं गुण अंकांनी दाखविला जातो त्याचें अर्ध करितां येईल; परंतु गुण किंवा अंक हें समजल्याचे पूर्वीं शब्दाचे शुद्ध अर्थानें अर्धा घोडा हा प्रयोग होत नाहीं. तथापि वाफ यंत्राचे $२०\frac{१}{२}$ घोडयांचे बळाविषयीं शुद्ध रीतीनें बोलवतें, आणि हें बळ पौंडाचे वजनानें मोजतां येतें; लांडग्याने अर्धा घोडा खाल्ला असें जर सांगीतलें, तर त्याची कल्पना घोडयाचे मासाचे वजनाचे अर्धाविषयीं आहे. हें पुढील कृत्य पहा, २ टनाचें वजन एक घोडा ओढितो; आणि ५ टनाचें वजन किती एक घोडयानीं ओढलें, तेव्हां ते किती घोडे होते? तुमच्ये बोलण्याचे शुद्ध अर्थावरून असे प्रश्न खोटे आहेत, परंतु कृत्यामध्यें घोडयाचे ओढण्याचे बळाचे गुणाविषयींच केवळ मनन केलें असतां, असे प्रश्न खोटे नाहींत: आणि जितकें एक घोडयाचें बळ आहे त्याचा $२\frac{१}{२}$ वेळा, बळ लागलें, याप्रमाणें ह्मटलें जाईल.

अथवा २$\frac{१}{२}$ घोडयाचें बळ लागलें. वरची गोष्ट या पुढील उदाहरणावर ही लागते: कांहीं हिशोब ५ रुपये देणें होता, आणि प्रत्येक पुरुषाची वर्गणी २ रुपये होती तेव्हां ते किती पुरुष होते ? केवळ शब्दांचे शुद्ध अर्थानें हें टळगडलें जात नाहीं, परंतु एक पुरुषाची जितकी वर्गणी होती त्याचा २$\frac{१}{२}$ वेळा इतक्या वर्गण्या होत्या*, अथवा २$\frac{१}{२}$ पुरुषांची वर्गणी.

३ **कृत्य.** अ आणि अ′ यार्ड लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत. त्यांचा धणी त्या दोन ही जातींतून बरोबरच मापाचे दोन तुकडे दर यार्डास, ब आणि ब′ रुपये या प्रमाणें फाडून विकत देतो. आणि त्या दोन ही ताक्यांतून जी बाकी राहील, ती जर पहिला ताका क रुपये दर यार्ड आणि दुसरा ताका क′ रुपये दर यार्ड या प्रमाणें विकील, तर दोहों ताक्यांची एकंदर किंमत बरोबर होईल. तेव्हां प्रत्येकांतून प्रथम किती किती यार्ड फाडून विकले ?

पहा, बहुत अक्षरें कामांत आणणें, हें न होण्यासाठीं, एकच अक्षरास एक किंवा अधिक स्वरचिन्हें† इच्छेप्रमाणें लागू करून कामांत आणितात, ह्मणजे हे निरनिराळे अंक आहेत असें समजावें, परंतु त्यांचे अर्थामध्यें कांहीं साधारण गुण आहे. ह्मणून कापडाचे दोन ताक्यांची लांबी, अ आणि अ′ आहे, त्या ताक्यांतून जे दोन तुकडे फाडून काढले, त्यांचा किंमती दर यार्डास ब आणि ब′ आहेत, आणि त्या ताक्यांचे जे दोन तुकडे बाकी राहिले त्यांचा किंमती दर यार्डास क आणि क′ आहेत. परंतु अ आणि ब जा अंकाविषयीं घेतले त्यांत जितका फेर आहे तितका अ आणि अ′ यांचे अंकाविषयीं फेर आहे; ह्मणून हर एक अक्षर भल-

* याप्रमाणें ह्मटलें कीं कोणी एक देशामध्यें एक वर्षांत ४०$\frac{१}{२}$ पुरुषांतून एक मरतो, तर त्याचा अर्थ हाच कीं ८१ तून दोन मरतात. ह्मणून ही गोष्ट वरचे सारिखी आहे.

† हर एक अक्षराचे किमतींत कांहीं फेर दाखवायासाठीं त्या अक्षरास स्वरचिन्ह करितात, त्यास स्वरित अक्षर ह्मणतात, परंतु इंग्रेजींत या चिन्हास डाश ह्मणतात, ती चाल एथे घेतली आहे.

र्थे कांहीं घेतल्ये अंकांचे स्थळीं मांडिलें जातें.

ताक्यांतून दोन तुकडे फाडिले त्यांचे यार्डांची संख्या दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तेव्हां जा ताक्यांचा बाक्या रहातील त्या याप्रमाणें होतील, ह्मणजे अ−क्ष आणि अ′−क्ष यार्ड. पहिले ताक्याचे तुकड्याची किंमत ब क्ष आणि दुसऱ्या तुकड्याची ब′ क्ष रुपये; यावरून बाकी ताक्यांचा किंमती क (अ−क्ष) आणि क′(अ′−क्ष) रुपये आहेत. यामुळें प्रश्नाचे संकेताप्रमाणें.

$$\text{बक्ष}+\text{क}(\text{अ}-\text{क्ष})=\text{ब}'\text{क्ष}+\text{क}'(\text{अ}'-\text{क्ष})$$

$$\text{बक्ष}+\text{अक}-\text{कक्ष}=\text{ब}'\text{क्ष}+\text{अ}'\text{क}'-\text{क}'\text{क्ष}$$

$$\text{बक्ष}-\text{कक्ष}+\text{क}'\text{क्ष}-\text{ब}'\text{क्ष}=\text{अ}'\text{क}'-\text{अक}$$

$$(\text{ब}+\text{क}'-\text{ब}'-\text{क})\ \text{क्ष}=\text{अ}'\text{क}'-\text{अक}$$

$$\text{क्ष}=\frac{\text{अ}'\text{क}'-\text{अक}}{\text{ब}+\text{क}'-\text{ब}'-\text{क}}$$

हें कृत्य या पुढील गोष्टीवर लावून तपासून पहा: मनांत आण, कीं दोन ताक्याची लांबी ६० आणि ८० यार्ड आहे; पहिल्याने जे त्यांतून तुकडे फाडिले त्यांचा किंमती दर यार्डास १० आणि ९ रुपये आहेत अशी कल्पना कर; आणि ताक्यांचे बाकीची किंमत दर यार्डास ४ आणि ३ रुपये आहे. तेव्हां

$$\text{अ}=६०,\quad \text{अ}'=८०;\quad \text{ब}=१०,\quad \text{ब}'=९,\quad \text{क}=४,\quad \text{क}'=३,$$

$$\text{क्ष}=\frac{\text{अ}'\text{क}'-\text{अक}}{\text{ब}+\text{क}'-\text{ब}'-\text{क}}=\frac{८०\times३-६०\times४}{१०+३-९-४}=\frac{०}{०}$$

८७ व्या पृष्ठावर जा उलट्ये विषयाचा विचार झाला तसा हा विषय आहे. त्या जागेवर पहाण्यांत आलें, कीं क्ष याला कशी ही किंमत दिली, तरी त्या किंमतीनें समीकरण उलगडलें जातें, आणि अशी गोष्ट या उदाहरणांत ही घडल्ये असें कळेल. कां, मूळचें समीकरणावर लक्ष्य ठेवून या किंमतीने नवें समीकरण मांडिलें असतां याप्रमाणें होईल,

$$१०\text{क्ष}+४(६०-\text{क्ष})=९\text{क्ष}+३(८०-\text{क्ष})$$

अथवा $$१०\text{क्ष}+२४०-४\text{क्ष}=९\text{क्ष}+२४०-३\text{क्ष}$$

अथवा $$६\text{क्ष}+२४०=६\text{क्ष}+२४०$$

आणि क्ष यास कशीही किंमत दिली तरी ही गोष्ट या उदाहरणांत खरी आहे. यामुळें उत्तर हेंच आहे, कीं या विशेष पक्षीं, आरंभीं ताक्यांतून कितीही यार्ड फाडिले तरी प्रत्येक ताक्याची सर्व किंमत बरोबर होत्ये.

आतां दुसरें उदाहरण तपासून पहा. पूर्वीप्रमाणें ताक्यांची लांबी ६०आणि ८० यार्ड घे; परंतु पहिल्यानें जे तुकडे त्यांतून फाडिले त्यांची दर यार्डाची किंमत ५आणि ४ रुपये, आणि बाकीच्यांची दर यार्डाची किंमत २ आणि ३ रुपये आहेत असें मनांत आण; तेव्हां

$$अ=६०,\quad अ'=८०,\quad ब=५,\quad ब'=४,\quad क=२,\quad क'=३,$$

$$क्ष=\frac{अ'क'-अक}{ब+क'-ब'-क}=\frac{८०\times३-६०\times२}{५+३-४-२}=\frac{१२०}{२}=६०$$

दोनी ताक्यांतून ६० यार्ड फाडिले होते; ह्मणजे पहिल्याचे सर्व घेतले गेले, आणि दुसऱ्याचे ६०यार्ड घेतले गेले; तर ५ आणि ४ रुपये यार्डाचे दरानें पहिल्या ताक्याची किंमत ३०० आणि दुसऱ्याची २४० रुपये आहे. अशानें पहिला ताका सर्व गेला ह्मणून बाकी शून्य राहिली ह्मणून त्याची किंमत ही शून्य, परंतु दुसऱ्या ताक्याचे २० यार्ड राहिले, आणि ३ रुपये यार्डाप्रमाणें त्याची किंमत ६० रुपये होत्ये. याप्रमाणें पहिल्ये ताक्यापासून ३०० रुपये उत्पन्न झाले, आणि दुसऱ्यापासून $२४०+६०=३००$ रुपये उत्पन्न झाले, ह्मणून कृत्याचे संकेताप्रमाणें या दोन किंमती बरोबर आहेत.

पुढील प्रमाणें तिसरें उदाहरण सांगतों. पूर्वीप्रमाणें ताक्यांची लांबी ६० आणि ८० यार्ड घे; परंतु पहिल्यानें जे तुकडे त्यांतून फाडिले त्यांची दर यार्डाची किंमत ७ आणि ३ रुपये, आणि बाकीच्या यार्डांची दर यार्डास किंमत ५ आणि २ रुपये आहेत, असें मनांत आण; तेव्हां

$$अ=६०,\quad अ'=८०,\quad ब=७,\quad ब'=३,\quad क=५,\quad क'=२,$$

$$क्ष=\frac{अ'क'-अक}{ब+क'-ब'-क}=\frac{८०\times२-६०\times५}{७+२-३-५}=\frac{१६०-३००}{१}$$

यांत अशक्य रूप वजाबाकी आहे. ७७ पृष्ठावरचे सारांशावरून क्ष घेण्यांत कांहीं खोटा पक्ष स्विकारिला असें कदाचित मनांत येईल. परंतु कृत्या-

सचांगलें तपासून पहातां अशी कांहीं चूक दिसत नाहीं; कांकीं पहिल्यानें प्रत्येक ताक्याचे क्ष यार्ड विकायाचे आहेत. परंतु ७७ वे पृष्ठावर बुद्धिपूर्वक कृत्यांस अशी रूपानें सांगितलें, कीं खरी किंवा खोटी कल्पना खरेनें दिसण्यांत येईल; एथें तरी हें कृत्य सांगण्यानें शब्दार्थ कशी कशी तऱ्हेनें वाढवावे,असे कीं, हें कृत्य वरचे शब्दांनीं सांगीतल्याप्रमाणें,दोन किंवा अधिक पक्षांतून केवळ एकच पक्ष खरा होईल? लक्षांत ठेव,कीं अंक बदलायाचे नाहींत,परंतु उत्तराचे **गुण** मात्र फिरवायाचे आहेत. आरंभीं विकणारापाशीं ६० आणि ८० यार्ड असे दोन कापडाचे ताके आहेत, आणि शेवटीं त्याजवळ ताक्यांचा तुकडाही नरहातां,त्याचेजवळ दोन ताक्याचे सारिख्ये किंमतीचा पैका रहातो. वरचे कृत्याचे संकेताप्रमाणें पहिल्यानें प्रत्येक ताक्यांतून कांहीं बरोबर यार्ड फाडून विकलो,आणि अशी कल्पनेवरून,उत्तर निघतें तें कृत्य अशक्य आहे,असें दाखवितें. अशीजातीचें उदाहरण आल्यावर त्या उत्तराचे गुण फिरवावे, हें पूर्वी सांगीतलें गेलें; तसें या कृत्यांतही कर,आणि मनांत आण,कीं आरंभीं तो कापडवाला बरोबर दोही जातींचें कापड विकत घेतो. तर हा संकेत ठेवला पाहिजे,कीं आरंभीं पहिल्ये जातीचे कापडाचे ६० यार्ड त्या घेणाराजवळ आहेत,आणि शेवटीं त्याच जातीचें कापड त्याजवळ कांहीं राहिलें नाहीं; यामुळें,जर आरंभीं तो त्यापेक्षां १० यार्ड अधिक विकत घेता,तर त्याला सर्व ७० यार्ड विकत घ्यावें लागतें. असें असतें,तर त्याला दुसरेजातीचें कापड १० यार्ड अधिक घेऊन,सर्व ९० यार्ड विकावें लागतें. परंतु अंक बदलायाचे नाहींत, पण त्यांचीं नावें मात्र बदलायाचीं आहेत,ह्मणून जर तो अधिक विकत घेतो,तर त्यास दर यार्डास ७ (ब) आणि ३ (ब) रुपये या दराप्रमाणें विकत घ्यावें लागतें; आणि जेव्हां तो सर्व कापड विकतो तें तो ५ आणि २ रुपये यार्ड प्रमाणें देतो. यामुळें याप्रमाणें कृत्याचे सांगण्याचा अर्थ अधिक वाढविला असतां,वरचे पक्षांतून हा एक पक्ष या पुढील प्रमाणें होईल:

वाढविलेल्या अर्थाचें कृत्य.

अ आणि अ' यार्ड वेगळाल्ये लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत, त्यांचा धणी दोहों जातींचे बरोबर यार्ड लांबीचे दर यार्ड ब आणि ब' रुपये **असें साटें ठरवितो.** आतां पहिल्ये जातीचें कापड दर यार्डास क रुपये आणि दुसऱ्या जातीचें कापड दर यार्ड क' रुपये या प्रमाणें सावकारानें जर **दोहों जातीचें सर्व कापड** दिलें, तर **प्रत्येक जातीचे कापडाचे उदमापासून दोहोंची किंमत** बरोबर होईल.

पहिलें सांगीतल्या प्रमाणें कृत्य.

अ आणि अ' यार्ड वेगळाल्ये लांबीचे असे दोन कापडाचे ताके आहेत. त्यांचा धणी त्या दोनही जातींतून बरोबर मापाचे दोन तुकडे दर यार्डास ब आणि ब' रुपये याप्रमाणें फाडून **विकत देतो.** आणि त्या दोनही ताक्यांतून **जी बाकी राहिली,** ती जर पहिला ताका क रुपये दर यार्ड आणि दुसरा ताका क' रुपये दर यार्डप्रमाणें विकील, तर **दोहों ताक्यांची एकंदर किंमत** बरोबर होईल.

वर दाखविल्या प्रमाणें पहिल्ये सांगीतल्ये कृत्यापासून हें पुढील समीकरण होतें,

$$\text{क}(\text{अ}-\text{क्ष}) + \text{बक्ष} = \text{क}'(\text{अ}'-\text{क्ष}) + \text{ब}'\text{क्ष}$$

$$\text{अथवा} \quad \text{क्ष} = \frac{\text{अ}'\text{क}'-\text{अक}}{\text{ब}+\text{क}'-\text{ब}'-\text{क}}$$

परंतु जेव्हां धणी विकत देणारा असेल, तेव्हां सर्व साधारण पक्षानें मात्र असें समीकरण होतें. आणि जेव्हां तो धणी विकत घेणारा असेल, तर आरंभीं प्रत्येक जातीचें जितकें विकत घेतो, तितक्यास ती ब क्ष आणि ब' क्ष याप्रमाणें पैका देतो; नंतर दोहों जातीचें सर्व कापड ह्मणजे अ+क्ष आणि अ'+क्ष हें दर यार्ड क आणि क' रुपये याप्रमाणें विकत देतो. यामुळें त्यापाशीं पहिल्ये जातीचे कापडापासून, क(अ+क्ष) −बक्ष अशी बाकी राहील, आणि दुसऱ्ये जातीचे कापडापासून. क'(अ'+क्ष) — ब' क्ष अशी बाकी राहील. तेव्हां समीकरण या प्रमाणें होतें.

$$क (अ+क्ष) - बक्ष = कं (अं+क्ष) - बंक्ष$$

अथवा

$$क्ष = \frac{अक - अंकं}{ब+कं-बं-क}$$

हें समीकरण वरच्चे समीकरणावरून निराळें आहे, ह्मणून यांत ज्या पदामध्यें क्ष येतो त्या पदाचें चिन्ह बदल झालें, आणि उत्तरांत अंकं—अक यांची उलटी वजाबाकी झाली, ही गोष्ट ७७ व्ये पृष्ठावर रीति लिहिली आहे त्या प्रमाणें झाली.

जेव्हां, अ=६०. अं=८०, ब=७. बं=३, क=५, कं=२, धणी विकत देणारा अशा पक्षानें कल्पना करून या अंकानी कृत्य तपासून पाहिलें, त्यांत १६०—३०० असें अशक्यरूप वजाबाकीचें उत्तर निघालें. धणी विकत घेणारा अशी कल्पना करून हा दुसरा पक्ष पाहिला असतां, खरें उत्तर निघेल. ह्मणजे ३००—१६० अथवा १४०, हें उत्तर कृत्याचा संकेत स्थापील, असें दिसतें. हाच प्रश्न दुसऱ्या अनेक पक्षांनीं दाखविला जातो, परंतु सध्या हें काम शिकणारावर सोंपून, दुसरें एक कृत्य सांगतों तें सर्वांशीं वरच्चे कृत्यासारिखें आहे, आणि रूपभेदानें त्याचे पक्षही वरच्चे सारिखे आहेत, आणि दोहों कृत्यांचीं समीकरणें एक सारिखींच होतील.

४ **कृत्य.** खालची आकृती कांहीं प्रांताचा नकाशा आहे, असें मनांत आण. **अब** रेघ साधनींत असून त्या प्रांताची मर्यादा आहे. सगळे रस्ते डावेकडून उजव्येकडेस चढतात, आणि उजव्येकडून डाव्येकडे उतरतात, व जे मैल सांगण्यांत येतात ते प्रांत मर्यादेच्चे रेघेशीं साधनींत असून लंब रेघेंत मोजिले आहेत, असें मनांत आण. **कड** रेघ मर्यादेच्चे रेघेशीं समांतर आहे, आणि ती तिचा उजव्येकडे किंवा डाव्येकडे हें सांगीतलें नाहीं, आणि **बड**, मर्यादेच्चे रेघेशीं लंब आहे त्याजवर **ट** आणि **वि** हे दोन गांव आहेत, ते गांव भूमीच्चे मानाप्रमाणें **अब** मर्यादेच्चे रेघेशीं साधनींत किंवा तिच्चेवर किंवा तिच्चे खालीं असावे. **प** आणि **क** हे दोन गांव मर्यादेच्चे रेघेवर आहेत, जशी जशी **कड** ची स्थिती होईल तसेर आणि **स** गांव **र** आणि **स** बिंदूशीं साधनींत किंवा वर किंवा खालीं आहे—

एकवर्णसमीकरण.

चे मानाप्रमाणें, मर्यादेचे रेघेपासून प्रत्येक साधनींतल्या मैलास अमुक इंचप्रमाणें रस्ते चढतात किंवा उतरतात; तें या पुढील प्रमाणें:

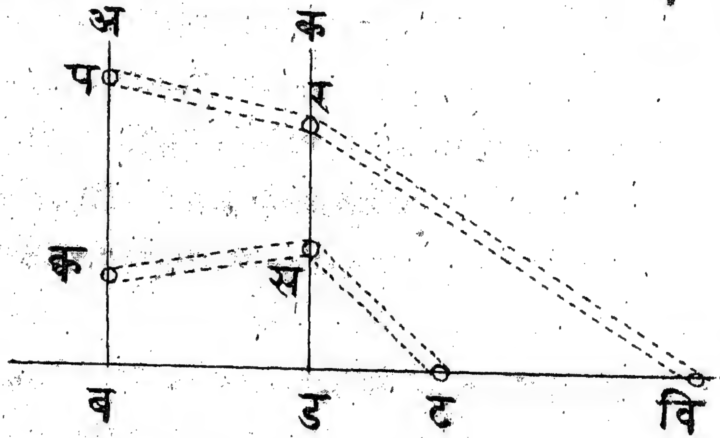
प पासून र कडे दर मैलास ब इंच प्रमाणें.

क्क पासून स कडे दर मैलास ब इंच प्रमाणें.

र पासून वि कडे दर मैलास क इंच प्रमाणें.

स पासून ट कडे दर मैलास क इंच प्रमाणें.

आतां ट आणि वि हे एकच साधनींत आहेत, ब वि रेघ अ मैल साधनींत आहे, आणि ब ट रेघ त्याच साधनीचे अ मैल आहे. तर मर्यादेचे रेघेपासून ब ड रेघेची लांबी आणि तिची दिशा कोणती हें सांग.



हें उदाहरण अभ्यासासाठीं सांगीतलें आहे, आणि वेगवेगळे कल्पनेपासून जीं जीं समीकरणें शेवटीं निघतात त्यांस मात्र सांगतों. सर्व कल्पनांत ब ड रेघेचे मैलांची लांबी दाखविण्यासाठीं क्ष घे.

१. जर ड हा ब याचे डाव्येकडे असेल, तर

क (अ+क्ष) − बक्ष = क (अ+क्ष) − ब क्ष } जसें ट वि रेघ प क्क याचे साधनीचे वर किंवा खालीं असेल त्याप्रमाणें.
अथवा बक्ष − क (अ+क्ष) = बक्ष − क (अ+क्ष) }

२. जर ड आकृतीमध्यें जसा दाखविला तसा ब आणि ट यांचे कोठे मध्यें असेल, तर

क (अ−क्ष) + बक्ष = क (अ−क्ष) + ब क्ष.

आकृतीमध्यें अ' यापेक्षां अ मोठा आहे.

४. जेव्हां ड हा ट आणि वि यांचे उजव्येकडे आहे, तर

बक्ष−क (क्ष−अ) = ब'क्ष−क' (क्ष−अ') { जेव्हां **टवि** रेघ **पक्क**चे साधनीचे वर आहे,

अथवा क (क्ष−अ) − बक्ष = क'(क्ष−अ') − ब'क्ष { जेव्हां **टवि** रेघ **पक्क**चे साधनीचे खालीं आहे.

वरचे सात समीकरणांतून एक मात्र खरें होउं शकतें; आणि वरचे ७ या अंकाचे समीकरणाची कल्पना कृत्याचा सांगितल्या संकेताप्रमाणें आहे, यामुळें बाकीचीं साहा समीकरणें मात्र तपासलीं पाहिजेत. परंतु (१), (२), (३), हे उलटे विषय समजल्यानंतर, असें दिसेल, कीं वरचे साहा समीकरणांतून कोणत्येही एकापासून खरें उत्तर निघेल. जेव्हां ब+क' = ब'+क तेव्हां यापासून (४) उलटा विषय उत्पन्न होईल, आणि त्यांत आणखी अ'क' = अक असेल, तेव्हां (५) उलटा विषय उत्पन्न होईल.

पूर्वी जितकीं वर उलट्ये विषयाचीं वेगवेगळीं उदाहरणें समजाविलीं, त्या सर्वांचे प्रत्येक पक्षाचें स्पष्टीकरण या कृत्या पासून होईल, म्हणून शिकणारानें सर्व उलगडून पहावीं.

कृत्याचे उलगडण्यांत अशक्यरूप वजाबाक्या उत्पन्न होतात असें वरचे गोष्टीवरून दिसण्यांत आलें, आणि त्यांस अर्थ देण्याची रीति ही वर पाहिली. ज्या कृतींचा योगानें अशा अशक्यरूप वजाबाक्यांस अर्थ देणें ह्या त्या कृति क्रमापर्यंत बंद ठेवितां येईल, आणि अशक्यरूपाचीं चिन्हें खय्ये अंकरूपाप्रमाणें आहेत असें मानून, चुकी न होउं देतां कामांत आणितां येतील. अशा रीतींचा शोध समीकरणाचीं दुसरीं रूपें दाखविण्याचा पूर्वीं करितों.

दुसरा अध्याय.

अंकगणितचिन्हांहून भिन्न, अशा बीजगणितचिन्हांविषयीं.

७२ राव्ये पृष्ठावर ५०−७०, आणि **७३ राव्ये पृष्ठावर** २००−५००, अशा पद्धतींस **ऋण परिमाण** असें नांव दिलें. हें बोलणें शुद्ध नाहीं, कांकीं ५०−७० हें कांहींच परिमाण नाहीं, परंतु जें करायास अशक्य, तें कर ह्मणून जी आज्ञा दिली, तिचा विरुद्ध अर्थाची वरची पद्धती आहे. परंतु, **७२ पासून ७८ पर्यंत पृष्ठांत** पाहिलें कीं, ५०−७०, असें जेथें कृत्याचें उत्तर आहे, त्याचा अर्थ हा कीं, ७०−५० यापासून जसा कांहीं २० वस्तूंचा अर्थ मनांत येतो, तसा वरच्या पासून ही येतो, परंतु त्या २० वस्तू, उदाहरण प्रारंभ केल्याचे पूर्वीं, जा जातीच्या कल्पिलेल्या असतात, त्या जातीचे केवळ उलट्या आहेत; ह्मणून खोट्ये समीकरणांत जास त्या वस्तू वाढवितात, त्यास खरें समीकरण करितांनां उण्या करितात, आणि खोट्ये समीकरणांत, जास त्या उण्या करितात, त्यास खरें समीकरण करितांनां वाढवितात.

दोन अथवा अधिक कृत्यें अशीं असतील, त्यांतून पहिल्याचें उत्तर समजल्याशिवाय, दुसऱ्या कृत्याचें उलगडणें होत नाहीं; अशा जातीचीं दोन किंवा अधिक कृत्यें एकत्र जोडिलीं असतां, त्यां पासून असें मनांत आणावें, कीं हें सर्व एक कृत्य आहे, जाचें उलगडणें क्रमाक्रमानें होत जातें. जर पहिलें कृत्य उलगडलें, आणि अशक्यरूप उत्तर निघाल्या वरून, खोटा पक्ष स्वीकारिला, असें ध्यानांत आलें असतां, पहिल्याने उलटें कृती करीत मागें जावें, आणि सर्व नीट करावें, मग याप्रमाणें करीत असतां समजण्याजोगें उत्तर निघाल्यानंतर, दुसरे कृत्याचें उलगडणें पुढें चालवावें. परंतु, ही सर्व खटपट सुटली जाई, आणि जें उत्तर आलें, तें खरेंच आलें, असें मानून, ती कृती पुढें चालवितां येई, अशा

कांहीं रीती आहेत कीं नाहींत ? हा प्रश्न ताडून पहाण्यास, केवळ अंकांविषयीं जा कृती सिद्ध झाल्या आहेत, त्या कृती अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हांस लाविल्या असतां, परिणाम काय होईल हें पहिल्यानें पाहिलें पाहिजे.

जर अनेक पक्ष लागू होतात असें एक कृत्य असेल, त्यांतील एक पक्ष खरा आणि दुसरे खोटे, असें कल्पून, जीं उत्तरें काढिलीं तीं केवळ निराळीं आहेत, इतकें केवळ नाहीं; परंतु समीकरणांस खरें रूप देण्यासाठीं, अव्यक्त उत्तर (क्ष) याशीं जा रीतीनें वर्त्तलें पाहिजे, त्या रीती दोन निरनिराळ्ये पक्षांत निरनिराळ्या आहेत, असें ही नजरेंत येईल. ही गोष्ट ७२ राव्ये पृष्ठावर, पहिले कृत्यापासून कळेल: जेव्हां क्ष हा १८३० सना नंतरचे वर्षाचे ठिकाणीं होता, तेव्हां क्ष या क्रमानें मांडावा लागला, ह्मणजे ५० + क्ष आणि ३५+क्ष; परंतु जेव्हां क्ष हा १८३० सनाचे पूर्वींचे वर्षाचे ठिकाणीं होता, तेव्हां क्ष या क्रमानें मांडावा लागला, ह्मणजे ५० — क्ष आणि ३५ — क्ष. यावरून निरनिराळीं कृत्यें या बोलण्याचा अर्थ काय, आणि एकच कृत्याचे निरनिराळे पक्ष या बोलण्याचा अर्थ काय, या दोहों बोलण्याचा भेद दाखविण्यासाठीं व्याख्यान याजागीं केलें पाहिजे.

या जातीचा भेद पूर्वीं दाखविला गेला; कांकीं, अ — ब अशी जेव्हां अशक्यरूपाची वजाबाकी आली, तेव्हां कृत्याचें रूप फिरवायास अशे तऱ्हेची रीति नेहमी योजावी लागली, कीं, अंकांची मूळ किंमत फिरविल्यावांचून ब — अ असें उत्तर होण्यासाठीं जा समजुतीनें पहिल्यानें अंक घेतले होते, ती समजूत मात्र फिरविली. ही गोष्ट समजायासाठीं ६८ व्ये पृष्ठावरचा पहिला उलटा विषय पहा. त्याचें उत्तर अशक्यरूप नाहीं, परंतु त्या उत्तरानें समीकरण स्थापिलें जात नाहीं. तेव्हां समीकरणास खरें रूप देण्यासाठीं, अंकांची किंमत बदलल्यावांचून, अशक्यरूप वजाबाकी उलटी होई अशी फिरविण्याची री-

ति मात्र घेतली. यावरून, हें पुढील व्याख्यान*, लक्ष्य न पोंचतां, कामांत आणिलें गेलें. ज्या कृत्यांमध्ये हे पुढील तीन संकेत येतात, तीं कृत्यें एकाच कृत्याचे निरनिराळे पक्ष आहेत असें मानण्यास सोईवार पडतें. १. जर कामांत घेतलेले अंक सर्व कृत्यांत सारिखेच असतील; २. जर समीकरणांत ह्याच भेद असेल कीं, पदें उलटीं मांडिलेलीं असून त्यांचीं चिन्हें ही उलटीं असतील, जसें, ६९ **आणि ७० राव्ये पृष्ठावर**, $+\frac{क्ष-१००}{२}$ याचे जागीं $-\frac{१००-क्ष}{२}$ असें मांडिलें आहे, अथवा ज्या कृत्यांमध्यें अव्यक्त परिमाणाचीं चिन्हें सर्वत्र बदललेलीं असतील, जसें, **७२ राव्ये पृष्ठावर** ५०+क्ष=२ (३५+क्ष) याचे जागीं ५०−क्ष=२ (३५−क्ष) असें मांडिलें; ३. जर दोहोंमध्यें उत्तरें सारिखींच असतील, किंवा उत्तरामध्यें इतकाच भेद कीं बजाबाकीचीं पदें उलटीं मांडिलीं असतील, जसें, **७२ राव्ये पृष्ठावर** ५०−७० याचे जागीं ७०−५० असें आहे.

दिसण्यांत निरनिराळ्ये पक्षांचें असें एक कृत्य सांगतां येईल, परंतु वरचे कल्पनेवरून तें कृत्य दोन निरनिराळीं कृत्यें जोडून झालेलें आहे असें दिसेल. उदाहरण, **अ** जवळ ६० रुपये आहेत, आणि **ब** चे खातेवहीमध्यें जी शिलक बाकी धन किंवा ऋण राहील, ती **अ** यास मिळावयाची आहे; परंतु **क**, ज्याजवळ २०० रुपये आहेत, त्याणें **ब** ची मालमत्ता घेऊन, त्याचें कर्ज फेडावें. असें केल्यानंतर दिसण्यांत येतें कीं, **अ** चे मालमत्तेपेक्षां **क** ची मालमत्ता तिप्पट आहे. तर **ब** ची शिलकबाकी घेणें अथवा देणें किती आहे?

जर **ब** ला शिलकबाकी क्ष रुपये घेण्याची असेल, तेव्हां समीकरण या प्रमाणें होईल

$$३(६०+क्ष)=२००+क्ष \text{ अथवा } क्ष=१०$$

जर **ब** नें शिलकबाकी क्ष रुपये देणें असेल, तेव्हां समीकरण या प्रमाणें होईल

$$३(६०+क्ष)=२००-क्ष \text{ अथवा } क्ष=५$$

* मनांत ठेविलें पाहिजे कीं हें व्याख्यान केवळ एकवर्णसमीकरणापासून सांपडलें. यामुळें अशे जातीचे समीकरणांस मात्र लागेल असें समजावें. परंतु विस्तार केला असतां, अनेकवर्णसमीकरणास ही लागेल.

एथे निरनिराळ्ये जातीचीं दोन समीकरणें आहेत, आणि पूर्वील व्याख्यानाचे संकेताप्रमाणें कोणत्ये एक समीकरणाचा रूपभेद केला असतां त्यापासून दुसरें समीकरण होत नाहीं; यामुळें त्या समीकरणांस एक वर्णाचे रूपांत आणितां येतात, ह्मणून वरचे दोन पक्ष निरनिराळीं कृत्यें आहेत.

आतां अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हांस बीजगणिताचा रीती लाविलों, नंतर उलटीं पदें मांडलेल्या वजाबाक्यांशीं खऱ्या रीतीप्रमाणें चालून, उत्पन्न झालेलीं उत्तरें ताडून पाहून, जा चुक्या झाल्या त्या सोप्या आणि साधारण रीतीनी नीट करितां येतील कीं काय. हें पहावयाचें आहे. ३−७ अशी जातीची वजाबाकी नीट मांडिली असतां, ७−३ किंवा ४ होत्ये, तर ती अशक्यरूप वजाबाकी दाखविण्यास सद्यः ४̄ अशा चिन्हानें दाखविलों; ४ या अंकावरजी गराद केली आहे, तें वजाबाकीचें चिन्ह नाहीं, परंतु ७−३ या बदल ३−७ हें उलटें रूप कामांत घेतलें आहे, याची सूचना आहे. त्याच प्रमाणें १०−१४ हे ४̄ अशा चिन्हानें दाखविले जातील असें ह्मणतां येईल; परंतु जोंपर्यंत या गोष्टीविषयीं कांहीं अधिक खात्री होई तोंपर्यंत एथें थांबलें पाहिजे; कांकीं ३−७ आणि १०−१४ अशी जातीचे चिन्हाविषयीं अद्यापि तर्क करवत नाहीं, कांकीं तीं अशक्यरूप वजाबाक्यांचीं चिन्हें मनांत घेण्यास योग्य अशीं परिमाणें दाखवीत नाहीं, आणि अद्यापि त्याविषयीं कांहीं रीति सिद्ध केल्या नाहींत. जापासून हीं चिन्हें निघालीं तेथपर्यंत पुनः जाऊन, जा रीतीनें ३−७ निघाले, त्याच रीतीनें त्याचे जागीं १०−१४ निघालें असते कीं काय, इतकेंच पहातां येईल.

कल्पना कर कीं खोट्ये रीतीनें समजलेल्ये किंवा मांडिलेल्ये कृत्यापासून ७२ व्ये पृष्ठावरचे प्रमाणें २क्ष−क्ष=५०−७० असें येतें. खरें समीकरण ५०−क्ष=२(३५−क्ष) हें घेतलें, तर त्याचे दोन बाजूंस कोणतें ही परिमाण मिळविलें आहे. अ हा दोहीं बाजूंस मिळवायाचा आहे असें ह्मण, तर या पुढील प्रमाणें होईल.

$$(५०+अ)-क्ष=(७०+अ)-२क्ष$$

यास उलगडून याप्रमाणें होतें

$$२क्ष-क्ष=(७०+अ)-(५०+अ)=२०$$

खोट्ये रूपाचें समीकरण ५०+क्ष=२(३५+क्ष) असें जर घेतलें, आणि त्याचा दोहीं बाजूंस जर अ मिळविला, तर उत्तराचा खोटेपणा कळे पावेतों, कल्पना खरी आहे असें मनांत धरून, क्ष=(५०+अ)-(७०+अ) असा परिणाम होईल. जसें कांहीं खरे रीतीनें समीकरणाचे खरे रूपांमध्यें कांहीं अदलबदल केली असतां, ७०-५०, ७१-५१, ७२-५२, इत्यादि अशी रूपाचें उत्तर होतें: त्याच रीतीनें, समीकरणाचे खोट्ये रूपांमध्यें अदलबदल केली असतां, ५०-७०, याचेजागीं ५१-७१, ५२-७२, इत्यादि अशी रूपाचें उत्तर होईल, या गोष्टीचा निर्णय करायाचा आहे. आणि एथपावेतों महत्व, अंक, आकार, इत्यादिकांस मात्र **बरोबरी** या शब्दाचा अर्थ लागू केला, यावरून ५१-७१ हे ५०-७० याचे **बरोबर** आहेत असें सांगत नाहीं; परंतु जा कोणत्येही समीकरणापासून ५०-७० निघालें, त्याच समीकरणापासून ५१-७१ इत्यादि काढितां येतील. या कारणावरून ५१-७१ इत्यादि यांस ५०-७० यांचा बरोबरीचे असें ह्मणवेल; **बरोबरीचा** या शब्दाचा अर्थ एथे असा आणावा कीं उत्तर नीट करावें लागेल, अथवा जेव्हां जा खोट्या कृतीचे ठिकाणीं खऱ्या कृती मिळत नाहीं अशा खोट्या कृती नीट कराव्या लागतील तेव्हां पहिल्या चिन्हाचाजागीं दुसरें चिन्ह चुकी न येतां मांडितां येईल. या तऱ्हेनें तर, ०-१, १-२, २-३, इत्यादि हीं सर्व चिन्हें परस्पर बरोबरीचीं आहेत, आणि तीं १ या चिन्हानें दाखविलीं जातात; अ-(अ+क) आणि (अ+ज)-(अ+क+ज) हीं बरोबरीचीं आहेत, आणि तीं क याणें दाखविलीं जातात; ह्मणून रीति हीच आहे; कीं वजाबाकी उलट करून उत्तरावर गराद चिन्ह कर.

असें जर यापुढील प्रमाणें समीकरण आलें

$$क्ष+अ+ब=०$$

स्पष्ट आहे, कीं हें अति अशक्यरूप आहे, तर केवळ रीतीनें उलगडलें असतां याप्रमाणें होईल

$$क्ष = ० - (अ - ब)$$

त्याचा अर्थ याप्रमाणें दाखविला जातो, $(\overline{अ - ब})$

एकवर्णसमीकरणाचें मनन करण्यांत, खरें रूप क्ष−अ=०, आणि खोटें रूप क्ष+अ=०, या दोहोंवर मात्र लक्ष्य ठेविलें पाहिजे, कांकीं सर्व दुसरीं समीकरणें या रूपांत आणिलीं जातात. उदाहरण, ५९ आणि ६० व्ये पृष्ठावरचें ४ थें समीकरण रूपांतरानें याप्रमाणें होतें.

$$क्ष - \frac{१२}{१३} = ०$$

आणि ७२ व्ये पृष्ठावर पहिल्येंकल्याचें पहिलें समीकरण रूपांतरानें याप्रमाणें होतें

$$क्ष + २० = ०$$

आतां $\overline{अ} + \overline{ब}$ $\overline{अ} - \overline{ब}$ $\overline{अ} \times \overline{ब}$ $\frac{\overline{अ}}{\overline{ब}}$

यांविषयीं दुसरीं बरोबरीचीं रूपें काढितों

$\overline{अ} + \overline{ब}$ ही पद्धती या पुढील जातीचे समीकरणापासून उत्पन्न होईल:

$$क्ष + (प + अ) - प + (क + ब) = क$$

हें समीकरण अशक्य असें ध्यानांत घेतल्याचे पूर्वीं, उलगडलें असतां या पुढील प्रमाणें निघेल

$$क्ष = प - (प + अ) + क - (क + ब) = \overline{अ} + \overline{ब}$$

परंतु तशाच रीतीनें उलगडलें असतां पुढलें ही होईल

$$क्ष = प + क - (प + क + अ + ब) = (\overline{अ + ब})$$

यांत अ+ब यांजवरचा गरादेचा अर्थ हाच आहे, कीं कांहीं एक परिमाणांतून जें दुसरें परिमाण वजा करायास योजिलें, तें अ+ब इतक्यानें पहिल्यापेक्षां अधिक आहे. अथवा याप्रमाणें होतें

$\overline{अ} + \overline{ब}$ ही पद्धती $(\overline{अ + ब})$ हिचे बरोबरीची आहे

वरच्या सारिखें या पुढील समीकरणापासून

$$क्ष+(प+अ)-प+क्क = (क्क+ब)$$

$$क्ष=प-(प+अ)-(क्क-(क्क+ब))=\overline{अ}-\overline{ब}$$ हें केवळ रीतीनें होतें.

परंतु हें समीकरण नेहेमी अशक्यरूप नाहीं, कांकीं तें या पुढील समीकरणाचा बरोबरीचें आहे

$$क्ष+प+अ-प+क्क = क्क+ब$$

अथवा $$क्ष+अ=ब \quad तर\ क्ष = ब-अ$$

यामुळें, जेव्हां अ पेक्षां ब अधिक आहे, तेव्हां $\overline{अ}-\overline{ब}$ यांचें खरें रूप ब–अ आहे; जेव्हां अ पेक्षां ब उणा आहे, तेव्हां $(\overline{अ-ब})$ असें आहे. हें पुढील समीकरण केवळ रीतीनें उलगडलें असतां त्यापासून जें ब+$\overline{अ}$ असें रूप निघतें त्याचा बरोबरीचें रूप दिलें जाईल.

$$क्ष+(प+अ)-प=ब$$

$$क्ष=ब+(प-(प+अ))$$

$$\overline{अ}ब \quad अथवा \quad \frac{\overline{अ}}{ब}$$

अशी रूपाचीं पदें अद्यापि सांपडलीं नाहींत, ह्मणून समीकरणावर लक्ष्य न ठेविल्यामुळें अशीं पदें उत्पन्न होतात, परंतु कृत्यावर लक्ष्य न ठेविल्यामुळें उत्पन्न होत नाहींत, हें आतां दाखविलें जाईल. ह्मणजे, $\overline{अ}\overline{ब}$ आणि अब, अथवा $\frac{\overline{अ}}{\overline{ब}}$ आणि $\frac{अ}{ब}$, अथवा यासारिखीं दुसरीं रूपें, एकच समीकरणापासून काढलीं जातील, तें समीकरण खरें किंवा खोटें असो.

जर क्क पेक्षां प अधिक असेल, आणि ड पेक्षां क अधिक असेल, तर प–क्क आणि क–ड या दोन शक्यरूप पदतींचा गुणाकार, आणि क्क–प आणि ड–क या दोन अशक्यरूपांचे पदतींचा गुणाकार केल्याने दोहोंचीं उत्तरें सारिखींच होतील, जसें पुढील प्रमाणें :

प−क्र	क्र−प
क−ड	ड−क
पक−क्रक	क्रड−पड
पड−क्रड	क्रक−पक
वजाकरून, पक−क्रक−पड+क्रड	क्रड−पड−क्रक+पक

हीं दोन्हीं उत्तरें पदांचे रचनेशिवाय सर्वांशीं बरोबर आहेत. यामुळें, हें पुढील समीकरण, ह्मणजे

क्ष+क्रक+पड = पक+क्रक

दुर्लक्ष्यानें, हें कदाचित याप्रमाणें उलगडलें जाईल, ह्मणजे

क्ष=पक+क्रड−क्रक−पड=(क्र−प) (ड−क)

परंतु नीट रीतीनें उलगडलें असतां याप्रमाणें असावें

क्ष=(प−क्र) (क−ड)

यावरून, जर प−क्र याचेजागीं अ घेतला, आणि क−ड याचे जागीं ब घेतला, तर अब याचेजागीं $\bar{\text{अ}}\bar{\text{ब}}$ असें पद सांपडेल.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ याचेजागीं $\frac{\bar{\text{अ}}}{\bar{\text{ब}}}$ हें पद येतें असें कसें घडतें, हें ७९ पृष्ठावरचे उदाहरणावरून पहाण्यांत आलें. क्र यापेक्षां प अधिक, आणि ड यापेक्षां क अधिक, असें मनांत घे; तर

कक्ष+क्र = डक्ष+प

यास खरे रीतीनें उलगडलें असतां, याप्रमाणें होईल

(क−ड) क्ष=प−क्र अथवा क्ष= $\frac{\text{प−क्र}}{\text{क−ड}}$

खोट्ये रीतीनें उलगडलें असतां, याप्रमाणें होईल

(ड−क) क्ष=क्र−प अथवा क्ष= $\frac{\text{क्र−प}}{\text{ड−क}}$

यावरून, जर प−क्र याचेजागीं अ, आणि ड−क याचेजागीं ब घेतला, तर $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ याचे बरोबरीचा $\frac{\bar{\text{अ}}}{\bar{\text{ब}}}$ आहे.

जा कृत्यापासून समीकरण झालें, त्यांचे परस्परांचे संबंधाचा विचा-

र नकरितां,समीकरणापासून जे सर्व निरनिराळे पक्ष उत्पन्न होतात,त्यांत बरोबरीचीं रूपें अथवा खरीं रूपें घ्यावीं,याची रीति वर ठरविली. उदाहरणावरून जें वर खचित समजलें तें आधार घेऊन, आतां कल्प आणि समीकरण हीं दोन्हीं लक्ष्यांत आणून यांचा विचार करितों, ह्मणजे, जा खोट्ये कल्पनेवरून अ चेजागीं अॅ असें येतें,त्यापासून समीकरण करत्येसमयीं वजाबाकी करण्याचेजागीं मिळवणीं दाखवितें, आणि जेथें मिळवणी करायास योग्य तेथे वजाबाकी दाखवितें.

भलतें कांहीं समीकरण उलगडून अॅ हें उत्तर आलें,आणि मागली सर्व कृती खरी असली तर नंतर अॅ हें कशीं मिळवायाचें, अथवा, क+अॅ याची किंमत काढायाची आहे असें मनांत आण.

नीट करणें आणि पुढें चालायाची रीति. वर सांगीतल्ये उदाहरणाचें खरें उत्तर अ आहे,परंतु जा खोट्ये कल्पनेने अॅ असें उत्तरआलें,त्या कल्पने वरून जेथे खचित वजा करण्याचें होतें तेथें हें पद मिळवायाचें असें मनांत आलें, आणि याचें उलटें ही; ६७ पासून ७१ पृष्ठ पर्यंत पहा. यामुळें पुढें करायाची खरी कृती नीट केलेली हीच आहे,ह्मणजे क—अ, अथवा क+अॅ हे क—अ हिचा बरोबरीची आहे.

खोट्ये रीतीची तपासणी. ज्ञ—(ज्ञ+अ) हिचा दर्शक अॅआहे.आणि सरळ रीती प्रमाणें क+ज्ञ—(ज्ञ+अ) अथवा क+ज्ञ—ज्ञ—अ हिचा दर्शक क+अॅ अथवा क—अ, ही वरचे खरे रूपाचे बरोबर आहे असें वर दाखविलें.

याप्रमाणें,क—अॅ असें आलें,तर अ खरेंउत्तर आहे असें ठाऊक आहे,परंतु जा खोट्ये कल्पनेनें अॅ असें उत्तर आलें त्यावरून जेथे मिळवायास योग्य तेथे त्यास वजा करण्याचें मनांत आणिलें; यामुळें क+अ हें खरें उत्तर आहे. खोट्ये कृतीसें याप्रमाणें होतें. क—(ज्ञ—(ज्ञ+अ)) ,अथवा क—ज्ञ+(ज्ञ+अ). अथवा क—ज्ञ+ज्ञ+अ,अथवा क+अ. यावरून या

दोन रीती निघतात:

क+अ॑ ही क−अ हिचा बरोबरीची आहे

क−अ॑ ही क+अ हिचा बरोबरीची आहे

तशीच कल्पनेवरून (प−अ॑) (क्क−ब॑) ही (प+अ) (क्क+ब) हिचा बरोबरीची आहे. खोट्ये कृतीवरून पक्क−क्कअ॑−पब॑+अ॑ब॑ असें होतें. जर कृत्याचे खोट्ये समजुतीपासून अ॑ आणि ब॑ असें निघतें हें कल्पनेंत आणिलें, तर नीट करण्याविषयीं तशेजातीचें कांहीं कृत्य आधारासाठीं घेतलें पाहिजे. तें हें असावें:

अ आणि ब या प्रत्येकांजवळ ४ आणि ५ रुपये आहेत. त्यांची परस्परांत पैज पडली होती, त्यांतून एक, पैज हारल्यानंतर त्या प्रत्येकांजवळ जे रुपये होते त्यांचा गुणाकार १८ बरोबर आहे. तर त्या दोहोंतून कोण किती हारला?

मनांत आण, कीं **अ** याणें क्ष रुपये गमाविले, तर समीकरण स्पष्ट याप्रमाणें होईल,

(४−क्ष) (५+क्ष) = १८

जर अ याणें क्ष रुपये मिळविले, तर समीकरण याप्रमाणें होईल,

(४+क्ष) (५−क्ष) = १८

पहिल्ये पक्षानें.	दुसऱ्या पक्षानें.
४−क्ष	४+क्ष
५+क्ष	५−क्ष
२०−५क्ष	२०+५क्ष
४क्ष−क्षक्ष	४क्ष+क्षक्ष
२०−क्ष−क्षक्ष बेरीज	२०+क्ष−क्षक्ष वजाबाकी
२०−क्ष−क्षक्ष =१८	२०+क्ष−क्षक्ष =१८
क्षक्ष+क्ष =२	क्षक्ष−क्ष =२

या उदाहरणापासून, आणि त्याच जातीचें दुसरें उदाहरण तपासल्याने, हें पहाण्यांत येतें, कीं वेगळ्ये वेगळ्ये पक्षाच्ये खरे समीकरणांतील जीं पदें क्ष यागें एक वेळा गुणिलीं असतात, अथवा जांत पहिल्ये दृष्टाप्रमाणें क्ष याविषयीं एकवर्ण पद आहे, त्यास निरनिराळीं चिन्हें आहेत; परंतु जापदांमध्यें क्ष क्ष येतो, अथवा तीं क्षविषयीं दोन वर्णांचीं पदें आहेत, त्यास निरनिराळीं चिन्हें नाहींत. आणि क्ष आणि य अशी दोन अव्यक्त पदांचा गुणाकार पदामध्यें असला, तर वरची गोष्ट त्यावरही लागत्ये हें स्थापिलें जाईल; म्हणजे या पुढील समीकरणाप्रमाणें

(४-क्ष) (५+य) = १८

आणि (४+क्ष) (५-य) = १८

$\overline{\text{अ}}\,\overline{\text{ब}}\,\overline{\text{क}}$ असें पद घेतलें, तर पहाण्यांत येईल कीं नीट केल्यानंतर त्याचें मागलें चिन्ह बदललेलें असावें; परंतु $\overline{\text{अ}}\,\overline{\text{ब}}$कड अशी तऱ्हेचे पदाचें चिन्ह बदल होत नाहीं; त्यावरून रीति हीच आहे, कीं जेव्हां नीट करण्यास गुण्य गुणक अक्षरें **विषम** असतील, तेव्हां त्या पदाचें चिन्ह **बदल** कर. जे गुण्य गुणक नीट करायाचे ते अंश किंवा छेदांत आले तरी त्याची कांहीं चिंता नाहीं; उदाहरण, जर, $\frac{\overline{\text{अ}}\,\overline{\text{ब}}}{\text{क}}$ असें पद घेतलें, तर जा समीकरणापासून क असें पद झालें त्यापासून क्षचेजागीं $\frac{१}{\text{क्ष}}$ घेऊन $\frac{१}{\text{क}}$ याचेजागीं $\frac{\overline{१}}{\text{क}}$ असें निघेल. पहा. जापासून क असें पद निघतें तें हें पुढील समीकरण आहे

२क्ष+ (क+ज्ञ) = क्ष+ज्ञ:

हें समीकरण, सरळ रीतीनें उलगडलें असतां, शेवटीं या दोन रूपानीं माडिलें जाईल

२क्ष-क्ष = ज्ञ- (क+ज्ञ) अथवा क्ष = $\overline{\text{क}}$

अथवा क्ष-२क्ष = (१-२) क्ष = क+ज्ञ - ज्ञ = क

म्हणजे $(\overline{१})$ क्ष = क (÷) कक्ष $\frac{\overline{१}}{\text{क}} = \frac{१}{\text{क्ष}}$

या उत्तराचा परिणाम शोधित गेलें असतां, असें नजरेस येतें कीं $\frac{१}{क}$ हें खोट्ये रूपाचें पद $\frac{१}{क}$ याचे बरोबरीचें आहे. या वरून $\frac{\bar{अ}\bar{ब}}{क}$ हें पद $\bar{अ}\bar{ब}\times\frac{१}{क}$, अथवा $\frac{१\,\bar{अ}\bar{ब}}{क}$ याचे बरोबरीचें आहे, यांत नीट केल्यावांचून जे गुण्य गुणक आहेत ते सर्व अंशस्थळीं आहेत.

(प−$\bar{अ}$) (क−$\bar{ब}$) हें पुनः लक्षांत घेउन, यांस खोट्ये रीतीनें चालविलें असतां, पक−प$\bar{ब}$−क$\bar{अ}$+ $\bar{अ}\bar{ब}$ या बरोबर होईल, तर अनुमानानें असा निश्चय केला पाहिजे. कीं, यास नीट करायासाठीं जा पदांमध्यें $\bar{अ}$ आणि $\bar{ब}$ हीं एकवर्ण आहेत. त्या पदांचीं चिन्हें बदल केलीं पाहिजेत; परंतु जा पदांमध्यें $\bar{अ}\bar{ब}$ येतें त्याचें चिन्ह बदल करूं नये; या वरून त्याचें खरें रूप याप्रमाणें होईल

पक+पब+कअ+अब

परंतु पहिल्यानें, **१२२ पृष्ठावरचे** सांगितल्ये रीतीप्रमाणें, जर (प−$\bar{अ}$) (क−$\bar{ब}$) याचेजागीं एकदांच (प+अ) (क+ब) याप्रमाणें नीट मांडिलें असतें, तर वरचे खरे रूपा प्रमाणें उत्तर निघालें असतें.

या तऱ्हेचे जे प्रकार घडतील ते प्रत्येक निरनिराळे विस्तारानें दाखविण्याचें प्रयोजन नाहीं. वरचे सर्व उदाहरणापासून हें समजलें. कीं अशक्य रूप वजाबाकीचे पद्धतीस, चुकीवांचून. बीजगणिताचा सरळ रीती लावितां येतील; म्हणजे जर नीट करणें शेवटीं करायाचें आहे तर तें नीट करणें इच्छेस येई तोंपर्यंत बंद ठेविलें जाईल आणि त्यांत चुकी येणार नाहीं. शेवटीं या पुढील रीतीप्रमाणें नीट करितात: कांहीं पद नीट करायाचें असेल, तेव्हां अशक्यरूप वजाबाकीचे जागीं खर्य्ये वजाबाकीचे खरे अंक मांडून अशक्यरूप वजाबाकीचीं चिन्हें बदल कर, **याप्रमाणें, $\bar{३}$ याचेजागीं ३ मांड, अथवा $\bar{ज}$− (ज+३) याचेजागीं (ज+३) −ज असें मांड**; जा पदांस विषम वेळा नीट करावें लागतें त्यांचे पूर्वीचें चिन्ह बदल कर; समवेळा नीट करणें असल्यांस चिन्ह बदल करूं नको. हें काम वारंवार हवें तितके वेळा कर. इतकें करून जर शेवटीं उत्तर खरें येईल, तर तुल्य बरोबर समजलें,

आणि ज्या चुक्या त्यामध्यें आल्या, त्या पहिल्ये मांडण्याचे आणि शेवटीं उत्तर येण्याचे मध्यें जा कृती येतात त्यांचे दुर्लक्ष्यानें झाल्या; परंतु नीट केल्यावर जरी उत्तर अशक्यरूप वजाबाकी निघेल, तर कृत्यामध्यें अनेक पक्ष आहेत किंवा तें कृत्य दुसऱ्ये कांहीं सामान्य कृत्याचा खोटा पक्ष आहे, या कारणानें तें कृत्य खरें समजलें नाहीं.

उदाहरण, भलते कांहीं कृतीचे शेवटीं या पुढील प्रमाणें उत्तर आहे असें मनांत आण

$$\frac{अबक+डड}{अक-ड}+\frac{अब}{कड}-कई$$

नंतर अ, ब, आणि ई, हीं अशक्यरूप पदें आहेत असें शोधानें समजलें असें मनांत आण, आणि तीं पदें याप्रमाणें झालीं आहेत, ह्मणजे भलता कांहीं अंक, त्यापेक्षां १ कानें उणे अशा अंकांत तो अंक वजा करण्यानें अ पद उत्पन्न झालें, अशीच तऱ्हेनें कांहीं अंक, त्यापेक्षां ३ नीं उणे अशा अंकांत वजा करून ब पद झालें; असेंच कांहीं अंक त्यापेक्षां ५ नी उणे अशा अंकांतून वजा करून ई पद झालें. ह्मणजे, अ, ब, आणि ई, हीं $\overline{१}$, $\overline{३}$, आणि $\overline{५}$, याणीं दर्शविलीं जातात. क आणि ड हीं शक्यरूप असून ६ आणि २ यांचे बरोबर असतील. तर नीट केल्याचे पूर्वीं, वरची पद्धती याप्रमाणें होईल

$$\frac{\overline{१}\times\overline{३}\times६+२\times२}{\overline{१}\times६-२}+\frac{\overline{१}\times\overline{३}}{६\times२}-६\times\overline{५}$$

याला नीट करायास पहिली पायरी हीच आहे

$$\frac{१८+४}{-६-२}+\frac{३}{१२}+३०$$

परंतु ११८ पृष्ठाप्रमाणें, $-६-२$ हे $\overline{८}$ याणें दर्शविले जातात; आणि वरचे रीतीप्रमाणें यांस नीट केलें असतां, याप्रमाणें होईल $\frac{३}{१२}+३०-\frac{२२}{८}$ अथवा $२७\frac{१}{२}$ हें नीट करणें मुळारंभीं केलें असते, तर याप्रमाणें उत्तर आलें असतें

परंतु वरचें रूप, अ हें बीजगणित ग्रंथकर्त्ते कामांत घेत नाहीं, आणि नेहमी तसें ठेवायासाठीं एथे घेत नाहीं, परंतु, वजाबाकीचें चिन्ह दोन वेग-

झाल्ये अर्थानीं कामांत घेणें हें चुकविण्यासाठीं मात्र घेतलें आहे. रीतीचा परिणाम काय होईल हें लक्षांत न आणितां, केवळ रीतीप्रमाणें चाललें असतां, या पुढील प्रमाणें कृती निघतील:

$$३-८=३-(३+५)=३-३-५=०-५$$

०+५, याचा अर्थ समजायाला ० ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं. त्यावरून −५ असें मांडिलें जाईल. पूर्वीं ५ असें लिहिलें तें आणि −५ हें एकच आहे. कोणत्येही पद्धतींत −५ असें पद नीट मांडून त्याशीं खरे रीतीनें कृती केली ती आणि ५ ही खोटी कल्पना नीट नकरून यापासून खरें फळ संपादायाची रीती, या दोहोंचा फार सारखेपणा आहे तो − या चिन्हाचे जितके गुण समजायाजोगे आहेत त्यामध्यें नजरेस येईल.

सारांश, शक्यरूप पद्धतीस जशा रीती लावितात तशा जर + आणि − यांस लाविल्या, तर जरी त्यांचा सारिखेपणा स्थापिला जाई तों जो भेद ठेविला आहे, तरी तो भेद अ आणि −अ यांत कांहीं समजणार नाहीं. उदाहरण, ब−अ यांस नीट केलें असतां ब+अ आहे. आणि अपेक्षां ज्ञ मोठा असेल, तर ब−(ज्ञ−अ), नीट केली असतां, ब−ज्ञ+अ होत्ये; अशानें अचे पूर्वीं दोन उणी चिन्हें असून, खरे रूपाचे पदाप्रमाणें कामांत घेतला असतां, उत्तरांत +अ होतो. हीच रीति ब−(−अ) यास लाऊन ब+अ होतात; ह्मणून अ आणि −अ, हीं एकसारिखींच आहेत; असें मानणें. आणि प्रवेशकांतील **शक्यरूपाचे** वजाबाक्यांस जा रीती लावण्यास सांगीतल्या त्याशिवाय ब−अ यास नीट करण्यास, दुसरी रीति नको. जे प्रकार पुढें सांगीतले आहेत त्या सर्वांत ही गोष्ट नजरेस येईल.

यास अधिक उघड करायासाठीं हें उदाहरण घे. अ = ब − क, क=ड−क्ष, क्ष=य−वि, वि = ट−ज्ञ, असें असावें. तेव्हां या प्रमाणें होईल

$$अ=ब-(ड-क्ष)=ब-(ड-(य-वि))$$
$$=ब-\{ड-(य-(ट-ज्ञ))\} \cdots\cdots\cdots (\text{ॐ})$$
$$=ब-\{ड-(य-ट+ज्ञ)\}$$
$$=ब-\{ड-य+ट-ज्ञ\}=ब-ड+य-ट+ज्ञ$$

हें उत्तर पहातां, असें दिसतें कीं ज्ञचे पूर्वी + हें चिन्ह आहे; वरचे (ॐ) पद्धतीमध्यें ज्ञचे पूर्वी उणें चिन्ह चारवेळा येतें. टचे पूर्वी – चिन्ह आहे, आणि (ॐ) पद्धतीमध्यें त्याचे पूर्वी उणें चिन्ह तीन वेळा येतें. यचे पूर्वी + चिन्ह आहे, आणि (ॐ) पद्धतींत त्याचे पूर्वी उणें चिन्ह दोन वेळा येतें. यामुळें, ज्या पदास विषम वेळा उणें चिन्ह आहे तीं पदें ऋण आहेत; आणि ज्यांस समवेळा उणें चिन्ह आहे तीं धनपदें आहेत.

आतां, अशी कल्पना कर, कीं कांहीं समीकरणापासून ०–अ अशी खोटी किंमत सांपडली, आणि ही, पूर्वीप्रमाणें, अ॑ याणें दाखविलीं. त्याचे पुढचे कृतीचे पायरीपासून ०–अ॑ सांपडली असें मनांत आण, तर यास अ॒ याणें दाखविलीं. तिसऱ्या कृतीपासून ०–अ॒ असें निघालें, तर यास अ॓ अशानें दाखववावें, आणि याप्रमाणें पुढेंही. यामुळें, प्रत्येक पायरीला एक नवा खोटा समज झाला: परंतु, पुढें असें दाखविलें जाईल, कीं अशी चुकी पुनः पुनः समवेळा झाली असतां, उत्तरामध्यें दिसत नाहीं. पहिलें वरचें खोटें उत्तर, क्ष+अ=० अशी जातीचे समीकरणापासून क्षची किंमत काढण्याचे यत्नापासून निघालें. आतां य याची किंमत काढायास नवी कृती घे, आणि त्या कृती पासून य+क्ष=० हें होतें असें मनांत आण. खरे रीतीने कृती केली असतां, क्ष–अ=० आणि य–क्ष=० अशीं समीकरणें निघालीं असतीं, ह्मणून त्यांपासून य=अ हें निघतें, परंतु क्ष+अ=० आणि य+क्ष=०, या खोटये समीकरणापासून, केवळ सरळ रीतीनें कृती केली असतां, तसें उत्तर होईल. कांकीं, दुसऱ्यांतून पहिलें वजा केलें असतां, य–अ=०, अथवा य=अ असें निघेल. पुनः, ज्ञ याची किंमत काढायासाठीं, मनांत आण कीं, ज्ञ+य=० असें

होतें. हीं पुढील समीकरणें पहा.

क्ष − अ = ०	क्ष + अ = ०
य − क्ष = ०	य + क्ष = ०
ज्ञ − य = ०	ज्ञ + य = ०

पहिल्ये उभ्ये ओळीचे खरे समीकरणांपासून, ज्ञ = अ असें निघतें; दुसऱ्ये उभ्ये ओळींतल्ये खोट्ये समीकरणांपासून असें उत्तर येत नाहीं; कांकीं त्यांची संख्या विषम आहे. कांकीं, केवळ रीतीनें, पहिल्याशीं तिसरें मिळविलें असतां, ज्ञ + क्ष + य + अ = ० होतें, या बेरिजेतून, दुसरें वजा केलें असतां, ज्ञ + अ = ० असें निघेल. आणि याप्रमाणें, दुसऱ्ये पाहिजे त्या समीकरणावर अशीच कृती लागू होईल. आतां, पहा कीं पहिल्ये समीकरणापासून क्ष = ० − अ अथवा $\bar{\text{अ}}$ असें निघतें, दुसऱ्ये समीकरणापासून य = ० − क्ष अथवा ० − $\bar{\text{अ}}$ अथवा $\bar{\bar{\text{अ}}}$ असें निघतें, तिसऱ्यापासून ज्ञ = ० − य अथवा ० − $\bar{\bar{\text{अ}}}$ अथवा $\bar{\bar{\bar{\text{अ}}}}$, आणि याप्रमाणें पुढेंही. यावरून दिसतें, कीं या तऱ्हेची चुक समवेळा आली असतां ती आपोआप नीट होत्ये, विषम वेळा आली असतां, फिरवून नीट करावी लागत्ये.

आतां ही पुढील पद्धती पुनः घेतों

$$\text{ब} - \{\text{ड} - (\text{य} - (\text{ट} - \text{ज्ञ}))\} = \text{ब} - \text{ड} + \text{य} - \text{ट} + \text{ज्ञ}$$

यांत ज्ञपेक्षां ट मोठा असेल, आणि ट − ज्ञ यापेक्षां य मोठा आहे, इत्यादि असेल, तरही पद्धती शक्यरूप आहे. यापूर्वीं अशक्य रूपाचे उदाहरणावरून काय निघेल हें पाहण्यासाठीं त्यास केवळ कृती लाविल्या; आतां तेंच पहाण्यासाठीं अशक्यरूप अशा समजलेल्या उदाहरणावर खरे तर्क लावितों. अशापासून कांहीं नवें करावें लागतें असें नाहीं; कांकीं जा तर्कांनीं कृतीची रीति सिद्ध झाली ते तर्क कृती लावित्ये समयीं मनांत नेहेमी धरितों. सिद्धतेवर पुनः लक्ष देउन, ती सिद्धता जेव्हां घेतलेल्ये समीकरणावर लागू करायाची असत्ये, तेव्हां मात्र अ − (ब − क) = अ − ब + क अशी रीतीनें मांडाया-

ला योग्य आहे. याविषयीं प्रवेशकांत पहा. साधारण तर्काचें उदाहरण पुढें सांगतों

वरचें समीकरण बहुत करून खरें आहे, ह्मणून जेव्हां ट=०, य=०, ड=०, आणि ब=०, असें असेल तेव्हां तें समीकरण खरें आहे. परंतु कोणतेंही पद ० याणें अधिक उणें होत नाहीं, तर वरचे समीकरणांतील पदांमध्यें जेथे ० येतें त्यास टाकून याप्रमाणें होईल

$$-\{-(-(-ज्ञ))\}=ज्ञ$$

यामुळें, ज्ञ याचे पूर्वीं चार ऋणचिन्हें आहेत ह्मणून याचें चिन्ह बदलत नाहीं, आणि दुसरे कोणत्येही सम चिन्हाविषयीं हीच गोष्ट खरी असें सिद्ध केलें जाईल.

ही वरची तर्करचना अनुभवाविषयीं मात्र उपयोगी आहे, परंतु ताळा पहाण्याविषयीं ही स्पष्ट खोटी आहे; कांकीं जेव्हां ब=० असें आहे तेव्हां या पक्षाला अ−(ब−क)=अ−ब+क हें समीकरण लाविलें जातें. या गोष्टीचा सामान्य ताळा विस्तारानें सांगतों, आणि तो ताळा विशेष पक्षाला लागू होईल असा असावा, या दोन विषयांचीं उदाहरणें खालीं दाखवितों.

सामान्य ताळ्याचें उदाहरण.

जेव्हां क पेक्षां ब मोठा आहे तेव्हां हें रूप खरें.

अ यांतून ब−क वजा करायाचा आहे. जर अ यांतून ब वजा केला, तर अ−ब असें होतें. ह्मणून बाकी कमी राहिली, कांकीं क नें उणा तितका मात्र ब चा कांहीं भाग वजा करायाचा होता. यामुळें क अधिक वजा झाला. आणि

विशेष पक्षावर सामान्य ताळा लागू करून उदाहरण.

केवळ तर्कानें कोणत्येही पक्षावर ही गोष्ट लागू व्हावया जोगी नाहीं.

अ यांतून ०−क वजा करायाचा आहे. जर अ यांतून ० वजा केलें, तर अ−० असें होतें ह्मणून बाकी कमी राहिली, कांकीं, क नें उणा तितका मात्र ० याचा

अ−ब+क हें खरें उत्तर आहे.

कांहीं भाग वजा करायाचा होता. यामुळें क अधिक वजा झाला. आणि अ−०+क ह्मणजे अ+क हें खरें उत्तर आहे.

वर जो तर्क लागू केला आहे त्याविषयीं कांहीं गोष्ट सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. कांहीं परिमाणांतून **शून्य** वजा केलें तथापि तें परिमाण अति उणें झालें, शून्याचा कांहीं भाग मात्र वजा करायाचा होता, आणि **शून्य** पूर्ती **उणें** करायाचें होतें. या अध्यायाचे मागल्ये भागापासून अ− (−क) =अ+क असें जें समीकरण निघालें त्यास जो अर्थ द्यावयाचा तो पुढें लिहितों.

क जें परिमाण दाखवितो त्याचे विरुद्धजातीचा तो असेल अशी कल्पना केली, अशा विशेष खोट्ये कल्पनेचें उत्तर ०−क हें विशेष पक्षाचीं उदाहरणें तपासल्यावरून, नेहेमी आढळांत आलें. आणि शोधून पाहिल्यानें असें दिसलें, कीं मिळवणी आणि वजाबाकी विषयीं सगळ्या कृती उलट्या झाल्या; ह्मणजे, जेथें वजा करायाचें होतें तेथें मिळविलें, आणि मिळवायाचें होतें तेथें वजा केलें; जर ०−क अशी अशक्यरूप पद्धती सांपडली नसती, तर ही नवी चूक आपल्या पासून घडली असती. यामुळें, मनांत येतें, कीं अ− (०−क) या पद्धतींत ०−क याचेजागीं, क−० अथवा क असावा, आणि अ− (०−क) यांत पहिलें −चिन्ह गैर समजूतीचें फळ आहे, तें+असावें. यामुळें अ− (−क) यास शुद्ध रीतीनें मांडलें असतां, अ+क आहे, परंतु अ+क याचे **बरोबर** नाहीं. तिसऱ्यानें, शोधावरून असें दिसलें, कीं जर खोट्ये समजुतीचें फळ शुद्ध केल्यावाचून त्याशीं कित्येक कृती केल्या असतां चूक येणार नाहीं, परंतु चूक आल्यास इच्छेस येईल तेव्हां ती चूक यापुढील सोप्ये रीतीनें नीट केली जाईल; ती रीति ही, कीं खरे रूपाचा पद्धतीपासून जा रीती निघाल्या त्यांशिवाय दुसऱ्या रीती लावूं नको.

अशक्यरूप वजाबाकीचे चिन्हाला, चुकीवाचून, बीजगणितांतल्या

रीती लावितां येतील, या आश्चर्य गोष्टीचें कारण पुरतेपणीं सांगीतल्याचे पूर्वी या रीति त्या चिन्हास लावितां येतील, असें समजलें. यामुळें १३० व्ये पृष्ठावर लिहिलेल्ये तर्कासारिखे पुष्कळ तर्क सर्वत्र खरे आहेत असें सर्वपक्षीं समजलें, आणि तें समजण्यासाठीं, नवी भाषा उत्पन्न केली, परंतु ती भाषा शब्दांचे सरळ अर्थानें पाहिली असतां खोटी दिसत्ये.

परंतु लागलेंच सर्वांचे नजरेस येईल, कीं शब्द हे कल्पित चिन्हें आहेत. आणि त्यांजवर विचार पूर्वक कल्पना हवी तशी चालत्ये, या संकेतानें, कीं शब्दाचा एकाअर्थापासून जो बोध होतो तो बोध त्या शब्दाचे दुसरे अर्थाला न लावावा अशा रीतीचा आपल्ये मनांतील एकाद्या शब्दाचा जो अर्थ असेल तो उघड सर्वांस माहीत असावा.

अंकगणितांत कांहीं नवीन विषय वाढविले, आणि पूर्वी मनांत आली नव्हतीं अशीं नवीं चिन्हें कामांत घेतलीं. तीं चिन्हें कोणत्या रीतीनें कामांत आणावीं हें वर सांगीतलें, जा कृती कामांत आणिल्या जातील त्यांचें वर्णन करायासाठीं आतां शब्द कल्पून घेण्याचें मात्र राहिलें.

असे शब्द कल्पायाच्या दोन रीती आहेत.

१. जी कृती संपूर्ण गणितरूप नाहीं, तिचा अर्थ दाखविण्याची इच्छा असेल, तेव्हां एकादा नवा शब्द कल्पावा. असें केलें तर ही विद्या कठीण शब्दानीं युक्त होईल, आणि अशानें, शेवटीं गणितांतील जुने शब्द जाऊन त्यांचा ठिकाणीं नवे शब्द येतील इतकें मात्र होईल; कांकीं या अध्यायांत जा खोट्या कल्पना विस्तारानें दाखविल्या आहेत, त्या मनांत घेऊन किंवा सोडून चालतों, हें कृतीचा शेवट होई पावेतों कळणार नाहीं. यामुळें जुने शब्द यांकून, नवे केलेले शब्द नेहेमी कामांत आणावे लागतील.

२. शब्दांचा अर्थ जो हालीं कामांत घेतात, त्यांचा विस्तार केल्यानें त्या शब्दांचा अर्थ फिरवितां येईल; ह्मणजे त्यांचे जे अर्थ आहेत त्यांहून अधिक अर्थाचा बोध होईल. व्यवहारी बोलण्यांत यासारिखीच चाल आहे,

आणि, जेव्हां कांहीं एक विषय सांगण्यास एकाद्या शब्दाची गरज लागत्ये. तेव्हां ज्या विषयास नाव देण्याचें आहे त्या सारिखा, अथवा त्याशीं संबंधाचा जो दुसरा विषय असेल, त्याचें नाव कामांत आणलें जातें. जसें सांठवण, या शब्दाचा अर्थापासून कोठार, रांजण, कणगी, खोली, घर, वखार, इत्यादि पदार्थांचा बोध होतो. अशा तऱ्हेचीं नावें सारिखेपणापासून मात्र दिलीं जातात, परंतु शब्दार्थाचे विस्तारानें वरचीं नावें दिलीं नाहींत. आतां शब्दार्थाचे विस्तारानें जीं नावें दिलीं जातात तीं विद्यांमध्यें शोधावीं. पशूंचा जातीविषयींचे विद्येंत या गोष्टीचीं पुष्कळ उदाहरणें आहेत. त्यांतून एथे एक उदाहरण घेतों. सर्व पशूंस प्रतवार लावायास पशूंचे अवयवांचे आणि दांतांचे रचना सादृश्यावरून त्या त्या पशूंचा प्रती लावायास सोईवार पडतें. पशूंचा एक्ये प्रतीमध्यें मांजर येतें, आणि त्या प्रतींत जेजे सर्व पशू येतात. त्यांत मांजर हें सर्वांचे माहितीचें आहे. या प्रतीमध्यें मांजर, सिंह, वाघ, बिबळा वाघ, इत्यादि आहेत, या प्रतीस नवे शब्दांनें नांव ठेवायाचें त्या बद्दल त्या प्रतीस मांजर ह्मणतात, आणि एक एकाचा वेगळेपणा दाखवायासाठीं मांजर या शब्दाशीं त्या प्रतींतल्या पशूंचा नावाचा योग करितात. जसें, सिंहास **मांजर सिंह** ह्मणतात. वाघास **मांजर वाघ** ह्मणतात. बिबळ्या वाघास **मांजर बिबळा वाघ** ह्मणतात, इत्यादि. मांजर या शब्दापासून केवळ व्यवहारिक अर्थ मनांत न येतां त्यापासून मांजराचा अथवा त्या सारिख्या दुसऱ्या पशूचा बोध होऊं नये परंतु ज्या अवयव रचनेवरून त्या प्रतीची निवड केली त्या अवयव रचनायुक्त पशूचा बोध व्हावा ह्मणून एथें काय केलें पहा. शब्दापासून जे अर्थ निघतात त्यांचा संकोच केल्यानें, त्या शब्दावरून ज्या पदार्थांचा बोध होतो त्या पदार्थांची संख्या अधिक वाढत्ये. आणि यावरून एक विद्वान दुसऱ्या विद्वानाशीं अशा रीतीनें बोलत असतां, किंवा त्यास लिहीत असतां, त्यांची चुक होणार नाहीं; तथापि त्यांचा अर्थ न जाणणाऱ्या तिसऱ्या पुरुषाचे मनांत असें येईल, कीं मांजर मनु-

घ्यास घेउन पळेल आणि खाईल, असें हे दोघे मानितात.

त्याच सारिखें, बीजगणितामध्यें, असे शब्द येतात, ज्यांचा अर्थ अंकगणितांत पक्का जाणलेला असतो, आणि बीजांत अशा कृती आहेत कीं जा अंकगणिताचे विषयाचे पलिकडे नेतात. परंतु, बीजांतील आणिअंकगणितांतील कृतीमध्यें, कांहीं असा सारिखेपणा आहे, कीं जा कृती सारखेच रीतीनें चालतात त्यांस एकत्र करून एक प्रतीमध्यें घालायास सोईस पडतें: आणि, वर लिहिल्याप्रमाणें या प्रतीस नाव देतांना, अंकगणिताचे शब्दाचे व्याख्यानाचा संकोच केला जाईल असा कीं सर्व मिळून झालेल्ये प्रतीस अंकगणितरूप नाव देतां येईल. माहितींतील अंकगणित कृतीविषयीं जेव्हां बोलायाचें असतें, तेव्हां त्या कृतीचे पूर्वी **अंकगणितरूप** हा शब्द जोडिला जाईल. असें, **अंकगणितरूप** मिळवणी ह्मटलें असतां, ह्याच अर्थ होईल, कीं एक केवळ अंक दुसऱ्या केवळ अंकांत मिळवायाचा आहे. परंतु हा **बीजगणितरूप** मिळवणी अथवा जीस मिळवणी असें ह्मटलें जाईल तिचा एक पक्ष मात्र आहे असें दिसण्यांत येईल. सारांश, पहा, **कीं जेव्हां अंकगणितरूप असा शब्द पूर्वी जोडला नसेल, तेव्हां सर्व शब्दांस त्यांचा विस्तीर्ण अथवा सामान्य बीजरूप अर्थ आहे असें पुढें ध्यानांत ठेविलें पाहिजे.**

आतां शब्दांतील अर्थाचा संकोच अथवा त्याचे अर्थाचे पक्षांचा विस्तार या दोहोंतून कसें ही ह्मणावें. यांविषयीं विचार करितों.

१. **परिमाण** हा शब्द **अंकगणितामध्यें** कोणत्याही पूर्ण किंवा अपूर्णांकास लावला जातो. **बीजगणितामध्यें**, गणनेचा रीती पासून जें उत्तर निघतें त्या उत्तराचें चिन्ह* परिमाण मात्र आहे. या गोष्टीचा पहि-

* जें कांहीं पदार्थाचे प्रतिमेसारिखें दृष्टीपुढें ठेविलें जातें, तें त्या पदार्थाचें चिन्ह आहे. परिमाण हा शब्द याचा मूळ अर्थानें अंकगणितांतही लावला जात नाहीं. २ हा अंकपरिमाण नाहीं. (नो लिहिण्यास जी शाई लागली तिचें परिमाण मनांत आयाल्यायानून)

ला अनुभव या पुढील प्रतिज्ञेमध्यें आहे.

जेथपर्यंत आपण आलों त्यांत **परिमाणें धन आणि ऋण, अशीं दोन प्रकारचीं आहेत.** अंकगणितरूप **परिमाणें सगळीं धन असतात.**

अंकगणिताविषयीं ही गोष्ट मनांत आणिली पाहिजे, कीं + ६ हे ६ या चिन्हापेक्षां अधिक आहेत; ६ उत्तर येण्यास एक विशेष तऱ्हेचें चिन्ह आहे, ह्मणजे, ०+६, अथवा शून्यास साहा मिळाल्यानें ६ उत्तर येतें. परंतु **दाखविलेल्या कृती** वरून ३ + ३ हे + ६ यांशीं एकरूप नाहीं, परंतु **निघालेल्या उत्तरांत** ते एकरूप आहेत; अशाप्रमाणें (अ+क्ष) (अ-क्ष) आणि अअ—क्षक्ष, यांची एकसारिखीच कृती नाहीं, तथापि त्यापासून सर्वदा एकसारिखेंच उत्तर होतें.

धन आणि ऋण परिमाणें निरवालस उलटये अर्थाचीं आहेत; जर + अ हा अ रुपयांची प्राप्ती असेल, तर — अ तितक्यांचा तोटा असावा; जर + अ हा अ रुपयांचा तोटा असेल, तर — अ तितक्यांची प्राप्ती असावी; जर + अ उत्तरेकडे कांहीं मोजलेली लांबी असेल, तर — अ तितकीच लांबी दक्षिणेकडे मोजली असावी; आणि याप्रमाणें पुढेंही.

दुसऱ्ये रूपानें या भेदाचा विचार सविस्तर दाखविला आहे. प्राप्ती झाली अशी कल्पना केली आणि अशा कल्पनेचें खरे समीकरणापासून असें उत्तर निघतें, कीं अ प्राप्ती झाली, तेव्हां पहिली कल्पना खरी होती; परंतु जर उत्तर — अ निघेल, तर पहिली कल्पना खोटी होती, आणि

परंतु केवळ चिन्ह आहे, जेणेंकरून असें दाखविलें जातें, कीं भलतें कांहीं परिमाण १ याणें दर्शविलेलें, तें दोन वेळा घेतलें. असें, ३—५ हें खरें रूपाचें चिन्ह आहे, परंतु गणितरूप परिमाणाचें चिन्ह नाहीं, कांकीं, ३, —, आणि ५, याचे गणितरूपाचा अर्थ उलटा करून कांहीं कृती करायास सांगतें.

अ रुपये तोटयाची कल्पना करायास योग्य होती. चुकी नीट करण्याचे जागीं चुकीचें चिन्ह राखिलें इतकाच मात्र एथे विस्तार केला. याविषयीं हेंच लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं विस्तार केल्याने घालमेल होत नाहीं, कांकीं खोटी कल्पना खरी करण्याची एकच रीति आहे. जर −अ हा एकापेक्षां अधिक चुक्या दाखवील, आणि कृत्यांत दुसरी चूक नीट करण्याचें अगत्य पडेल, तेव्हां पहिली चूक नीट करितानां − अ मांडणें हें खोटें आहे.

भूमितीला बीजगणित लागू केल्यानें, अशा तऱ्हेचा विस्तार करणें त्वरेनें कळेल.

क अ क ब

एका सरळ रेघेवर अ बिंदु असेल आणि त्याचे दोहोंकडे ती रेघ मोघम लांबीची असेल; अब अचे उजव्येकडे मोज, आणि ब पासून बक बचे डाव्येकडे मोज. जर बक पेक्षां अब मोठी असेल, तर कचे स्थानाचें योग्य वर्णन हेंच आहे, कीं तो अब − बक अचे उजव्येकडे एवढा लांब आहे. परंतु जर अब पेक्षां बक मोठी असेल, आणि क विषयीं वरचा गोष्टीसारिखें बोलायाचें आहे, तेव्हां अशक्यरूप वजाबाकी वरून कांहीं चुक आहे असें जाणविलें जातें, आणि त्वरेनें पहाण्यांत येतें, कीं कचे जाग्याचें योग्य लक्षण हेंच आहे, कीं अचे डाव्येकडे बक − अब एवढा लांब आहे.

लाक्षणिक अर्थानें जे शब्दार्थाचे विस्तार, ते बोलण्यांत आणि लिहिण्यांत फारच येतात, इतके कीं जा कृतींचा वर शोध झाला आहे, त्यांचा खरेपणा स्थापण्याविषयींही ते घेतले आहेत. प्राप्ती मिळविणें या वाक्यांत खरे रीतीनें अर्थाची द्विरुक्ती आहे, आणि प्राप्ती गमाविणें यांत विरुद्ध अर्थ आहे, या वाक्यांतील गमाविणें हा शब्द साधारण बोलण्यांत

न मिळवणें या अर्थानें योजितात. परंतु तोटा मिळवणें या शब्दांत अर्थाचा उघड सरळपणा आहे, ज्याचे मनांत नफा होईल असें होतें त्यास तोटा झाला असतां, अशी पुरुषावर कपट स्तुतीनें हे शब्द लावितात. उजेड आला याचेजागीं अंधकार गेला असें जेव्हां ह्मणतों, तेव्हां आपल्ये मनांत जी गोष्ट होती तिचा बोधक जो शब्द त्या सारिख्ये अर्थाचा दुसरा शब्द घेतल्यामुळें ही चूक झाली.

एक पदार्थ दुसरे पदार्थाशीं मिळविल्यानें कांहीं एक दृष्टिविषय होतो, असें आपण पदार्थज्ञानास गणित लावल्येसमयीं चुकीनें मनांत आणितों, परंतु खरें ह्मटलें असतां पदार्थापासून पदार्थ काढल्यानें तो दृष्टिविषय होतो, आणि याचें उलटें ही. असें पुष्कळ ठिकाणीं आढळतें, त्यांतील दोन उदाहरणें जीं बहुत करून लक्षांत ठेवण्यायोग्य तीं सांगतों.

१. रुक्ष हवा असल्ये त्यासमयीं कांच चामड्यावर घर्षण केली असतां, त्या दोन पदार्थांचे आंगीं बारीक बारीक पदार्थ आकर्षून घेण्याची शक्ति येत्ये, या शक्तीला विद्युल्लतेचें आकर्षण, अथवा विद्युत् ह्मणतात. पूर्वीं असें समजत असत, कीं घर्षणानें चामड्यापासून कांचेंत कांहीं प्रवाही पदार्थ शिरतो. असा कीं पहिल्यापेक्षां कांचेंत त्या पदार्थाचा कांहीं अधिक अंश होतो, आणि चामड्यांत कांहीं उणा होतो. यामुळें, कांचेला धन विद्युत् संबंध, आणि चामड्याला ऋण विद्युत् संबंध असें ह्मणत; आणि हा ऋण विद्युत्संबंध, त्यांतून कांहीं कमी केल्यानें घडला असें मानीत असत. परंतु काळांतरीच्या अनुभवावरून असें दिसलें, कीं त्या दोन पदार्थांचे घर्षणानें कांहीं एक मिश्र प्रवाही अथवा अप्रवाही पदार्थ अथवा त्याला दुसरें हवें तें नाव दिलें जाईल, त्या पदार्थापासून दोन निराळे अवयव उत्पन्न होतात आणि ते अवयव त्यांचे मूळचे प्रमाणानें संयुक्त झाले असतां, ते कोणास ही आकर्षित नाहीं, असा गुण त्यांचे आंगीं असतो परंतु एक दुसऱ्यापासून वियुक्त झाला ह्मणजे, तो वि-

योग आकर्षणानें दाखविला जातो. तर या दोन अवयवांतून एकाला कांचे-ची विद्युत्, आणि दुसऱ्यास **राळेची** विद्युत्, असें नाव दिलें आहे. शोध-ल्यानें असें कळलें कीं घर्षणानें पहिली धन विद्युत् **कांचेला** दिली, आणि दुसरी ऋण विद्युत् **राळेला** दिली. तथापि बहुत लोकांनी पूर्वींची **धन** आणि **ऋण** विद्युत् हीं जुनीं नावें राखिलीं आहेत; आणि तेणें करून कांहीं अडचण पडली नाहीं, कांकीं जास विद्युल्लतेच्या गणितरूप. दृश्यविषय म्ह-णतात, तो दोन्हीं कल्पनामध्यें एकसारिखाच असतो: कार्याचें कारण नाहींसें करणें अथवा जें कार्याचा नाश करितें त्याचा पुष्कळ अंश मिळवि-णें या दोन्ही कल्पनापासून फळ सारिखेंच आहे.

२. एकाद्या बंद केलेल्ये पात्रांमध्यें दिवा जळता ठेविला असतां असें दिसलें कीं जळण्याचा व्यापार चालवायास पात्रांतील **हवा** त्वरेनें अस-मर्थ होत्ये, आणि अशानें त्यांत उत्पन्न झालेली हवा, श्वासोश्वासाविषयीं अयोग्य होत्ये. यावरून स्पष्ट समजलें कीं हवेंमध्यें कांहीं फेर झाला; आणि अशी कल्पना केली कीं जोतीपासून कांहीं प्रवाही पदार्थ निघून हवेशीं मि-ळाला. या प्रवाही पदार्थाला **फ्लोजिस्टन** म्हणजे जोत करणारा असें ना-व दिलें. यामुळें अशी कल्पना धरली कीं जळण्यानें **फ्लोजिस्टना** हवे-शीं **मिळाला**. परंतु नंतर असा शोध लागला कीं जेव्हां कांहीं पदार्थ ज-ळतो, तेव्हां वस्तुतः कांहीं पदार्थ हवेंतून घेतला जातो, आणि त्या पदार्था-स आकुसिजन म्हणतात. दुसऱ्ये युक्तीनें असें आगळें कीं, आकुसिजन हवेचे मिश्राचा एक भाग आहे. यावरून **आकुसिजनाचें काढणें** हाज-ळण्याचा परिणाम आहे. जर फ्लोजिस्टनाचे कल्पनेवरून रसायण वि-द्येची कांहीं गणना नीट करायाची असेल, तर या अध्यायांत जी रीति सांगी-तली, तिजवरून, या पुढील कल्पनेनें होईल, कीं + अ फ्लोजिस्टन हें − अ आकुसिजन आहे.

३. **मिळवणी** आणि **वजाबाकी**. पदांचीं चिन्हें आहेत तशींच रा-

खून दोन पद्धती एकत्र करणें हा पहिल्ये शब्दाचा अर्थ आहे; दोन पद्धती असतील त्यांतून जी वजा करायाची आहे, तिचीं चिन्हें बदल करून त्या दोन पद्धती एकत्र करणें, हा दुसरे शब्दाचा अर्थ आहे. गणितानुरूप मिळवणी आणि वजाबाकी हे दोन विषय या शब्दांचे विशेष पक्ष आहेत, असें या पुढील उदाहरणापासून कळेल,

$$३+(५-२) \text{ अथवा } ३+(०+५-२)=३+५-२$$
$$८-(५-२) \text{ अथवा } ८-(०+५-२)=८-५+२$$

परंतु, या पुढील प्रमाणेंच मिळवणी आणि वजाबाकी मध्यें येतें

$$-३+(-५) \text{ हे } -३-५ \text{ अथवा } -८$$
$$-३-(-५) \text{ हे } -३+५ \text{ अथवा } +२$$

३. **बरोबर** दोन बीजगणितानुरूप पद्धतींतून, जर एक दुसरीचेजागीं चुकी वांचून मांडिली जाईल, तर त्या बरोबर आहेत असें ह्मणतात, आणि त्या दोहोंचे मध्यें = हें चिन्ह मांडितात. वर सांगीतल्या प्रमाणें, यांत गणितानुरूप बरोबरी आहे; कांतर ५+३, हे गणितानुरूपानें ८ यांचे बरोबर आहेत, तर ८ चेजागीं ते मांडिले जातील. परंतु हा शब्द बीजानुरूप अर्थानें यांस ही लागतो ह्मणजे, ३-७ आणि १०-१४, **११७ पृष्ठपहा**, अ+ (-ब) आणि अ-ब, यांस ही तो शब्द लागतो, आणि या प्रमाणें पुढें ही; आणि यानंतर बरोबर हा शब्द अधिक विस्ताराचे पक्षाला लाविला जाईल. एकाद्ये खोटये कल्पनेपासून या पुढील प्रमाणें होईल,

$$१-१+१-१+१-१+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

यांचें खरें उत्तर $\frac{१}{२}$ आहे. हें तरी याप्रमाणें मांडलें जाईल :

$$\frac{१}{२}=१-१+१-१+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

४. **अधिक** आणि **कमी**; **वाढ** आणि **घट**, जसा मिळवणी आणि वजाबाकी या शब्दाला विस्ताररूप अर्थ पाहिजे तसा यांस ही पाहिजे. गणिताचीं चिन्हें हीं आहेत,

० १ २ ३ ४ ५, इत्यादि.

आणि यांशिवाय त्यांचे मधले अपूर्णांक हेही आहेत; आणि भलत्ये दोहींतून जो अधिक आहे तो दुसऱ्याचे उजव्येकडे येतो. बीजगणिताचीं अंकचिन्हें हींच आहेत,

गणितानुरूप

....−४ −३ −२ −१ | ० +१ +२ +३ +४ इत्यादि.

ह्मणून वरचे बीजगणितरूप चिन्हास +१ बीजगणितरूपाचे रीतीप्रमाणें मिळविला असतां, त्याचीं पदें गणितरूपाप्रमाणें पुढें चालतात. कांकीं

−४ +१ = −३ −१ +१ = ०

−३ +१ = −२ ० +१ = +१

−२ +१ = −१ +१ +१ = +२

अधिक आणि **कमी** यांचें व्याख्यान ओळीचा दोहों बाजूंस बरोबर असूं दे; ह्मणजे भलत्ये कांहीं दोन परिमाणांतील, जें परिमाण उजव्येकडे येतें तें अधिक आहे. असें, याप्रमाणें −१ हा −२ पेक्षां अधिक असें ह्मणतात, +२ हे −१ पेक्षां अधिक, आणि याप्रमाणें पुढेंही.

यावरून. शब्दाचे विस्तृत अर्थानें, ही पुढील* प्रतिज्ञा निघत्ये:

सगळीं धन परिमाणें शून्यापेक्षां अधिक आहेत; सगळीं ऋण परिमाणें शून्यापेक्षां कमी आहेत. दोन धन परिमाणांतील, जें गणितरूपानें अधिक आहे, तें त्या दोहोंत अधिक आहे; दोन ऋण परिमाणांतील जें गणित रूपानें कमी आहे तें त्या दोहोंत अधिक आहे.

---

* या प्रतिज्ञेवरून नवे शिकणारे फार वचकतात, अंकगणितानुरूप परिमाण सांगीतल्याशिवाय, अधिक आणि कमी यांचा कांहींच अंकगणितानुरूप अर्थ नाहीं, ही गोष्ट पूर्वीं शिकणाराचे मनांत आणिली नाहीं हें त्यांचे वचकण्याचें कारण आहे.

वाढ आणि **घट** हे विस्तृत अर्थांचे शब्द **अधिक** आणि **कमी** या शब्दांचे जागीं चालतील. जेव्हां एकादें परिमाण अधिक करितात तेव्हां तें वाढतें, आणि जेव्हां तें कमी करितात तेव्हां तें घटतें. परंतु **लहान** हा शब्द, विस्तारावांचून त्याचा गणितानुरूप अर्थानें नेहेंमी ठेविला जाईल.

पहा. **वाढ** आणि **मिळवणी** इत्यादि यांचा भेद खालीं दाखविला आहे,

धन / ऋण	परिमाण मिळवल्यानें	वाढ / घट	होत्ये
धन / ऋण	परिमाण वजा केल्यानें	घट / वाढ	होत्ये

त्या पुढील प्रतिज्ञाही खच्या आहेत :

मिळविण्याचें परिमाण जितकें अधिक असतें, तितकें उत्तर अधिक होतें.

उदाहरण.

−७ हे −१० यांपेक्षां अधिक आहेत

३+ (−७) हे ३+ (−१०) यांपेक्षां अधिक आहेत

पहाण्यांत येतें, कांकीं −४ हे −७ यांपेक्षां अधिक आहेत.

यासारिखेंच **वजा करण्याचें परिमाण जितकें कमी आहे, तितकें त्याचें उत्तर अधिक आहे.** ३ यांतून −८ वजा कर, उत्तर +११ आहे; −८ यापेक्षां कांहीं कमी वजा कर, ह्मणजे −१२, तर उत्तर +१५ आहे, हें +११ पेक्षां अधिक आहे. −४ यांतून ७ वजा कर, उत्तर −११ आहे; ७ यांपेक्षां कांहीं कमी वजा कर, तर घे −३, उत्तर हेंच आहे −४ − (−३) −१, हा −११ पेक्षां अधिक आहे. आणि असें समजांत येईल

अथवा वजाबाकीविषयीं जीं सर्व कृत्यें गणितरूप परिमाणाविषयीं खरीं आहेत, तीं बीजगणितरूप परिमाणाविषयीं ही खरीं होतील; हें आपल्ये नव्ये व्याख्यानाचें विशेष फळ आहे. याविषयीं या पुढील गोष्टीवर नजर ठेव:

ब पेक्षां जर अ अधिक असेल, तर अ−ब धन आहे; जर ब पेक्षां अ कमी असेल, तर अ−ब ऋण आहे. जसें

−३−(−४)=+१   −३−(−२)= −१

अधिक आणि कमी यांचीं चिन्हें > आणि < हीं आहेत. जसें,

जेव्हां ब पेक्षां अ अधिक आहे, तेव्हां अ > ब, याप्रमाणें मांड.

जेव्हां ब पेक्षां अ कमी आहे, तेव्हां अ < ब, असें मांड.

कोनाचें तोंड मोठ्ये परिमाणाकडे असतें. बरोबरीचें चिन्ह, = यामध्यें कोणत्येही परिमायाकडे कांहीं कोन नसतो.

५. **गुणाकार** आणि **भागाकार**. अंकगणित परिमाणाविषयीं बीजगणिताचा गुणाकार आणि भागाकार यांचा रीती अंकगणितांतल्ये रीतिसारिख्याच आहेत. पूर्वीं पाहिल्याप्रमाणें, चिन्हाविषयीं, ही रीति आहे, **एकजाती**चे चिन्हापासून + होतें, **भिन्नजाती**चे चिन्हापासून − होतें.

+अ×+ब आणि −अ×−ब हे दोन्हीं +अब आहेत

−अ×+ब आणि +अ×−ब हे दोन्हीं −अब आहेत

$\frac{+अ}{+ब}$ आणि $\frac{-अ}{-ब}$ हे दोन्हीं $+\frac{अ}{ब}$ आहेत

$\frac{-अ}{+ब}$ आणि $\frac{+अ}{-ब}$ हे दोन्हीं $-\frac{अ}{ब}$ आहेत

जसें अंकगणितामध्यें गुणाकारांस अधिक आणि कमी हे शब्द लाविले जातात तसे बीजांत सर्वदा लावतां येत नाहीं. ह्मणजे, ३ > २, ५ > ४, यामुळें ३×५ > २×४; परंतु ३ > −२, −३ > −४, हे ३×−३ > −२×−४ अथवा −९ > ८ याप्रमाणें आहेत असें मानितां येत नाहीं, परंतु याचें उलटें होतें −९<८ असें आहे. परंतु गुण्य गुणकापासून गुणाकाराचें बीजगणितरूप प्रमाण काढण्याची क्वचित गरज पडेल, ह्मणून निरनिराळे पक्ष एकत्र करणें हें शिकणाराने पाहिजे असल्या-

सें करावें.

६. **प्रमाण**. जेव्हां पहिलें परिमाण दुसऱ्यानें भागिलें, आणि तिसरें परिमाण चवथ्यानें भागिलें असतां, जर ते दोन भागाकार बरोबर असतील, तेव्हां तीं चार पदें परस्पर प्रमाणांत आहेत, असें ह्मणतात. अंकगणितामध्यें प्रमाणाचें जें पूर्वीं व्याख्यान केलें तें आणि हें व्याख्यान शब्दांविषयीं एकच आहे, परंतु **परिमाण, भागिलें**, आणि **बरोबर**, या तीन शब्दांचा अर्थ याठिकाणीं विस्तीर्ण आहे. अंकगणितामध्यें जसें अधिक आणि कमी हे शब्द लावितात, तसे बीजांत सर्वदा लावतां येत नाहीं. जसें, $\frac{३}{-४}$ आणि $\frac{-६}{८}$ यापासून हें प्रमाण होतें, ३ : −४ : : −६ : ८; यांत −४ पेक्षां ३ अधिक आहेत, परंतु ८ पेक्षां −६ कमी आहेत.

आतां कृत्याला वरचीं व्याख्यानें लाऊन **११६ व्ये पृष्ठावरील** उदाहरण घेतों, कांकीं जेव्हां केवळ एकवर्णसमीकरणानें काम करायाचें असेल तेव्हां तीं दोन निरनिराळीं कृत्यें आहेत.

अ जवळ ६० रुपये आहेत, आणि बचे खातेवहीमध्यें जी शिलक बाकी, धन किंवा ऋण राहील, ती अ यास मिळावयाची आहे; परंतु क, जाजवळ २०० रुपये आहेत, त्याणें बची मालमत्ता घेउन त्याचें कर्ज फेडावें. असें केल्यानंतर दिसण्यांत येतें, कीं अचे मालमत्ते पेक्षां कची मालमत्ता तिप्पट आहे. तर बची शिलक बाकी घेणें अथवा देणें किती आहे?

शिलक बाकी दाखविण्यासाठीं क्ष घे, ही बचें घेणें किंवा देणें असेल त्याप्रमाणें धन किंवा ऋण होईल; तर अजवळ ६० ± क्ष, यांत जेव्हां क्ष धन आहे, तेव्हां धनचिन्ह कामांत घ्यावें,* जेव्हां क्ष ऋण आहे, तेव्हां

---

* वरच्या दोनी कल्पनांतून कोणतीही घेतली तरी अची मालमत्ता वाढते; यावरून, जर शिलक बाकी + ३ असेल, तर त्याचे जवळ ६० + (+३) होईल; परंतु जर शिलक बाकी −३ असेल तर त्याचे जवळ ६० − (−३) होईल.

ऋणचिन्ह घ्यावें. परंतु कर्जेजवळ २००+क्ष आहे; यामुळें,

$$३ (६०\pm क्ष) = २०० + क्ष$$

अथवा $\pm ३क्ष = २० + क्ष$

यांत दोन समीकरणें आहेत, एक धनचिन्हाचें, आणि एक ऋण चिन्हाचें. परंतु यावरून हेंच निघतें, कीं

$$\pm ३क्ष \times \pm ३क्ष = (२०+क्ष)\ (२०+क्ष)$$

या समीकरणाची पहिली बाजू दोन्हीं पक्षानीं +९क्षक्ष आहे, कांकीं −३क्ष×−३क्ष आणि +३ क्ष×+३ क्ष, बरोबरच आहेत; ह्मणजे, +९ क्ष क्ष. यामुळें

$$+ ९ क्षक्ष = ४०० + ४० क्ष + क्ष क्ष$$

अथवा $८ क्षक्ष - ४० क्ष - ४०० = ०$

(÷) ८ $क्षक्ष - ५ क्ष - ५० = ०$

दोनवर्णसमीकरणें उलगडल्येसमयीं, असें पहाण्यांत येईल, कीं हें समीकरण क्षचे केवळ दोन किमतीविषयीं मात्र खरें होऊं शकतें; क्ष = १०, अथवा क्ष = −५ असें असलें पाहिजे. ह्मणजे, बळा १० रुपये घेणें आहेत, अथवा ५ रुपये देणें आहेत; असेंच उत्तर **११६ व्ये पृष्ठावर** हीआलें आहे.

+१० अथवा −५ यांतून कोणतेंही घेतलें, तर त्याणें वरचें समीकरण स्थापिलें जातें, हें पुढें दाखविलें आहे:

क्ष = १०	क्ष = −५
क्षक्ष = १००	क्षक्ष = २५
−५क्ष = −५०	−५क्ष = +२५
−५० = −५०	−५० = −५०
क्षक्ष−५क्ष−५० = ०	क्षक्ष−५क्ष−५० = ०

जाअर्थी बीजगणिताचा विस्तार असा केला कीं अंकगणितरूप परिमाणें असतानां जारीती त्यांस लागतात त्याचरीती बीजगणितरूपें परिमाणेंजेव्हां

अंकगणितरूपाचीं नसतात तेव्हां त्यांजवर हीं लागाव्या. तर यावरून निघतें, कीं कृत्यांचा गणितानुरूप पक्ष सूचनार्थ घेतां येईल; कांकीं, कांहीं कृती अंकगणित रीतीप्रमाणें चालतात असें ह्मणणें, अथवा कृती गणितरूप आहे असें जाणून त्याप्रमाणें चालविणें, हीं दोन्ही शब्दभेदावांचून सारिखींच आहेत.

१३१ व्ये पृष्ठांपावेतों बीजगणितांतील चिन्हें, जीं अंकगणितरूपाचीं नाहींत, त्यांस **खोटये कल्पनेचीं उत्तरें** आहेत असें मानिलें, आणि त्यांशीं काम चालविण्याचा जासिती, त्यांस **नीट करण्याचा रीती** असें ह्मटलें आहे. **१३५ इत्यादि पृष्ठांत** व्याख्यान सरळ सांगीतल्यावरून, हीं चिन्हें येतील असें असून तीं आल्यानंतर त्यांची ओळख पडल्ये, ह्मणून विरुद्ध अथवा खोटा हा शब्द त्यांस लागू होत नाहीं. याविषयीं विचार करण्याचीजी पहिली रीति आहे ती शिकणारानें सोडून देऊं नये, परंतु **१२१, १२२ आदि पृष्ठावरचे** रीतीप्रमाणें काम करत्ये समयीं शिकणारानें निरंतर मनांत ठेवावें, कीं पूर्वींचे कृतींचा या रीतीशीं जो संबंध आहे त्याची पक्की माहित आहे; यापुढें दोन ही रीति कामांत घेतल्या जातील, परंतु मनांत ही गोष्ट धरली पाहिजे, कीं पहिली रीति कामांत घेतली असतां, दुसऱ्ये कृतीसाठीं जो विस्तार पाहिजे, तो क्षणमात्र सोडावा.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतों. $\overline{अ}$ आणि $-अ$ अशे तऱ्हेचीं चिन्हें भेद न ठेवितां कामांत घेतलीं आहेत. परंतु स्मरण ठेविलें पाहिजे कीं कृती करितानां तीं एकच अर्थाचीं आहेत, परंतु विचार करितानां तीं चिन्हें दोन निरनिराळ्ये रीतींवर लागतात.

$\overline{८} \times ४ \div \overline{३} = १०\frac{२}{३}$ $\qquad$ $\overline{८} \times \overline{४} \div \overline{३} = -१०\frac{२}{३}$ अथवा $\overline{१०\frac{२}{३}}$

$\overline{६} + \overline{८} - १२ = २$ $\qquad$ $(-६)+(-८)+(-१३) = -२७$

$\frac{\overline{अ}\,\overline{ब}+\overline{कड}}{\overline{म}} = \frac{कड-अब}{म}$ $\qquad$ $\frac{(-अ)\times(-ब)\times क}{ड} = -\frac{अबक}{ड}$

$\frac{अ-\overline{ब}}{अ+\overline{ब}}\times \overline{क} = \frac{अ+ब}{ब-अ}क$ $\qquad$ $\frac{-अ- \ -ब}{अ+ \ -ब} = -१$

$अ\overline{ब}-ब\overline{अ} = ०$ $\qquad$ $अ(-ब)+ब(-अ) = -२अब$

$अ\overline{ब}क = \overline{अ}बक = अब\overline{क} = अबक = -अबक$.

तिसरा अध्याय.

एकापेक्षां अधिक अव्यक्त परिमाणें आहेत, अशा एकवर्णसमीकरणांविषयीं.

या पुढील प्रमाणें एक समीकरण असावें,

$$क्ष + य = १२$$

ज्या एकाद्या कृत्यांत क्ष आणि य अशीं दोन अव्यक्त परिमाणें आहेत, त्यापासून वरचें समीकरण झालें आहे, अशी कल्पना कर. त्याच सारिखें हें पुढील कृत्य आहे:

अ क ब

कृत्य. . एक सरळरेषेंत **अ** बिंदु दिला आहे, आणि त्याच रेषेंत **ब** आणि **क** दुसरे दोन बिंदु आहेत. **अ** पासून **ब** आणि **क** यांचे मध्यापावेतों ६ फुटी आहेत. तेव्हां **ब** आणि **क** हे **अ** पासून किती लांब आहेत?

ब आणि **क** हे दोन्हीं **अ**चे एक्याच बाजूकडे आहेत, हा मुख्य पक्ष आहे असें मान. **अब** = क्ष फुटी, **अक** = य फुटी असें घे; तर **बक** = क्ष−य, आणि **ब** पासून **ब** आणि **क** यांचे मध्यापावेतों $\frac{१}{२}$ (क्ष−य) आहे; यामुळें **अ** पासून त्या मध्यबिंदू पावेतों लांबी याप्रमाणें आहे,

$$क्ष - \frac{१}{२}(क्ष - य) \text{ हे संकेताप्रमाणें } = ६$$

$$(\times)२ \qquad २क्ष - (क्ष - य) = १२ \text{ अथवा } क्ष + य = १२$$

यास **अनियत** कृत्य म्हणतात, म्हणजे, त्याचें अनंत तऱ्हेनें उलगडणें होतें. क्ष आणि य याविषयीं इतका मात्र संकेत सांगीतला कीं त्यांची बेरीज १२ असावी, म्हणून हा संकेत अनंत तऱ्हांनीं स्थापिला जातो; कांकीं हे सगळे पुढील

पक्ष हे उदाहरण उलगडण्याचे आहेत, आणि इच्छेप्रमाणें दुसरेही नवे केले जातील.

क्ष = १	य = ११	क्ष = $\frac{१}{२}$	य = ११$\frac{१}{२}$
क्ष = २	य = १०	क्ष = २$\frac{१}{४}$	य = ९$\frac{३}{४}$
क्ष = ३	य = ९	क्ष = ३$\frac{२}{५}$	य = ८$\frac{३}{५}$
इत्यादि.		इत्यादि.	

पुनः, जेव्हां क्ष आणि य यांतून एक ऋण असेल, तर या पुढील प्रमाणें उलगडणें होतें:

क्ष = −१	य = +१३	क्ष = १५	य = −३
क्ष = −२	य = +१४	क्ष = १६	य = −४
क्ष = −१$\frac{१}{२}$	य = +१३$\frac{१}{२}$	क्ष = १२$\frac{३}{५}$	य = −$\frac{३}{५}$
इत्यादि.		इत्यादि.	

जेव्हां **ब** मात्र **अ**चे डाव्ये बाजूस आहे तेव्हां त्यापक्षीं वरचे डाव्ये बाजूचीं उदाहरणें **७० पासून ७९ पृष्ठांपर्यंत** जा गोष्टी सांगीतल्या त्यांशीं मिळतीं आहेत; आणि जेव्हां **क** मात्र **अ**चे डाव्येकडे आहे तेव्हां उजव्ये बाजूचीं उदाहरणें त्यांशीं मिळतीं आहेत. जसें, जर **ब** १ फुट **अ**चे डाव्येकडे आणि **क** १३ फुटीउजव्येकडे असेल, तर **क** आणि **ब** यांचा मध्य बिंदू **अ** पासून ६ फुटीउजव्येकडे आहे. पहा कीं जर मध्य बिंदु **अ**चे डाव्येकडे येतो, असे पक्ष क्ष+य=१२ या एकवर्णसमीकरणांत येऊं शकत नाहीं; कांकीं कृत्यांतील दिलेला ६ हा अंक अंकगणितरूप अथवा धन बीजरूप आहे असें जाणून, त्याशीं सर्व कृती झाल्या, ह्मणून जा पक्षांत ६ याणी दाखविलेली रेघ अशी तऱ्हेने मोजली असल्ये, कीं तिचें चिन्ह ऋण असतें, असे पक्ष त्या ६ पासून झालेल्ये समीकरणांत आयाववत नाहीं.*

---

* कृत्य पुनः वाचून, विचार केला असतां, हें पहाण्यांत येतें, कीं ६ फुटी अचे उजव्येकडे किंवा डाव्येकडे हें सांगीतलें नाहीं, अथवा असें असेल, कीं ११६ष्ट छावर सांगीतल्या

वरचे आणि त्यासारिखेच पक्षांपासून हीं पुढील मूळकारणें काढिलीं आहेत:

१. जा कोणत्या एकासमीकरणांत दोन अव्यक्त पदें आहेत तें समीकरणउलगडण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत; ह्मणून त्या दोन अव्यक्त परिमाणांतून एकाची किंमत इच्छेप्रमाणें घेऊन, दुसऱ्याला योग्य किंमत दिली असतां समीकरण स्थापिलें जाईल.

२. जा कृत्यापासून अशे तऱ्हेचें समीकरण होतें तें कृत्य अनियत आहे, अथवा त्याचा उलगडण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत.

आतां दोन समीकरणें मनांत घे, अशीं कीं प्रत्येकामध्यें सारिखींच दोन अव्यक्त परिमाणें येतील. उदाहरण,

क्ष+य=१२ ३क्ष−२य=३१

या दोहींतून एक एक निरनिराळें घेतलें असतां, प्रत्येकाचें उलगडणें करण्याचा अनंत तऱ्हा आहेत. असें या पुढील प्रमाणें:

पहिल्ये समीकरणाचीं उलगडणीं		दुसऱ्ये समीकरणाचीं उलगडणीं	
क्ष=१०	य=२	क्ष=१०	य=−$\frac{१}{२}$
क्ष=१०$\frac{१}{२}$	य=१$\frac{१}{२}$	क्ष=१०$\frac{१}{२}$	य= $\frac{१}{४}$
क्ष=११	य=१	क्ष=११	य= १
क्ष=११$\frac{१}{४}$	य=$\frac{३}{४}$	क्ष=११$\frac{१}{४}$	य= $\frac{११}{८}$.
इत्यादि.		इत्यादि.	

प्रमाणें त्यांत दोन निरनिराळीं कृत्यें असतील, अथवा १४३ आणि १४४ पृष्ठांवर सांगितल्या प्रमाणें तीं दोन कृत्यें एक्या दोनवर्णसमीकरणानें दर्शिवलीं जावीं, या सर्व गोष्टी सांगीतल्या नाहींत ह्मणून कृत्य उघडें दाखविलें गेलें नाहीं. जो शिकणारा हे दोन पक्ष एक्या समीकरणांत आणायास इच्छील, त्यासाठीं हें समीकरण मांडून दाखविलें आहे

क्षक्ष+यय+२क्षय = १४४

वरचे दोहों ओळींचे समीकरणांमध्यें क्षचा किमती एकसारिख्याच घेतल्या आहेत; आणि असें कळतें, कीं बहुतकरून, यचा किमती निरनिराळ्या आहेत, परंतु एक विशेष पक्षांत यचा किमती एकसारिख्याच आहेत: ह्मणजे, क्ष=११, आणि य=१ अशा किमती सांपडतात, त्या किमतींनी दोन्हीं समीकरणें स्थापिलीं जातात. तर आतां हाच विचार केला पाहिजे, कीं पहिलें अथवा दुसरें समीकरण स्थापणाऱ्या अनंत किमतींतून तीं दोन्हीं समीकरणें स्थापणाऱ्या अशा किमती किती आहेत? तर अशी किंमत एकच आहे, असें या पुढील कृतीवरून कळेल.

जर क्ष+य=१२, तर क्ष=१२−य. क्षची ही किंमत दुसऱ्ये समीकरणांत मांड, असें करायास शक्य, कांकीं दुसऱ्ये समीकरणाचीं जीं उलगडणीं सांपडायाची इच्छा आहे तीं आणि पहिल्ये समीकरणाचीं उलगडणीं एकच आहेत, आणि अशानें निघतें कीं ३(१२−य)−२य=३१, अथवा ३६−५य=३१, अथवा य=१. यावरून दिसतें, कीं जर क्ष+य=१२ असें आहे तर य=१ आणि क्ष=११ असें असल्याशिवाय हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत असें त्यांचे दुसऱ्ये कोणत्येही किमतींनीं स्थापिलें जात नाहीं.

या पुढील प्रमाणें समीकरणें सांगीतलीं आहेत असें मनांत आण.

अक्ष+बय=क पक्ष+कय=र

यांत अ, ब, क, प, क, आणि र हीं व्यक्त परिमाणें आहेत असें मान.

पहिली रीति. अव्यक्त पदांतील एकाची किंमत एक समीकरणावरून काढ, आणि ती किंमत दुसऱ्ये समीकरणांत त्याचेजागीं मांड. तसें केल्यानें जें समीकरण होतें त्यांत एकच अव्यक्त परिमाण राहील.

वरचे पहिल्ये समीकरणापासून,

$$क्ष=\frac{क-बय}{अ}$$

ही किंमत क्षचेजागीं दुसऱ्ये समीकरणांत मांडिली असतां, हेंच होईल.

$$\frac{\text{पक}-\text{पबय}}{\text{अ}}+\text{क़य}=\text{र} \quad \text{अथवा} \quad \text{य}=\frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक़}-\text{बप}}$$

क्षची किंमत काढायासाठीं, पहिल्ये समीकरणांतून यची किंमत काढ, आणि वरची कृती फिरून कर, त्यावरून

$$\text{य}=\frac{\text{क}-\text{अक्ष}}{\text{ब}}, \quad \text{तर}\ \text{पक्ष}+\frac{\text{कक़}-\text{क़अक्ष}}{\text{ब}}=\text{र}, \quad \text{क्ष}=\frac{\text{कक़}-\text{बर}}{\text{अक़}-\text{बप}}$$

अथवा जी यची किंमत पहिली सांपडली, ती पूर्वींचे पद्धतींत क्षचे जागीं मांड; याप्रमाणें,

$$\text{क्ष}=\frac{\text{क}-\text{बय}}{\text{अ}}, \qquad \text{बय}=\frac{\text{बअर}-\text{बकप}}{\text{अक़}-\text{बप}}$$

$$\text{क}-\text{बय}=\frac{\text{कअक़}-\text{कबप}-(\text{बअर}-\text{बकप})}{\text{अक़}-\text{बप}}=\frac{\text{कअक़}-\text{बअर}}{\text{अक़}-\text{बप}}$$

$$=\frac{\text{अ}(\text{कक़}-\text{बर})}{\text{अक़}-\text{बप}} \ \therefore \text{क्ष} \quad \text{अथवा} \ \frac{\text{क}-\text{बय}}{\text{अ}}=\frac{\text{कक़}-\text{बर}}{\text{अक़}-\text{बप}}.$$

ताळा. जर $\text{क्ष}=\frac{\text{कक़}-\text{बर}}{\text{अक़}-\text{बप}}$, आणि $\text{य}=\frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक़}-\text{बप}}$

$$\text{तर} \quad \text{अक्ष}+\text{बय}=\frac{\text{अकक़}-\text{अबर}}{\text{अक़}-\text{बप}}+\frac{\text{अबर}-\text{बकप}}{\text{अक़}-\text{बप}}$$

$$=\frac{\text{अकक़}-\text{बकप}}{\text{अक़}-\text{बप}}=\frac{\text{क}(\text{अक़}-\text{बप})}{\text{अक़}-\text{बप}}=\text{क}$$

$$\text{पक्ष}+\text{क़य}=\frac{\text{कपक़}-\text{बपर}}{\text{अक़}-\text{बप}}+\frac{\text{अक़र}-\text{कपक़}}{\text{अक़}-\text{बप}}=\text{र}$$

दुसरी रीति. दोहों समीकरणास अशा रीतीने गुण, कीं जा पदां मध्यें सारिखीं अव्यक्त परिमाणें आहेत त्यांस एकसारिखेच गुणकांक होतील; नंतर सारिखीं पदें नाहींशीं व्हावयासाठीं, गुणाकारांची मिळवणी अथवा वजाबाकी कर. बहुतकरून, हीच सरळ रीति आहे: जा परिमाणाची दुसऱ्ये समीकरणांत गरज नाहीं त्याचे गुणकाने प्रत्येक समीकरण गुण.

यची किंमत काढायाची.

$$\begin{array}{llll}
 & \text{अक्ष}+\text{बय}=\text{क} & (\times)\text{प} & \text{पअक्ष}+\text{पबय}=\text{पक}\\
 & \text{पक्ष}+\text{क़य}=\text{र} & (\times)\text{अ} & \text{पअक्ष}+\text{क़अय}=\text{अर}\\
(-) & & & \text{अक़य}-\text{बपय}=\text{अर}-\text{कप}\\
(\div) & \text{अक़}-\text{बप} & & \text{य}=\frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक़}-\text{बप}}
\end{array}$$

क्षची किंमत काढायाची.

अक्ष + बय = क   (×) फ   अफक्ष + बफय = कफ

पक्ष + फय = र   (×) ब   बपक्ष + बफय = बर

(−) अफक्ष − बपक्ष = कफ − बर

(÷) अफ − बप   क्ष = $\frac{\text{कफ} - \text{बर}}{\text{अफ} - \text{बप}}$

तिसरी रीति. प्रत्येक समीकरणापासून एक अव्यक्त परिमाणाची किंमत काढ, आणि या काढिल्येल्या किंमती बरोबरीस मांड.

पहिल्ये समीकरणापासून   य = $\frac{\text{क} - \text{अक्ष}}{\text{ब}}$ क्ष = $\frac{\text{क} - \text{बय}}{\text{अ}}$

दुसऱ्ये समीकरणापासून   य = $\frac{\text{र} - \text{पक्ष}}{\text{फ}}$ क्ष = $\frac{\text{र} - \text{फय}}{\text{प}}$

∴ $\frac{\text{क} - \text{अक्ष}}{\text{ब}} = \frac{\text{र} - \text{पक्ष}}{\text{फ}}$ क्ष = $\frac{\text{कफ} - \text{बर}}{\text{अफ} - \text{बप}}$

$\frac{\text{क} - \text{बय}}{\text{अ}} = \frac{\text{र} - \text{फय}}{\text{प}}$ य = $\frac{\text{अर} - \text{कप}}{\text{अफ} - \text{बप}}$

आतां पुढील समीकरणें वरच्ये तीन रीतींनीं शिकणाराने पुनःपुनः उलगडावीं १०६ पृष्ठ पहा.

अक्ष + बय = क
अ′क्ष + ब′य = क′   } यांपासून   { क्ष = $\frac{\text{कब}' - \text{बक}'}{\text{अब}' - \text{बअ}'}$, य = $\frac{\text{अक}' - \text{कअ}'}{\text{अब}' - \text{बअ}'}$ }

(१.) ३क्ष − २य = १४   (×)२   ६क्ष − ४य = २८

२क्ष + ३य = १००   (×)३   ६क्ष + ९य = ३००

(−) १३य = २७२   य = २० $\frac{१२}{१३}$

(×)३ ९क्ष − ६य = ४२   (×)२   ४क्ष + ६य = २००

(+) १३क्ष = २४२   क्ष = १८ $\frac{८}{१३}$

(२.) क्ष + य = अ   क्ष − य = ब

(+) २क्ष = अ + ब   क्ष = $\frac{\text{अ} + \text{ब}}{२}$

(−) २य = अ − ब   य = $\frac{\text{अ} - \text{ब}}{२}$

(३.) पक्ष + य = १   क्ष − पय = २

पहिलें, $पक्ष+य = १$

दुसरें, (×) प $पक्ष-पपय = २प$

(−) $य+पपय = १-२प$ $य = \frac{१-२प}{१+पप}$

$१-य = \frac{पप+२प}{१+पप}$ $क्ष = \frac{१-य}{प} = \frac{प+२}{१+पप}$

(४.) $३क्ष-७ = ४+(क्ष+य)$ अथवा $२क्ष-य = ११$

$२य+७९ = ५क्ष$ अथवा $५क्ष-२य = ७९$

पहिल्याला, (×)५ $१०क्ष-५य = ५५$

दुसऱ्याला, (×)२ $१०क्ष-४य = १५८$

(−) $य = १०३$

पहिल्यापासून, $क्ष = \frac{११+य}{२} = ५७$

(५.) $३क्ष+४य = १३$ $४क्ष+५य = १०$

(×)४ $१२क्ष+१६य = ५२$ (×)३ $१२क्ष+१५य = ३०$

(−) $य = ५२-३० = २२$

(×)५ $१५क्ष+२०य = ६५$ (×)४ $१६क्ष+२०य = ४०$

(−) $क्ष = ४०-६५ = -२५$

जा कृत्यापासून असें समीकरण झालें त्याशीं पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें समीकरण फिरवून उत्तर नीट केलें पाहिजे.

$\left.\begin{array}{l}अक्ष+बय=क\\ पक्ष+क्रय=र\end{array}\right\}$ अशीं दिलीं असतां $क्ष=\frac{कक्र-बर}{अक्र-बप}$ $य=\frac{अर-कप}{अक्र-बप}$

यांपासून हीं पुढील निघतील:

$\left\{\begin{array}{l}अक्ष-बय=क\\ पक्ष-क्रय=र\end{array}\right.$ $क्ष=\frac{कक्र-बर}{अक्र-बप}$ $\left.य=\frac{कप-अर}{अक्र-बप}\right\}$

$\left\{\begin{array}{l}अक्ष-बय=क\\ क्रय-पक्ष=र\end{array}\right.$ $क्ष=\frac{कक्र+बर}{अक्र-बप}$ $\left.य=\frac{अर+कप}{अक्र-बप}\right\}$

वरचे पहिले दोन समीकरणसमुदाय पाहिल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं त्या

मध्यें इतका भेद आहे, कीं पहिल्यांत + बय + कय याचे जागीं दुसऱ्यांत – बय – कय आहे. परंतु **११७ व्ये पृष्ठावर** सांगितल्या प्रमाणें ठाऊक आहे, कीं अक्ष + ब̄य यांस नीट करून मांडिलें असतां त्याचें रूप अक्ष – बय आहे, आणि पक्ष + क̄य यास नीट करून मांडिल्याने त्याचें रूप पक्ष – कय आहे; आणि वर सिद्ध झालें कीं नीटकरणें, कृतीचा इच्छे त्या पायरी पर्यंत ठेविलें जाईल, तर हीं पुढील उलगडणीं कामांत घेतलीं जातील

$$\text{अक्ष}+\text{ब̄य}=\text{क} \qquad \text{क्ष}=\frac{\text{कक̄}-\text{ब̄र}}{\text{अक̄}-\text{ब̄प}} \qquad \text{य}=\frac{\text{अर}-\text{कप}}{\text{अक̄}-\text{ब̄प}}$$
$$\text{पक्ष}+\text{क̄य}=\text{र}$$

असें घेतल्यानें समजांत येईल, कीं नीट केलेलीं उलगडणीं नीट केलेल्या समीकरणाचीं खरीं उत्तरें आहेत. असें केलें तर वर प्रमाणें उत्तरें निघतील; कारण कीं **१२६ व्ये पृष्ठावरचे** रीतीप्रमाणें क्षची किंमत नीट केली असतां, याप्रमाणें होईल.

$$\text{क्ष}=\frac{-\text{कक}+\text{बर}}{-\text{अक}+\text{बप}} \text{ अथवा } \frac{\text{बर}-\text{कक}}{\text{बप}-\text{अक}} \text{ अथवा } \frac{\text{कक}-\text{बर}}{\text{अक}-\text{बप}}$$ **१४२ वें पृष्ठ पहा.**

आणि य विषयीं अशी कृती केली पाहिजे*. याच रीतीप्रमाणें, अक्ष + बय + कज्ञ, अशा पद्धती पासून जें उत्तर निघेल त्यापासून अक्ष – बय – कज्ञ अथवा कज्ञ + बय – अक्ष अथवा **चिन्हांचे** भेदानें झालेल्या पद्धतीचीं उत्तरें मिळतील. आतां वेगवेगळाले पक्ष निघतील, ते, आणि त्यांतून सर्वांचा दर्शक जो ठरविला त्यास ते पक्ष जोडून पहाण्याची रीति या दोन गोष्टीखालीं लिहितों

यापुढील	याप्रमाणें मांडिलें जाईल	अथवा याप्रमाणें
अक्ष + बय – कज्ञ	अक्ष + बय + क̄ज्ञ	अक्ष + बय + कज्ञ̄
अक्ष – बय – कज्ञ	अक्ष + ब̄य + क̄ज्ञ	अक्ष + बय̄ + कज्ञ̄ इत्यादि
बय – अक्ष – कज्ञ	अ̄क्ष + बय + क̄ज्ञ	अ̄क्ष + बय + कज्ञ̄ इत्यादि.
इत्यादि.	इत्यादि.	इत्यादि.

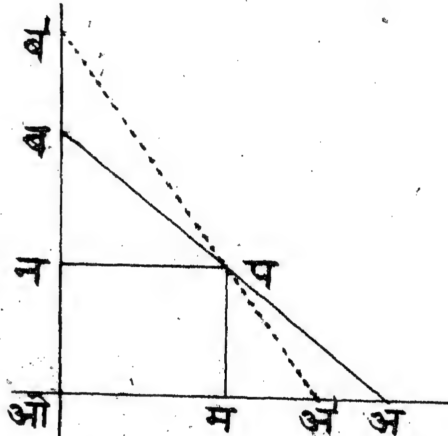
* शिकणारानें, पुस्तकांत उदाहरणें दिलीं आहेत त्याशिवाय दुसरीं उदाहरणें काढून उलगडून पाहिलीं पाहिजेत.

सर्वांचे दर्शकाविषयीं भलता कांहीं दुसरा पक्ष घेतला जाईल.असें,अक्ष-बय—कज्ञ असें असेल, तर अक्ष+बय+कज्ञ ही पद्धती अक्ष—बय—कज्ञ याप्रमाणें मांडिली जावी.

कृत्य. सरळ रेघांचे छेदनाविषयीं.

मूळकारण. **बओअ** भलता कांहीं कोन असावा, ह्मणून एथे काटकोन कर. आणि जा रेघांत तो कोन येतो, त्या रेघांस **अ ब** स्थळावर छेदून**अब** सरळरेघ कर, **अब** रेघेवर कोठेही **प** बिंदूपासून **पन** रेघ **ओअ**शीं समांतर आणि **पम** रेघ **ओब** शीं समांतर अशा दोन रेघा केल्या असतील, आणि **ओअ, ओब, पम, पन,** ह्या सर्व एक जातीचे एकंमानें मोजल्या तर, **पम,** ह्मणजे रेघ अर्थ नव्हे परंतु त्यांत जितके एकंम असतील, ते समजून, **पम** आणि **ओअ** यांचा गुणाकार **पन** आणि **ओब** यांचे गुणाकाराशीं मिळविला असतां, त्या दोहोंची बेरीज **ओअ** आणि **ओब** यांचे गुणाकाराचे बरोबर होईल. ही गोष्ट भूमितीमध्यें सिद्ध केली आहे.

अथवा $$पम\times ओअ+पन\times ओब=ओअ\times ओब.$$



अब आणि **अ'ब'** अशा दोन रेघा **प** बिंदूवर **बओअ** या कोनांत परस्परांस छेदित, अशा असाव्या; **ओअ, ओब, ओअ',** आणि **ओब',** हे दिले आहेत, तर **पन** आणि **पम** यांची किंमत काय.

याप्रमाणें असावें

ओअ = १० एकं   ओअ′ = ७ एकं

ओब = ८ ..   ओब′ = १५ ..

पन = क्ष एकं

पम = य ..

तर वरचे मूळकारणाप्रमाणें प बिंदू अब रेघेवर आहे, ह्मणून,

ओअ × पम + ओब × पन = ओअ × ओब अथवा १० य + ८ क्ष = ८०

पुनः त्याच कारणावरून प बिंदू अ′ब′ रेघेवर आहे, ह्मणून,

ओअ′ × पम + ओब′ × पन = ओअ′ × ओब′ अथवा ७ य + १५ क्ष = १०५

एथे दोन समीकरणें आहेत जीपासून य आणि क्ष ह्यांचा पत्ता लावावा. वरचे कोणत्याही रीतीने यांस उलगडलें असतां, याप्रमाणें निघेल.

क्ष अथवा पन = ५ $\frac{१०}{४७}$ एकं;   य अथवा पम = ३ $\frac{३९}{४७}$ एकं.

सामान्य पक्ष. याप्रमाणें असावें

ओअ = अ एकं   ओअ′ = अ′ एकं

ओब = ब ..   ओब′ = ब′ ..

पन = क्ष एकं

पम = य ..

१५० आणि १५१ व्या पृष्ठावरचे, दुसऱ्ये रीतीप्रमाणें, यापासून झालेलीं समीकरणें उलगडलीं असतां, याप्रमाणें होईल

अय + बक्ष = अब

अ′य + ब′क्ष = अ′ब′

अ′अय + अ′बक्ष = अअ′ब   अब′य + बब′क्ष = अबब′

अअ′य + अब′क्ष = अअ′ब′   अ′बय + बब′क्ष = अ′बब′

(अ′ब − अब′) क्ष = अअ′ (ब − ब′)   (अ′ब − अब′) य = बब′ (अ′ − अ)

क्ष = अअ′ $\frac{ब - ब′}{अ′ब - अब′}$ य = बब′ $\frac{अ′ - अ}{अ′ब - अब′}$

ताळा.

$$\text{अय} + \text{बक्ष} = \text{अबब}'\,\frac{\text{अ}'-\text{अ}}{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}} + \text{अबअ}'\,\frac{\text{ब}-\text{ब}'}{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}}$$

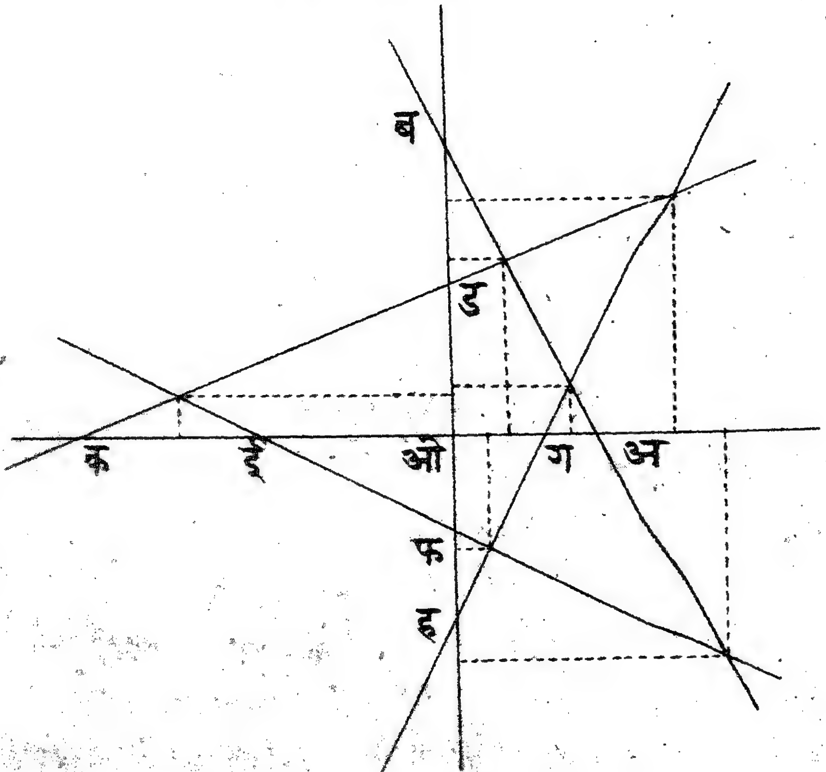
$$= \text{अब}\left\{\frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} + \frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अ}'\text{ब}'}{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}}\right\}$$

$$= \text{अब}\,\frac{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}}{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}} = \text{अब}$$

$$\text{अ}'\text{य} + \text{ब}'\text{क्ष} = \text{अ}'\text{बब}'\,\frac{\text{अ}'-\text{अ}}{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}} + \text{अअ}'\text{ब}'\,\frac{\text{ब}-\text{ब}'}{\text{अब}'-\text{अ}'\text{ब}}$$

$$= \text{अ}'\text{ब}'\left\{\frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} + \frac{\text{अब}-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}\right\}$$

$$= \text{अ}'\text{ब}'\,\frac{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'}{\text{अ}'\text{ब}-\text{अब}'} = \text{अ}'\text{ब}'$$



वरचे आकृतीमध्यें **अब**, **कड**, **ईफ**, आणि **गह**, ह्या चार रेघा आहेत, त्या आंसांस* जितक्या प्रकारांनी छेदूं शकवेल तितक्या प्रकारांनी छेदितात, ह्मणजे **ओअ** आणि **ओब** या दोहोंस त्यांतल्या कोणत्याही दोन रेघा **ओ**चे एक्ये बाजूस छेदीत नाहींत. यामुळें आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें साहा छेदनबिंदू आहेत, आणि त्यांपासून **ओअ** आणि **ओब** या आंसावर लंब रेघा आकृतींत दाखविल्या आहेत; परंतु त्यांजवर कांहीं अक्षरें लिहिलीं नाहींत, कांकीं ज्या छेदनबिंदूविषयीं विचार करायाचा त्या स्थळीं **प** हें अक्षर मांडिलें आहे असें मनांत आणावें, आणि त्या बिंदूपासून आंसावर जे लंब आहेत, ते आकृतीप्रमाणें **पम** आणि **पन** आहेत असें समजावें.

ज्या अंतरावर त्या चार रेघा आंसांस छेदितात तीं अंतरें एकच जातीचे एकंमाचीं असावीं: ह्मणून

ओअ = ३ **ओक** = ८ **ओई** = ४ **ओग** = २
ओब = ६ **ओड** = ३ **ओफ** = २ **ओह** = ४

अब आणि **कड** यांचे छेदनबिंदूचा पहिल्याने विचार कर, छेदनस्थळीं **प** मांड, आणि पहिल्ये आकृतीप्रमाणें, **पम** = य आणि **पन** = क्ष घे. तर आरंभीं सांगितल्ये मूळकारणाप्रमाणें **प** बिंदू **अब** रेघेवर आहे,

३य + ६क्ष = १८

परंतु **कड** रेघेकडे लक्ष्य दिलें असतां, दिसण्यांत येतें, कीं पहिल्याने तें मूळकारण तिजवर नीट लागत नाहीं, कांकीं **कड** रेघ **बओअ** कोनांत नाहीं, परंतु त्याचाजवळचा **बओक** कोनांत आहे. दुसऱ्याने, **ओक** रेघ ८ एकं लांबीची **ओअ** या दिशेस मोजलेली नाहीं, परंतु उलट्ये दिशेस मोजली आहे. यामुळें, जर ८ यांचे जागीं ‾८ असें मांडिलें, आणि **ओक** ही रेघ **अ** कडे मोजली आहे असें मानून जें समीकरण येतें, तसें ‾८ या रूपापासून ही येतें, त्यास, **१४५ व्ये पृष्ठाप्रमाणें**, नी-

* **ओअ** आणि **ओब** या मुख्य रेघा आंत वर सांगीतलेला कोन येतो, त्या रेघा दोहींकडे वाढविल्या असतात, त्यां रेघांस आंस ह्मणतात.

ट केल्यानें, पुढें कृती चालवायास दुसरें समीकरण मिळेल. ह्मणजे प बिंदू कड रेघेवर आहे, यामुळें याप्रमाणें होईल,

$\overline{८}$य+३क्ष=$\overline{८}$×३, अथवा १४५ पृष्ठाप्रमाणें, −८य+३क्ष=$\overline{२४}$ = −२४

अथवा ८य−३क्ष=२४

३क्ष−८य=−२४ हें दाखवितें, कीं ८य हे ३क्ष पेक्षां २४ इतक्यानें अधिक आहेत, यामुळें याप्रमाणें मांडिलें जाईल, ह्मणजे ८य−३क्ष=२४

वर निघालेलीं दोन समीकरणें उलगडून

३य+६क्ष=१८ }
८य−३क्ष=२४ } यापासून हेंच होईल { क्ष = १$\frac{५}{१९}$
{ य = ३$\frac{९}{१९}$

याचा, आणि पुढील उत्तराचा ताळा, आकृती मोजल्यानें, आणि समीकरणा वरून ही कळेल.

यांतल्या प्रत्येक पक्षाला ही रीति लागू करायासाठीं, जा रेघा ओअ किंवा ओब याचे दिशेस येत नाहींत, त्या सर्वांस ऋण चिन्हानें दर्शविल्या पाहिजेत. ह्मणजे,

ओअ = ३ ओक = $\overline{८}$ ओई = $\overline{४}$ ओग = २

ओब = ६ ओड = ३ ओफ = $\overline{२}$ ओह = $\overline{४}$

मागल्या शेवटील पक्षाप्रमाणें यांशीं कृती केली असतां, हें पुढील प्रमाणें निघेल:

रेघांचें छेदणें.	समीकरणें.	नीट केलेलीं समीकरणें.
१. अब आणि कड	३य+६क्ष = १८ $\overline{८}$य+३क्ष = $\overline{२४}$	३य+६क्ष = १८ ८य−३क्ष = २४
२. अब आणि ईफ	३य+६क्ष = १८ $\overline{४}$य+$\overline{२}$क्ष = $\overline{४}$×$\overline{२}$	३य+६क्ष = १८ ४य+२क्ष = −८
३. अब आणि गह	३य+६क्ष = १८ २य+$\overline{४}$क्ष = २×$\overline{४}$	३य+६क्ष = १८ २य−४क्ष = −८
४. कड आणि ईफ	$\overline{८}$य+३क्ष = $\overline{२४}$ $\overline{४}$य+$\overline{२}$क्ष = $\overline{४}$×$\overline{२}$	८य−३क्ष = २४ ४य+२क्ष = −८
५. कड आणि गह	$\overline{८}$य+३क्ष = $\overline{२४}$ २य+$\overline{४}$क्ष = २×$\overline{४}$	८य−३क्ष = २४ २य−४क्ष = −८
६. ईफ आणि गह	$\overline{४}$य+$\overline{२}$क्ष = $\overline{४}$×$\overline{२}$ २य+$\overline{४}$क्ष = २×$\overline{४}$	४य+२क्ष = −८ २य−४क्ष = −८

या नीट केलेल्ये समीकरणांतून कित्येक अंकगणितरूपानें खरीं नाहींत; असें, $४य+२क्ष=-८$. परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं **पम** ह्मणजे **य** आणि **पन** ह्मणजे **क्ष** अशा दिशेस मोजले आहेत, कीं **प** बिंदू **अओब** या कोनांत येईल, अशे कल्पनेनें हें समीकरण केलें, परंतु कदाचित असा पक्ष नसेल. तथापि, **१५०** आणि **१५१ व्ये पृष्ठावरची** दुसरी रीति त्यास लावून, त्यांचीं उलगडणीं होतील; हें दाखविण्यासाठीं वरचे दुसरे पक्षाचें उदाहरण विस्तारानें देतों.

$$३य+६क्ष=१८$$
$$४य+२क्ष=-८$$

दुसरें समीकरण ३ नीं गुण

$$१२य+६क्ष=-८\times३ \text{ अथवा } १२य+६क्ष=-२४$$

हें पहिल्यांतून वजा करून, हें होतें

$$(३-१२)य=१८-(-२४)=१८+२४=४२$$
$$य=\frac{४२}{३-१२}=\frac{४२}{-९}=-\frac{४२}{९}=-४\tfrac{२}{३}$$

पहिल्ये समीकरणापासून

$$क्ष=\frac{१८-३य}{६}=\frac{१८-३(-४\tfrac{२}{३})}{६}=\frac{१८+१४}{६}=५\tfrac{१}{३}$$

अब आणि **ईफ** यांचे छेदनस्थळीं **प** बिंदू मांडिला असतां, पहाण्यांत येतें कीं कल्पनेचे **उलट्ये** दिशेस **पम** ह्मणजे **य** मोजिला आहे, आणि **पन** ह्मणजे **क्ष** पहिल्येच प्रमाणें मोजिला आहे, असें पहिल्याचें ऋणचिन्ह, आणि दुसऱ्याचें धनचिन्ह, यांवरून कळेल.

याच प्रमाणें चालतें असतां, सर्व सहा पक्षांतील **क्ष** आणि **य** यांचा किमती या पुढील प्रमाणें निघतील.

रेघांचे छेदणें.	क्ष म्हणजे पन याची किंमत.	य म्हणजे पम याची किंमत.
१. अब आणि कड	$१\frac{५}{१९}$	$३\frac{९}{१९}$
२. अब आणि ईफ	$५\frac{१}{३}$	$-४\frac{२}{३}$
३. अब आणि गह	$२\frac{१}{२}$	१
४. कड आणि ईफ	$-५\frac{५}{७}$	$\frac{६}{७}$
५. कड आणि गह	$४\frac{४}{१३}$	$४\frac{८}{१३}$
६. ईफ आणि गह	$\frac{४}{५}$	$-२\frac{३}{५}$

लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं $-१\frac{१}{२}$ असें पद आलें, तर, − चिन्ह या सर्व पदांस लागतें; म्हणजे $-(१+\frac{१}{२})$ असें नाहीं, परंतु याप्रमाणें आहे, म्हणजे $-(१+\frac{१}{२})$ अथवा $-१-\frac{१}{२}$

चांगली केलेल्या आकृती वरून, सहा रेघा तपासिल्या असतां, पहाण्यांत येईल कीं जेव्हां उत्तर ऋण आहे, तेव्हां आरंभीं जी कल्पना केली तिचे उलटये दिशेस मोजलें आहे.

समीकरणाचीं नीट करणीं कृतीचे शेवटा पावेतों, या पुढील प्रमाणें, स्तब्ध ठेविलीं जातील:

१५५ वे पृष्ठावर हीं समीकरणें आहेत

$$अय + बक्ष = अब \qquad अ'य + ब'क्ष = अ'ब'$$

यास उलगडल्याने

$$क्ष = अअ'\frac{ब-ब'}{अ'ब-अब'} \qquad य = बब'\frac{अ'-अ}{अ'ब-अब'}$$

हे दोन समीकरण समुदाय घे, यांत दुसरा समुदाय वरचे सहाव्ये उदाहरणा प्रमाणें आहे,

$$अय + बक्ष = अब \qquad ४य + २क्ष = ४\times२$$

$$अ'य + ब'क्ष = अ'ब' \qquad २य + ४क्ष = २\times४$$

हीं दोन्हीं परस्परांस मिळतील, जर

$$अ = ४ \qquad ब = २ \qquad अ' = २ \qquad ब' = ४$$

या किमती क्ष आणि य यांचे स्थळीं मांडिल्याने, याप्रमाणें होईल

$$क्ष = \overline{४}\times२\times\frac{\overline{२}-\overline{४}}{२\times\overline{२}-\overline{४}\times\overline{४}} = (-८)\times\frac{-२+४}{-४-१६}$$

$$= (-८)\times(-\frac{२}{२०}) = \frac{१६}{२०} = \frac{४}{५}$$

$$य = \overline{२}\times\overline{४}\times\frac{२-\overline{४}}{२\times\overline{२}-\overline{४}\times\overline{४}} = ८\times-\frac{६}{२०} = -२\frac{२}{५}$$

हें पूर्वीप्रमाणें आहे. या रूत्याला सोडून, पुढें चालतों.

१४५ पृष्ठावर दाखविलें गेलें, कीं दोन अव्यक्त परिमाणांचें एकच समीकरण असेल, तर त्याचीं अनंत उत्तरें निघतात; आणि त्या अव्यक्त पदांचें एकच उत्तर येण्याकरितां, रूत्यांत दुसरें समीकरण दिलें पाहिजे. परंतु या दुसरे समीकरणास पहिल्याचा **आधार नसावा**, ह्मणजे, तें पहिल्ये समीकरणाचा रूपासारिखें होई असें नसावें. उदाहरण. क्ष+य=१२ या समीकरणाचीं उत्तरें अनंत होतात; आणि जर दुसरें समीकरण या पुढिलांतून कोणतेंही एक असेल, ह्मणजे

$२क्ष+२य=२४$ $३क्ष+३य=३६$ $\frac{१}{२}क्ष+\frac{१}{२}य=६$

$३क्ष-१८=१८-३य$. $२क्ष+य=२४-य$ इत्यादि

तरी अनंत उत्तरें निघतील; कांकीं जर क्ष+य=१२, तर आतां वर सांगीतलीं सर्व समीकरणें खरीं आहेत. ह्मणजे, वेगळालीं दोन समीकरणें द्यावीं त्या ठिकाणीं एकच समीकरण दोन निरनिराळ्ये रूपानें दिलें आहे.

एकपक्षीं अनंत उत्तरांचें दर्शक $\frac{०}{०}$ अशे तऱ्हेचें रूप धरितें, ही गोष्ट ८६ **आणि ८७ या पृष्ठावर** सांगीतली गेली. आतां तसें एथें घडतें कीं नाहीं हें पहातों.

$$जर \begin{cases} अक्ष+बय=क \\ पक्ष+कय=र \end{cases} तर\ क्ष=\frac{कक-बर}{अक-बप}\ आणि\ य=\frac{अर-कप}{अक-बप}$$

आतां दुसरे समीकरणास पहिल्ये समीकरणाचा आधार आहे असा पक्ष घेतों.

मनांत आण, कीं

$प=मअ$ $क=मब$ $र=मक$

असें असतां दुसरें समीकरणाचें रूप याप्रमाणें होईल

$$मअक्ष + मबय = मक \quad (\div) म \quad अक्ष + बय = क$$

हें पहिल्याप्रमाणें आहे. प, क, आणि र, यांचे जागीं त्यांची वरची घेतलेली किंमत, क्ष आणि य यांचे किंमतींत मांड

$$क्ष = \frac{कमब - बमक}{अमब - बमअ} = \frac{०}{०} \qquad य = \frac{अमक - कमअ}{अमब - बमअ} = \frac{०}{०}$$

यापर्शी ८६ आणि ८७ या पृष्ठांवर जो उलटा विषय लिहिला तोच अर्थ सुद्धां एथे दिसतो.

जर तीन अव्यक्त परिमाणें असलीं, तर तीन निरनिराळीं समीकरणें असावीं, असें १४५ आणि १४६ पृष्ठावर लिहिल्यावरून दाखविलें जाईल, जर तीन समीकरणें निरनिराळीं नसलीं, तर कृत्याचीं अनंत उत्तरें येतील. हीगोष्ट दाखवायासाठीं एक उदाहरण घेऊन कृती करून दाखवितों.

उदाहरण.

$$२क्ष + ४य - ३ज्ञ = १० \cdots\cdots (१)$$
$$५क्ष - ३य + २ज्ञ = २० \cdots\cdots (२)$$
$$३क्ष + २य + ५ज्ञ = ५० \cdots\cdots (३)$$

(१) समीकरणाचे दोन बाजूंस २नी गुण, आणि (२) चे दोन बाजूंस ३ नी गुण, म्हणजे दोन्हीं गुणाकारांत ज्ञ चा गुणक सारखा होईल.

समीकरण (१)×२		४क्ष + ८य − ६ज्ञ = २०
समीकरण (२)×३		१५क्ष − ९य + ६ज्ञ = ६०
(+)		१९क्ष − य = ८० ⋯⋯ (४)

(२) आणि (३) या समीकरणाशीं तशीच कृती कर.

समीकरण (२)×५		२५क्ष − १५य + १०ज्ञ = १००
समीकरण (३)×२		६क्ष + ४य + १०ज्ञ = १००
(−)		१९क्ष − १९य = ०

$(\div)१९ \quad क्ष - य = ०$ अथवा $क्ष = य \cdots\cdots (५)$

(४) आणि (५) हीं दोन समीकरणें अशीं निघालीं, ज्यांत क्ष आणि य मात्र आहेत, परंतु ज्ञ नाहीं. हीं उलगडून, हें उत्तर येतें

$$य = \frac{४०}{९} \qquad क्ष = \frac{४०}{९}$$

वर दिलेल्या तीन समीकरणांतून हव्या त्या समीकरणांत या किंमती मांड. जर दुसऱ्ये समीकरणांत या किंमती मांडिल्या, तर

$$५ \times \frac{४०}{९} - ३ \times \frac{४०}{९} + २ ज्ञ = २० \qquad ज्ञ = \frac{५०}{९}$$

तीन अव्यक्त परिमाणांतून एकच अव्यक्त परिमाण काढायाची एक फार उपयोगी कृप्ति* आहे. मनांत आण, कीं, वरचे समीकरणांतून ज्ञची मात्र किंमत काढायाची आहे. म आणि न, ज्यांची किंमत माहीत नाहीं, परंतु पुढें सोई प्रमाणें कशीही तऱ्हेनें त्यांचा किंमती काढिल्या जातील, अशीं दोन नवीं परिमाणें घे. समीकरणाच्या दोन्ही बाजू भलत्ये कांहीं परिमाणाने गुणिल्या आतात, तर (२) समीकरण मने आणि (३) रें नने गुणून दोन गुणाकारांची बेरीज (१) समीकरणास मिळीव. यावरून असें होईल

$$(२+५म+३न) क्ष + (४-३म+२न) य + (२म+५न-३) ज्ञ$$
$$= १० + २० म + ५० न \cdots\cdots (ऋ)$$

म आणि न यांचा किंमती इच्छेप्रमाणें घेतल्या जातील, आणि ज्यापेक्षां केवळ ज्ञचीच किंमत काढणें आहे, म्हणून म आणि न हे असे असावे, कीं

$$\left.\begin{array}{lll} २+५म+३न = ० & अथवा & ५म+३न = -२ \\ ४-३म+२न = ० & अथवा & ३म-२न = ४ \end{array}\right\} असें होईल$$

तर वरचे समीकरणाचीं उत्तरें म आणि न असावीं, ज्यावरून $म = \frac{८}{१९}$, $न = -\frac{२६}{१९}$. परंतु (ऋ) या समीकरणाचे ज्या पदांत क्ष आणि य आहेत तीं पदें, ० ने गुणिलीं असतां, नाहींशीं होतात. यामुळें

* सर्वसाधारण पक्षांत किंवा विशेष पक्षांत कोणत्याही रीतीचें मूळ कारण किंवा कृति यांचा संक्षेप ज्या रीतीनें होईल त्या रीतीला कृप्ति म्हणतात.

$$(२म+५न-३)\,ज्ञ = १०+२०म+५०न$$

$$ज्ञ=\frac{१०+२०म+५०न}{२म+५न-३}=\frac{१०+२०\times\frac{८}{१९}+५०\left(-\frac{२६}{१९}\right)}{२\times\frac{८}{१९}+५\left(-\frac{२६}{१९}\right)-३}$$

या अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद १९ नीं गुणून, संक्षेप करू, तर या प्रमाणें होईल

$$ज्ञ=\frac{१०\times१९+२०\times८-५०\times२६}{२\times८-५\times२६-३\times१९}=\frac{-९५०}{-१७१}=\frac{९५०}{१७१}=\frac{५०}{९}$$

उलटेविषय. ह्यापासून कदाचित दोन समीकरणें निघतील, जीं परस्परांशीं अगदीं विरुद्ध आहेत, जशीं या पुढील प्रमाणें :

$$क्ष+य=१२ \qquad क्ष+य=१३$$

अथवा असेंही घडेल, कीं जर तीन अव्यक्त परिमाणें आणि तीन समीकरणें असतील, तर त्या तिहींतून जरीं **दोन** खरीं असतील, तरीं तिसरें एक अशक्य असेल, आणि जरीं तें अशक्य समीकरण दुसऱ्ये दोन समीकरणांतून प्रत्येकाशीं **एकटें** मिळतें आहे तरीं वरची गोष्ट घडत्ये.

उदाहरण.

$$क्ष-य=१० \qquad य-ज्ञ=११ \qquad क्ष-ज्ञ=१२$$

जर $क्ष=२०$ $य=१०$ $ज्ञ=-१$ { तर पहिलें आणि दुसरें हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत

जर $क्ष=२०$ $य=१०$ $ज्ञ=८$ { तेव्हां पहिलें आणि तिसरें हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत

जर $क्ष=२०$ $य=१९$ $ज्ञ=८$ { तेव्हां दुसरें आणि तिसरें हीं दोन समीकरणें खरीं आहेत

परंतु क्ष, य, आणि ज्ञ, यांस कशीही किंमत दिली, तरी तिन्हीं समीकरणें बरोबर स्थापिलीं जात नाहींत. हीगोष्ट पहिल्या दोन समीकरणाचे बेरिजेवरून कळेल. कांकीं जर $क्ष-य=१०$, आणि $य-ज्ञ=११$ तर

$$(क्ष-य)+(य-ज्ञ)=२१ \quad अथवा\; क्ष-ज्ञ=२१$$

हें उत्तर तिसरे समीकरणाशीं मिळत नाहीं.

१५० व्ये पृष्ठावर जी सामान्य उलगड्याची रीति सांगीतली, ती शिकणारानें तपासून पाहावी, आणि जेव्हां दोन समीकरणें विरुद्ध असतात तेव्हां त्यांतील क्ष आणि य यांचा किंमती **८१ पृष्ठावर** सांगीतल्या प्रमाणें अपूर्णांकाचें रूप धरितात ज्याचे छेदस्थळीं ० असतें असें त्याणें दाखवावें. आणि ज्या रुत्यांपासून विरुद्ध समीकरणें निघतात, त्याचा अर्थ त्या पृष्ठावरचे $\frac{क}{०}$ अशा रूपाचे उत्तरापासून जो अर्थ निघाला तसाच अर्थ या समीकरणाचा होतो, हेंही दाखविलें जाईल.

या अध्यायांतील, जा दोन समीकरणाविषयीं विचार झाला त्यांचा जर संक्षेप केल्यानंतर पहिल्या बाजू बरोबर निघतील आणि दुसऱ्या बाजू बरोबर निघत नाहींत, असें नसेल तर तीं समीकरणें कधींही विरुद्ध व्हावयाचीं नाहींत; जसें,

$$२क्ष + ३य = १० \qquad २क्ष + ३य = १२$$

दुसरे समीकरणांतून पहिलें वजा केलें असतां ० = २ असें निघेल, ही अशक्य गोष्ट **८४ पृष्ठावर** अक्ष = अक्ष + क जापासून पहिल्यानें $\frac{क}{०}$ हें रूप निघालें, त्याचेच जातीची आहे.

च्वथा अध्याय.

घात आणि मूळप्रकाशक चिन्हें, आणि बीजानुरूप पद्धतींचा क्रमनियम, यांविषयीं.

एक परिमाण त्याणें तेंच दोन, तीन, किंवा अधिक वेळा गुणायाचें असें वारंवार येतें, ह्मणून तें दाखवायासाठीं कांहीं संक्षेप रीति घ्यावी लागत्ये, ती आतां सांगतों.

क्ष गुणिला क्ष, अथवा क्षक्ष, यास क्षचा द्विघात ह्मणतात.

क्षक्ष ······ क्ष, अथवा क्षक्षक्ष. यास क्षचा त्रिघात ह्मणतात.

क्षक्षक्ष ······ क्ष, अथवा क्षक्षक्षक्ष, यास क्षचा चतुर्घात ह्मणतात. आणि इत्यादि. अथवा क्षनें क्षच न* वेळा गुणिला असतां, त्या गुणाकारास क्षचा न घात ह्मणतात. द्विघात आणि त्रिघात यांस बहुत करून **वर्ग** आणि **घन** ह्मणतात. असें, क्षक्ष यास क्षचा वर्ग ह्मणतात, आणि त्यास क्ष **वर्ग** असें ह्मणतात. आणि क्षक्षक्ष यास क्षचा घन ह्मणतात, आणि त्यास क्ष **घन** असें ह्मणतात: आणि कांहीं अंक एक वेळ त्याणें तोच गुणिला तर तो वर्ग झाला असें ह्मणतात; दोन वेळा त्याणें तोच गुणिला असतां, त्याला घन असें ह्मणतात, इत्यादि.

विस्तार अर्थानें, नुसत्या क्षस क्षचा प्रथम घात ह्मणतात.

घाताचा संक्षेप दर्शक या पुढील प्रमाणें आहे: घातामध्यें जितके वेळा

---

* क्ष न वेळा क्षनें गुणिला असतां, गुणाकार क्षचा न घात होतो, असें नवेशिकणारे बहुत करून चुकीनें समजतात. परंतु असें नव्हे; कांकीं क्ष एक वेळा क्षनें गुणिला असतां, (क्षक्ष) आहे, ह्मणजे हा क्षचा द्विघात आहे; ह्मणून क्ष हा न वेळा क्षने गुणिला असतां. (न+१) घात होतो.

अक्षर येतें तो वेळांक, जा अक्षराचा घात करणें आहे, त्या अक्षराचे वर उजव्ये कडे मांडावा. जसें

$$क्षक्ष \text{ यास } क्ष^{२} \text{ या प्रमाणें मांडितात}$$

$$क्षक्षक्ष \cdots क्ष^{३} \text{ या प्रमाणें मांडितात}$$

$$क्षक्षक्षक्ष \cdots क्ष^{४} \text{ या प्रमाणें मांडितात}$$

आणि या प्रमाणें पुढेंही. एथें २, ३, ४, इत्यादि यांस क्षचे **घातप्रकाशक** ह्मणतात. त्याच प्रमाणें,

$$(अ+ब)\times(अ+ब) \text{ यास } (अ+ब)^{२} \text{ या प्रमाणें मांडितात}$$

$$(अ+ब)\times(अ+ब)\times(अ+ब) \text{ यास } (अ+ब)^{३} \text{ या प्रमाणें मांडितात}$$

आणि या प्रमाणें पुढेंही. आतां हीं पुढील उत्तरें सहज सांपडतील:

$$क्ष\times क्ष=क्ष^{२} \qquad क्ष^{२}\times क्ष=क्ष^{३} \qquad क्ष^{३}\times क्ष=क्ष^{४}, \quad \text{इत्यादि.}$$

$$(अ+क्ष)^{२}=अ^{२}+२अक्ष+क्ष^{२}$$

$$(अ-क्ष)^{२}=अ^{२}-२अक्ष+क्ष^{२}$$

$$(अ+क्ष)(अ-क्ष)=अ^{२}-क्ष^{२}$$

$$(अ^{२}+अक्ष+क्ष^{२})(अ-क्ष)=अ^{३}-क्ष^{३}$$

$$(अ+ब)^{३}=अ^{३}+३अ^{२}ब+३अब^{२}+ब^{३}$$

$$(अ-ब)^{३}=अ^{३}-३अ^{२}ब+३अब^{२}-ब^{३}$$

एकाच अक्षराचे भलत्ये दोन घातांचा गुणाकार दाखविण्यासाठीं गुणाकाराचें घातप्रकाशक चिन्ह, गुण्य आणि गुणक यांचे घातप्रकाशकांचे बेरिजे बरोबर मांड. जसें, $क्ष^{३}$ आणि $क्ष^{४}$ यांस गुणायाचें आहे, तर

$$क्ष^{३}=क्षक्षक्ष$$

$$क्ष^{४}=क्षक्षक्षक्ष$$

$$\therefore क्ष^{३}\times क्ष^{४}=क्षक्षक्षक्षक्षक्षक्ष \text{ अथवा } क्ष^{७} \text{ अथवा } क्ष^{३+४}$$

पूर्वी सांगीतल्ये विस्तार अर्थानें क्षला क्षचा **प्रथम घात** असें ह्मटल्यानें,

आणि त्याचें प्रकाशकचिन्ह १ आहे, अथवा $क्ष^१$ असें कल्पिलें असतां, दोन पदांतून नुसता क्ष गुण्य किंवा गुणक असेल, तर अशो पक्षाला वरची रीति लागू आहे. जसें.

$$क्ष^७ \times क्ष = क्ष^८ \text{ अथवा } क्ष^७ \times क्ष^१ = क्ष^{७+१} = क्ष^८$$

उदाहरणें. $क्ष^८ \times क्ष^{१०} = क्ष^{१८}$ $\quad$ $क्ष^२ \times क्ष^{१५} = क्ष^{१७}$

$क्ष \times क्ष^२ \times क्ष^३ \times क्ष^४ = क्ष^{१०}$ $\quad$ $अ^६ \times अ^६ = अ^{१२}$

$३अब^२ \times ४अ^२ब = १२अ^३ब^३$ $\quad$ $२अब \times अब = २अ^२ब^२$

$$अ^२ब^३क इ^४फ^२ \times अब^४क इ^७फ^३ = अ^३ब^७क^२इ^{११}फ^५$$

हें शेवटील पद, लांब विस्तारानें मांडिलें असतां, याप्रमाणें होईल

अअअबबबबबबबककइइइइइइइइइइइफफफफफ

कोणत्या एक घातास त्यापेक्षां दुसऱ्ये कमी घातानें भागायाचा असेल, तर भाज्याचे घातप्रकाशकांतून भाजकाचे घातप्रकाशक वजा कर. उदाहरण, $क्ष^{१०}$ भागिला $क्ष^३$नें तर भागाकार काय आहे? आतां $१० = ७+३$, अथवा $क्ष^{१०} = क्ष^७ \times क्ष^३$. ह्मणून

$(\div)क्ष^३$ $\quad \dfrac{क्ष^{१०}}{क्ष^३} = क्ष^७$ अथवा $क्ष^{१०-३}$. त्याचसारिखें, $क्ष^२ \div क्ष$ (अथवा $\dfrac{क्ष^२}{क्ष^१}$) $= क्ष$; $क्ष^३ \div क्ष^२ = क्ष^१$ अथवा क्ष; $क्ष^{१०} \div क्ष^५ = क्ष^५$; $क्ष^{अ+ब} \div क्ष^अ = क्ष^ब$; $अ^२ब^२क^३ \div अबक = अबक^२$.

१ उलटाविषय. $क्ष^अ$ यास $क्ष^ब$ यार्णे भागायाचें असेल, तर वरची रीति लागू केली असतां, याप्रमाणें होईल, $क्ष^अ \div क्ष^ब = क्ष^{अ-ब}$. परंतु हें झाल्यानंतर जर अ=ब असें निघेल, तर वरचें उत्तर हें होतें, $क्ष^{अ-अ}$ अथवा $क्ष^०$, अशा चिन्हाचा अद्यापि अर्थ केला नाहीं. यास्तव, पहिली कृती फिरून मनन करितों, त्यांत ब=अ असून $क्ष^अ$ यास $क्ष^ब$ यार्णे भागायाचें आहे, अथवा $क्ष^अ$ यास $क्ष^अ$ यार्णे भागायाचें आहे. तर यावरून उत्तर १, हें उघड आहे.

आतां, १ या खरे उत्तराचेजागीं, ज्याचा अर्थ नाहीं असें $क्ष^०$ हें उत्तर कां

आलें? कांकीं ज्या पक्षाला ही रीति लागू होत नाहीं, त्यालाच वरची ही रीति लाविली. त्या रीतींत सांगीतलें कीं कोण एक घातास त्यापेक्षां **कमी** घातानें भागायाचें इत्यादि, आणि ती रीति पूर्वींचे गुणाकाराचे रीति पासून निघाली, ह्मणून जेथें गुण्य गुणक हे दोन्हीं क्ष चे घात आहेत, त्याशिवाय दुसरे पक्षांस, ही वरची गुणाकाराची रीति लागू होत नाहीं, आणि, यामुळें, जेथें गुणाकाराचा घातप्रकाशक, गुण्य किंवा गुणकाचे घात प्रकाशकापेक्षां अधिक होता; ह्मणजे, जेव्हां गुणाकार $क्ष^{अ}$ आहे, आणि $क्ष^{ब}$ गुण्य किंवा गुणक आहे, तेव्हां अ पेक्षां ब कमी असल्यावांचून वरची रीति लागू होत नाहीं.

जर ($क्ष^{०}$) असें चिन्ह आलें तर या दोहोंतून एक तरी केलें पाहिजे, १ ज्या पक्षाला लागू होत नाहीं त्या पक्षाला ही रीति लाविली, हें $क्ष^{०}$ दाखवितो असें मनांत आण, आणि त्याला काढून टाकून त्याचे जागीं १ मांड; अथवा, २. $क्ष^{०}$ याचा जरी अद्यापि अर्थ नाहीं, तथापि त्यास १ याचे जागीं मांड; या पक्षीं रीति लागू होऊन, खरें उत्तर निघतें. यामुळें, हें पुढील व्याख्यान स्थापिलें जातें.

कांहीं अक्षराला ० असें घातप्रकाशक चिन्ह असलें, जसें $अ^{०}$, त्याचा अर्थ १ आहे; अथवा प्रत्येक परिमाण अशो घातानें वाढलें कीं त्याचा प्रकाशक ० होतो, तें परिमाण १ आहे.

२. **उलटाविषय.** जेव्हां अ पेक्षां ब अधिक आहे, आणि ब = अ + ६ असेल, अशा पक्षाला $क्ष^{अ} \div क्ष^{ब} = क्ष^{अ-ब}$ हें समीकरण लाविलें, तर नुसत्ये रीतीनें याप्रमाणें होईल

$$क्ष^{अ} \div क्ष^{अ+६} = क्ष^{अ-(अ+६)} = क्ष^{-६}$$

या उत्तरांत कांहीं अर्थ नाहीं. याचें कारण वरचे प्रमाणें आहे; ह्मणजे ज्या पक्षाला ही रीति लागू करण्याची नव्हती त्यास ती रीति लाविली. खरें उत्तर काढायासाठीं, स्मरण ठेव कीं $क्ष^{अ+६} = क्ष^{अ} \times क्ष^{६}$; आणि

$$\frac{क्ष^{अ}}{क्ष^{अ+६}} = \frac{क्ष^{अ}}{क्ष^{अ} \times क्ष^{६}} = \frac{१}{क्ष^{६}}$$

वरचे अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांस $\text{क्ष}^{\text{अ}}$ यांणीं भागून हें उत्तर झालें. हीं पुढील उदाहरणें त्याच प्रमाणें आहेत; पहिल्ये ओळींत खरी कृति आहे, दुसऱ्ये ओळींत रीतीचा खोटा विस्तार आहे:

$$\frac{\text{क्ष}^{३}}{\text{क्ष}^{४}} = \frac{\text{क्ष}^{३}}{\text{क्ष}^{३}.\text{क्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}} \qquad \frac{\text{क्ष}^{३}}{\text{क्ष}^{४}} = \text{क्ष}^{३-४} = \text{क्ष}^{-१}$$

$$\frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{क्ष}^{८}} = \frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{क्ष}^{२}.\text{क्ष}^{६}} = \frac{१}{\text{क्ष}^{६}} \qquad \frac{\text{क्ष}^{२}}{\text{क्ष}^{८}} = \text{क्ष}^{२-८} = \text{क्ष}^{-६}$$

$$\frac{\text{क्ष}^{१७}}{\text{क्ष}^{२०}} = \frac{\text{क्ष}^{१७}}{\text{क्ष}^{१७}.\text{क्ष}^{३}} = \frac{१}{\text{क्ष}^{३}} \qquad \frac{\text{क्ष}^{१७}}{\text{क्ष}^{२०}} = \text{क्ष}^{१७-२०} = \text{क्ष}^{-३}$$

रीति लागू होईल असें करायासाठीं, हेंच मान्य केलें पाहिजे कीं

$$\text{क्ष}^{-१},\ \text{क्ष}^{-६},\ \text{क्ष}^{-३}$$

यांस अद्यापि अर्थ नाहीं, तथापि तीं या पुढीलांचेजागीं मांडिलीं जातील, ह्मणून

$$\frac{१}{\text{क्ष}},\ \frac{१}{\text{क्ष}^{६}},\ \text{आणि}\ \frac{१}{\text{क्ष}^{३}}$$

ह्मणजे $\text{क्ष}^{-१}$ असें उत्तर आलें असलां, तें टाकून त्याचेजागीं $१ \div \text{क्ष}$ हें मांडावें त्याबदल $\text{क्ष}^{-१}$ आणि $१ \div \text{क्ष}$ या दोहोंचा अर्थ एकच आहे असें मानावें. आणि $\text{क्ष}^{-१}$ याला अद्यापि कांहीं अर्थ नाहीं, यामुळें त्याला इच्छेप्रमाणें भलता कांहींअर्थ दिला जाईल, यामुळें हें पुढील व्याख्यान स्थापिलें जातें:

जा अक्षरास घातप्रकाशकचिन्ह ऋण आहे त्याचा अर्थ हाच, कीं एक भागिला त्याच अक्षरानें आणि त्या अक्षराचें जें अंकरूप घातप्रकाशक चिन्ह असेल तेंच त्यास धन करून लावावें; अथवा,

$$\text{क्ष}^{-\text{अ}}\ \text{याचा अर्थ}\ \frac{१}{\text{क्ष}^{\text{अ}}}$$

गुणाकार आणि भागाकार यांचा दोन रीती सर्वत्र सामान्य आहेत असें आतां कळेल. वरचे रचनेप्रमाणें, हीं पुढील उदाहरणें देतों:

$\frac{१}{क्ष^{३}} \div \frac{१}{क्ष^{८}} = \frac{१}{क्ष^{३}} \times \frac{क्ष^{८}}{१} = \frac{क्ष^{८}}{क्ष^{३}} = क्ष^{५}$	$क्ष^{-३} \div क्ष^{-८} = क्ष^{-३-(-८)} = क्ष^{-३+८} = क्ष^{५}$
$क्ष^{४} \times \frac{१}{क्ष^{६}} = \frac{क्ष^{४}}{क्ष^{६}} = \frac{१}{क्ष^{२}}$	$क्ष^{४} \times क्ष^{-६} = क्ष^{४+(-६)} = क्ष^{४-६} = क्ष^{-२}$
$\frac{१}{क्ष^{३}} \div क्ष^{४} = \frac{१}{क्ष^{३}} \times \frac{१}{क्ष^{४}} = \frac{१}{क्ष^{३+४}} = \frac{१}{क्ष^{७}}$	$क्ष^{-३} \div क्ष^{४} = क्ष^{-३-४} = क्ष^{-७}$

घात प्रकाशकांविषयीं जें पूर्वीं व्याख्यान सांगीतलें त्यापेक्षां आतां कांहीं अधिक दाखविलें, ह्मणजे ज्या पदांचे घातप्रकाशक **धन** किंवा **ऋण** पूर्णांक असतील, तर सर्व पक्षीं मूळच्या दोन रीती खऱ्या रहातात. त्या रीति ह्याच आहेत, कीं

$$क्ष^{अ} \times क्ष^{ब} = क्ष^{अ+ब} \qquad क्ष^{अ} \div क्ष^{ब} = क्ष^{अ-ब}$$

परंतु अंकास किंवा अक्षरास **अपूर्ण** प्रकाशक असतील त्यांचा अर्थ माहीत नाहीं, जसें

$$क्ष^{\frac{१}{२}},\ क्ष^{\frac{१}{३}},\ क्ष^{\frac{३}{४}},\ क्ष^{२\frac{१}{२}},\ क्ष^{.६१} \text{ इत्यादि}$$

वरचे रीतीचे कांहीं खोटये विस्ताराने या वरल्ये चिन्हास सोप्ये रीतीने अर्थ देण्याचा विचार करण्यास आपल्ये मनांत अवश्य येईल तोंपर्यंत न थांबतां, आधींच ती रीति कशी आहे ती पहातों. आणि वरची रीति लागलीजाईल असा, $क्ष^{\frac{१}{२}}$ याचा अर्थ काय आहे ह्याविषयीं पहिल्यानें प्रश्न केला पाहिजे. $\frac{१}{२}+\frac{१}{२}=१$ ह्मणून या पक्षीं $क्ष^{\frac{१}{२}}$ याचा अर्थ या प्रमाणें केला पाहिजे

$$क्ष^{\frac{१}{२}} \times क्ष^{\frac{१}{२}} = क्ष^{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}} = क्ष^{१} \text{ अथवा क्ष}$$

यामुळें, $क्ष^{\frac{१}{२}}$ तेंच परिमाण आहे, तें त्याणेंच गुणिलें असतां, गुणाकार क्ष होतो, अथवा अंकगणितरूपा प्रमाणें त्यास क्षचें **वर्गमूळ** ह्मणतात. त्याचप्रमाणें, $\frac{१}{३}+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}=१$ ह्मणजे $क्ष^{\frac{१}{३}}$ याचा अर्थ याप्रमाणें केला पाहिजे ह्मणजे $क्ष^{\frac{१}{३}} \times क्ष^{\frac{१}{३}} \times क्ष^{\frac{१}{३}} = क्ष^{\frac{१}{३}+\frac{१}{३}+\frac{१}{३}} = क्ष^{१}$ अथवा क्ष

ह्मणजे, $क्ष^{\frac{१}{३}}$ हें क्षचें घनमूळ असावें. क्षचें **मूळ** ह्मटलें ह्मणजे तो शब्द घात याचे उलटा आहे; ह्मणजे, जर म हा नचा **त्रि** घात आहे, तर न यास मचें तृतीय मूळ ह्मणतात.

असें या पुढील प्रमाणें:

नचें नाव.	मागल्ये नावावरून समीकरण
म चें वर्गमूळ	नन = म
म चें घनमूळ	ननन = म
म चें चतुर्घातमूळ	नननन = म
म चें पंचघातमूळ	ननननन = म
इत्यादि.	इत्यादि.

असें, ४०९६ या अंकाचीं वर्गमूळ, घनमूळ, चतुर्घातमूळ, षड्घातमूळ, आणि द्वादश घातमूळ हीं निःशेष मुळें आहेत

त्याचें वर्गमूळ ६४ आहे, कां कीं $६४ \times ६४ = ४०९६$

त्याचें घनमूळ १६ आहे .... $१६ \times १६ \times १६ = ४०९६$

त्याचें चतुर्घातमूळ ८ आहे .... $८ \times ८ \times ८ \times ८ = ४०९६$

त्याचें षड्घातमूळ ४ आहे .... $४ \times ४ \times ४ \times ४ \times ४ \times ४ = ४०९६$

त्याचें द्वादश घातमूळ २ आहे .... $\left\{ \begin{array}{l} २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times \\ २ \times २ \times २ \times २ \times २ \times २ \end{array} \right\} = ४०९६$

जर मागल्ये अर्थावर विश्वास ठेविला, तर हीं उत्तरें अशा रीतीनें लिहिलीं पाहिजेत:

$$६४ = (४०९६)^{\frac{१}{२}} \qquad ८ = (४०९६)^{\frac{१}{४}}$$

$$१६ = (४०९६)^{\frac{१}{३}} \qquad ४ = (४०९६)^{\frac{१}{६}}$$

$$२ = (४०९६)^{\frac{१}{१२}}$$

परंतु, अंकगणितांतील लिहिण्याचे पद्धती प्रमाणें तीं अशीं लिहिलीं पाहिजेत:

$$६४ = \sqrt{४०९६}\text{*} \qquad ८ = \sqrt[४]{४०९६}$$
$$१६ = \sqrt[३]{४०९६} \qquad ४ = \sqrt[६]{४०९६}$$
$$२ = \sqrt[१२]{४०९६}$$

अपूर्ण प्रकाशकाचे अर्थाची गोष्ट पुढें चालत असतां, $क्ष^{\frac{२}{३}}$ ह्याचा अर्थ $क्ष^{२}$ चें घनमूळ असा असावा; कां कीं, वरच्या रीति खऱ्या असाव्या असें जर आहे, तर या प्रमाणें असावें

$$क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{२}{३}} = क्ष^{\frac{२}{३}+\frac{२}{३}+\frac{२}{३}} = क्ष^{२}$$

आणि, तशीच कल्पनेनें, अनुमान केलें जातें, कीं $क्ष^{\frac{म}{न}}$ हें $क्ष^{म}$ चें न मूळाचे ठिकाणीं असावें. परंतु मूळें आणि घात यांचे परस्पर संबंधाविषयीं कांहीं अधिक माहिती झाल्यावाचून, पूर्वीं सांगीतलेला अर्थ खरा आहे कीं नाहीं याचा निश्चय करवत नाहीं, असें एथें दाखविलें जाईल. उदाहरण,

$क्ष^{२\frac{१}{२}}$ अथवा $क्ष^{२+\frac{१}{२}}$ हें $क्ष^{२} \times क्ष^{\frac{१}{२}}$ अथवा $क्ष^{२}\sqrt{क्ष}$ असें असावें

परंतु $२\frac{१}{२} = \frac{५}{२}$; यामुळें,

$क्ष^{२\frac{१}{२}}$ हें $क्ष^{\frac{५}{२}}$ अथवा $\sqrt{क्ष^{५}}$ असें असावें

यामुळें, $क्ष^{२}\sqrt{क्ष}$ हें $\sqrt{क्ष^{५}}$ असें असावें

यांत, **असें असावें**, या शब्दावरून असें समजतें कीं जर असें नसलें तर पूर्वींचे सांगीतले अर्थानें घेतलेले अपूर्णांकरूप घातप्रकाशकास अंकगणिताची चालती रीति लागू करवत नाहीं.** पुनः $\frac{१}{२}+\frac{१}{३} = \frac{५}{६}$ तर

---

* $\sqrt{}$ हें चिन्ह वर्गमूळ दाखविण्यासाठीं आतां बहुत करून कामांत घेतात, आणि, बीजगणिताने होणाऱ्या शंभर उदाहरणांतून नव्याण्णव उदाहरणांत वर्गमुळापेक्षां मोठें मूळ येत नाहीं.

**. शिकणारानें ध्यानांत आणावें, कीं $क्ष^{२\frac{१}{२}}$ आणि $क्ष^{\frac{५}{२}}$, या दोहोंची घालमेल न होई असें संभाळून, भिन्नभिन्न अर्थ मनांत आणितां येतील. परंतु $२\frac{१}{२}$ आणि $\frac{५}{२}$ हे कोठें कोठें भिन्न भिन्न अर्थाचे आहेत, अशी कल्पना करण्यास अडचण पडेल.

$क्ष^{\frac{१}{२}} \times क्ष^{\frac{१}{३}}$ अथवा $\sqrt{क्ष} \times \sqrt[३]{क्ष}$ हें $क्ष^{\frac{५}{६}}$ अथवा $\sqrt[६]{क्ष^{५}}$ असें असावें परंतु अद्यापि सिद्ध केलें नाहीं, कीं

$$क्ष^{२}\sqrt{क्ष} = \sqrt{क्ष^{५}} \text{ अथवा } \sqrt{क्ष} \times \sqrt[३]{क्ष} = \sqrt[६]{क्ष^{५}}$$

कल्पिलेल्या अर्थावरून अद्यापि खोटें उत्तर होत नाहीं हें दाखविण्याकरितां पुढील **अंकगणितरूपाचे** सिद्धांत पहिल्यानें सांगतों.

१ **सिद्धांत.** जर ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तर $ब^{२}$ पेक्षां $अ^{२}$, आणि $ब^{३}$ पेक्षां $अ^{३}$ **अधिक** आहे, इत्यादि. कांकीं यापक्षीं अअ हें अशा गुणाकाराचें उत्तर आहे कीं जांत, ब मध्यें जितके एक आहेत त्याहून अधिक वेळा, ब हून कांहीं अधिक घेतलें आहे; यामुळें बब पेक्षां अअ अधिक आहे: $अ^{३}$, अथवा $अ^{२}अ$, यांत ब मध्यें जितके एक आहेत, त्याहून अधिक वेळा $ब^{२}$, हून कांहीं अधिक घेतलें आहे, आणि या प्रमाणें पुढेंही. अक्षरांचे क्रम फिरवून, दुसऱ्या शब्दांनीं सिद्धांत सांगीतला जाईल, जसें: जर अ पेक्षां ब कमी आहे, तर $अ^{३}$ पेक्षां $ब^{३}$ कमी आहे, इत्यादि.

२ **सिद्धांत.** जर ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तर $ब^{-१}$ या पेक्षां $अ^{-१}$ आणि $ब^{-२}$ या पेक्षां $अ^{-२}$ **कमी** आहेत. कांकीं जर ब पेक्षां अ अधिक आहे, तर $\frac{१}{ब}$ यापेक्षां $\frac{१}{अ}$ कमी होईल; आणि त्यापक्षीं, $ब^{२}$ पेक्षां $अ^{२}$ अधिक आहे, यामुळें $\frac{१}{ब^{२}}$ यापेक्षां $\frac{१}{अ^{२}}$ कमी आहे, आणि या प्रमाणें पुढेंही. त्याच सारिखें, जर ब पेक्षां अ **कमी** असेल, तर $ब^{-१}$ यापेक्षां $अ^{-१}$ अधिक आहे. इत्यादि.

३ **सिद्धांत.** जर बचे **बरोबर** अ असेल, तर $ब^{२}$ याचे **बरोबर** $अ^{२}$ आहे, आणि $ब^{३}$ याचे बरोबर $अ^{३}$ आहे, आणि याप्रमाणें पुढें ही. ही गोष्ट **५६ व्ये पृष्ठावरून** स्पष्ट आहे.

४ **सिद्धांत.** जर बचे **बरोबर** अ असेल, तर बचे वर्गमूळा **बरोबर** अचें वर्गमूळ होईल, आणि बचे घनमूळा बरोबर अचें घनमूळ होईल, आणि याप्रमाणें पुढेंही. ह्मणजे अ आणि ब बरोबर असून, त्यांचें पंचघात मूळ दाखविण्यासाठीं म आणि न घे, तर म आणि न यांचे पंचघात अ आ-

णि ब आहेत; जर या दोहोंतून म अधिक असेल, तर, **पहिल्ये सिद्धांता** प्रमाणें, त्याच्या पंचघात अ, हा ब पेक्षां अधिक होईल, परंतु एथे तसें नाहीं. त्याच सारिखें, जर दोहोंतून न अधिक असला, तर अ पेक्षां ब अधिक होईल; याजकरितां न चे बरोबर म खचित असावा. याजप्रमाणें कोणताही दुसरा पक्ष सिद्ध केला जाईल.

५ सिद्धांत. जर ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तर ब चे वर्गमूळापेक्षां अ चें वर्गमूळ **अधिक** आहे. अ त्याचे वर्गमूळाच्या वर्ग आहे, आणि बही तसाच आहे; ह्मणून जर **तिसरे सिद्धांता** प्रमाणें ब चे वर्गमूळा **बरोबर** अ चें वर्गमूळ असेल, तर पहिल्याच्या वर्ग अथवा ब याचे **बरोबर** दुसऱ्याचा वर्ग अथवा अ होईल, परंतु एथें तसें नाहीं. जर **पहिल्ये सिद्धांता** प्रमाणें ब चे वर्गमूळापेक्षां अ चें वर्गमूळ **कमी** असेल, तर पहिल्याच्या वर्ग अथवा ब यापेक्षां दुसऱ्याच्या वर्ग अथवा अ **कमी** होईल, परंतु एथें तसें नाहीं. तर याशिवाय इतकाच संभव राहिला आहे, कीं जेव्हां ब पेक्षां अ **अधिक** आहे, तेव्हां ब चे वर्गमूळापेक्षां अ चें वर्गमूळ **अधिक** आहे. त्याच सारिखें, जर ब पेक्षां अ **कमी** आहे, तेव्हां ब चे वर्गमूळापेक्षां अ चें वर्गमूळ **कमी** आहे: आणि याप्रमाणें पुढेंही.

६ सिद्धांत. अंकगणितरूप परिमाणाला अंकगणितरूप वर्गमूळ किंवा घनमूळ किंवा दुसरें कोणतें मूळ एकच आहे. कांकीं शक्य असेल, तर अ याला म आणि न हीं दोन **निरनिराळीं** घनमूळें आहेत अशी कल्पना कर; या दोहोंतून एक अधिक असावें, तें म असो. तेव्हां, **१. सिद्धांता** प्रमाणें न च्या घन अथवा अ यापेक्षां म च्या घन अथवा अ अधिक आहे; परंतु असें ह्मणणें हें विरुद्ध आहे, याजकरितां अला दोन **निरनिराळीं** घन इत्यादि मूळें होऊं शकत नाहींत.

सर्व पूर्णांकांचीं वर्गमूळें किंवा घनमूळें, पूर्णांक नाहींत; आणि जसजसा मूळप्रकाशकाचा क्रम वाढतो तसतसा कांहीं सांगीतल्ये मर्यादेमध्यें

जांस अशेजातीचें मूळ आहे त्या मूळांतील पूर्णांक कमी कमी होत जातात. ही गोष्ट या पुढील कोष्टकावरून दाखविली जात्ये.

अंकजांस पूर्णांक वर्ग मूळ	घन मूळ	चतुर्घात मूळ	पंचघात मूळ	षड्घात मूळ	मूळांची किंमत
१	१	१	१	१	१
४	८	१६	३२	६४	२
९	२७	८१	२४३	७२९	३
१६	६४	२५६	१०२४	४०९६	४
२५	१२५	६२५	३१२५	१५६२५	५
३६	२१६	१२९६	७७७६	४६६५६	६
४९	३४३	२४०१	१६८०७	११७६४९	७
६४	५१२	४०९६	३२७६८	२६२१४४	८
८१	७२९	६५६१	५९०४९	५३१४४१	९
१००	१०००	१००००	१०००००	१००००००	१०
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०	

ज्या अंकास पूर्णमूळ नाहीं, त्यास बरोबरच अपूर्णांक मूळही नाहीं. सद्य; सिद्ध केल्यावाचून, ही पुढील प्रतिज्ञा केवळ सांगतों; त्याचे विरुद्ध असेल तें शोधून पहाण्यासाठीं शिकणारावर ठेवितों.

अपूर्णांकांचा* कोणताही घात किंवा कोणतें ही मूळ पूर्णांक होऊं शकत नाहीं.

---

* ह्मणजे ज्या अपूर्णांकाची किंमत केवळ पूर्णांक नाहीं त्याच अपूर्णांकाविषयीं ही गोष्ट आहे; कांकीं $\frac{४}{२}$, $\frac{६४}{४}$, इत्यादि यांस जरी अपूर्णांकाचें रूप आहे तथापि ते पूर्णांक आहेत.

ज्या कृत्यांत अंकाचें मूळ काढावयाचें असतें, तो अंक त्या मूळासुद्धां अनंत पर्यंत वाढविलेल्या वरचा कोष्टकांतील असला, तर तें कृत्य खरे कल्पनेचें आहे; याशिवाय ज्यांत अंकांचीं मूळें काढावयाचीं असतात, अशीं अंकगणिताचीं आणि बीजगणिताचीं सर्व कृत्यें खोट्या कल्पनेचीं आहेत. परंतु जरी अशा तऱ्हेचे कृत्यांचें **बरोबर निःशेष** उलगडणें होत नाहीं, तरी इच्छे प्रमाणें खरे उत्तराचे जवळ जवळ मूळें काढावयाचा रीती आहेत, हें दाखविलें जाईल; ह्मणून, हा पुढील सिद्धांत स्थापिला जाईल.

जरी असा कांहीं अपूर्णांक नाहीं कीं ज्याचा न घात कांहीं सांगीतलें पूर्णांकाचे बरोबर आहे, तरी असा अपूर्णांक कल्पून घेतला जाईल कीं ज्याचा न घात आणि त्या सांगीतल्या पूर्णांकाचें अंतर कोणत्येही सांगीतल्या परिमाणापेक्षां कमी होईल, ह्मणजे ·०००१ अथवा ·०००००१, अथवा दुसऱ्ये कोणत्येही लहान अपूर्णांकापेक्षां कमी होईल.

पहा. अशा तऱ्हेचा अपूर्णांक काढायाला कोणती रीति सोईस पडत्ये हें एथें सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं, परंतु तें काढतां येतें ही गोष्ट मात्र सिद्ध करून दाखवायाची आहे. वर्गमूळ आणि घन मूळ यांविषयीं ही गोष्ट अंकगणितांत सांगीतली आहे. याचा ताळा सिद्ध करायासाठीं कांहीं विस्तारानें सांगीतलें पाहिजे, तर हे पुढील **लेम्मे*** स्थापितों.

१ **लेम्मा.** दोन या अंकाचे घात एकमिळवणीनें केले जातात: जसें,

$$२+२ = २^{२} \qquad २^{२}+२^{२} = २^{३} \qquad २^{३}+२^{३} = २^{४}$$

अथवा सामान्यतः

$$२^{न}+२^{न} = २^{न}\times२ = २^{न+१}$$

२ **लेम्मा.** अपूर्णांकाचे घात, अंश आणि छेदाचे घातापासून केले जातात: जसें,

$$\left(\frac{अ}{ब}\right)^{३} = \frac{अ}{ब}\times\frac{अ}{ब}\times\frac{अ}{ब} = \frac{अअअ}{बबब} = \frac{अ^{३}}{ब^{३}}.$$

---

* लेम्मा ह्मणजे, प्रतिज्ञा आहे जी दुसऱ्ये कांहीं प्रतिज्ञेचा ताळा सिद्ध करायास साधनासाठीं कामांत घेतात.

३ **लेम्मा**. जर क पेक्षां प कमी असेल, तर अक पेक्षां अप कमी होईल.

जर क पेक्षां प कमी असेल, आणि ब पेक्षां अ कमी असेल, तर बक पेक्षां अप कमी होईल.

४ **लेम्मा**. जर एकंमापेक्षां वि कमी असेल, तर तिचे घात पदोपदीं घरत जातात. उदाहरण, जर वि एक द्वितीयांश असेल, तर तिचा वर्ग $\left(\frac{१}{२} \times \frac{१}{२}\right)$ ह्मणजे एक द्वितीयांशाचा द्वितीयांश हा वि पेक्षां कमी आहे; तिचा घन एक चतुर्थांशाचा द्वितीयांश आहे, ह्मणजे हा वि^{२} पेक्षां कमी आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंही.

५ **लेम्मा**. जर कांहीं पद्धतीचा धन पदांतील एक पद अधिक केलें असतां, ती सर्व पद्धती अधिक होत्ये, इत्यादि. जसें, अ−ब ह्या पद्धतींत अ अधिक केला असतां ती अधिक होत्ये, आणि अ कमी केला असतां कमी होत्ये; परंतु ब **अधिक केला असतां** ही पद्धती **कमी** होत्ये, आणि ब **कमी** केला असतां **अधिक** होत्ये.

६ **लेम्मा. जर १ पेक्षां वि कमी असेल,** तर

$(१+वि)^{२}$ ही पद्धती, १+३ वि अथवा १+(४−१) वि यापेक्षां कमी आहे

$(१+वि)^{३}$ ही, १+७ वि अथवा १+(८−१) वि हिजपेक्षां कमी आहे

$(१+वि)^{४}$ ही, १+१५ वि अथवा १+(१६−१) वि हिजपेक्षां कमी आहे

. . . .

अथवा $(१+वि)^{न}$ ही, $१+(२^{न}-१)$ वि हिजपेक्षां कमी आहे

पहिल्यानें, $(१+वि)^{२}$ अथवा $(१+वि)(१+वि) = १+२ वि+वि^{२}$;
४ **लेम्मा** वरून वि^{२} पेक्षां वि अधिक आहे, तर वि^{२} चे स्थळीं वि मांडिली असतां ५ **लेम्मा** प्रमाणें ती पद्धती अधिक होत्ये. परंतु असें केल्यानें ती याप्रमाणें होत्ये, १+२ वि+वि अथवा १+३ वि. यामुळें $१+२ वि+वि^{२}$ ही १+३ वि हिजपेक्षां कमी आहे; ह्मणजे, $(१+वि)^{२}$ ही १+३ वि हिजपेक्षां कमी आहे.

पुनः $(१+\text{वि})^{२}$ ही, $१+३\,\text{वि}$ पेक्षां कमी आहे

तर **३ लेम्मा** वरून $(१+\text{वि})^{२}(१+\text{वि})$ ही, $(१+३\text{वि})(१+\text{वि})$ हिजपेक्षां कमी आहे

अथवा $(१+\text{वि})^{३}$ ही, $१+४\text{वि}+३\text{वि}^{२}$ हिजपेक्षां कमी आहे

आणि पूर्वीप्रमाणें **४ आणि ५ लेम्मा** वरून $(१+\text{वि})^{३}$ ही $१+४\text{वि}+३\text{वि}$ अथवा $१+७\text{वि}$ हिजपेक्षां फार कमी असावी

पुनः $(१+\text{वि})^{३}$ ही, $१+७\text{वि}$ पेक्षां कमी आहे

यामुळें $\left.\begin{array}{r}(१+\text{वि})^{४} \text{ ही}, (१+७\text{वि})(१+\text{वि})\\ \text{अथवा } १+८\text{वि}+७\text{वि}^{२}\end{array}\right\}$ यांजपेक्षां कमी आहे

$\left.\begin{array}{r}(१+\text{वि})^{४} \text{ ही}, १+८\text{वि}+७\text{वि}\\ \text{अथवा } १+१५\text{वि}\end{array}\right\}$ यांजपेक्षां फार कमी असावी

याप्रमाणें हवे तितके क्रमक्रमानें पुढें चालतां येईल, परंतु खालीं लिहिलेली सिद्धता अशी तऱ्हेची आहे, कीं तिजमध्यें सर्व विषय येतात. वरचा पद्धतींतून एक खरी आहे असें मनांत आणून जी मध्यें न घात आहे ती खरी असेंस्रण; ह्मणजे याप्रमाणें असावें.

$(१+\text{वि})^{न}$ ही, $१+(२^{न}-१)\,\text{वि}$ हिजपेक्षां कमी आहे

तर **३ लेम्मा**वरून $(१+\text{वि})^{न}(१+\text{वि})$ ही $\{१+(२^{न}-१)\text{ वि}\}(१+\text{वि})$ हिजपेक्षां कमी आहे

वरचा गुणाकार याप्रमाणें होईल :

$$\begin{array}{rl} & १+(२^{न}-१)\,\text{वि}\\ & १+\phantom{(२^{न}-१)}\,\text{वि}\\ \hline & १+(२^{न}-१)\,\text{वि}\\ & \quad\text{वि}+(२^{न}-१)\,\text{वि}^{२}\\ \hline \text{बेरीज} & १+२^{न}\text{वि}\quad+(२^{न}-१)\,\text{वि}^{२}\\ \hline \end{array}$$

अथवा $(१+\text{वि})^{न+१}$ ही, $१+२^{न}\text{वि}+(२^{न}-१)\,\text{वि}^{२}$ यापेक्षां कमी आहे

तर ४ आणि ५ लेम्मावरून $१+वि^{न+१}$ ही $१+२^{न}वि+(२^{न}-१)$ वि } यांजपेक्षां ही फार
अथवा $१+(२^{न}+२^{न}-१)$ वि } कमी असावी.
अथवा १ लेम्मावरून $१+(२^{न+१}-१)$ वि }

यावरून सिद्ध झालें कीं

जर $(१+वि)^{न}$ ही $१+(२^{न}-१)$ वि हिजपेक्षां कमी आहे

तर असा निश्चय होतो, कीं $(१+वि)^{न+१}$ ही $१+(२^{न+१}-१)$ वि हिजपेक्षां कमी आहे

अथवा या लेम्मांतल्ये वेगवेगळे सांगीतलेले प्रतिज्ञेचे क्रमांतून प्रत्येक प्रतिज्ञा खरी असावी, जर तिचे वरची खरी आहे. परंतु पहिली सिद्ध झाली या मुळें बाकीच्या सर्व सिद्ध झाल्या.

७ लेम्मा. जर अ पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर

$(क्ष+अ)^{२}$ ही $क्ष^{२}+३$ अक्ष अथवा $क्ष^{२}+(४-१)$ अक्ष हिजपेक्षां कमी आहे

$(क्ष+अ)^{३}$ ही $क्ष^{३}+७$ $अक्ष^{२}$ अथवा $क्ष^{३}+(८-१)$ $अक्ष^{२}$ हिजपेक्षां कमी आहे

$(क्ष+अ)^{४}$ ही $क्ष^{४}+१५$ $अक्ष^{३}$ अथवा $क्ष^{४}+(१६-१)$ $अक्ष^{३}$ हिजपेक्षां कमी आहे

. . . .

अथवा $(क्ष+अ)^{न}$ ही $क्ष^{न}+(२^{न}-१)$ $अक्ष^{न-१}$ . . . . हिजपेक्षां कमी आहे

अपेक्षां क्ष मोठा आहे; यामुळें $\frac{अ}{क्ष}$ हा १ पेक्षां कमी आहे; यामुळें, **६ लेम्मा** वरून

$\left(१+\frac{अ}{क्ष}\right)^{न}$ ही $१+(२^{न}-१)\frac{अ}{क्ष}$ हिजपेक्षां कमी आहे

परंतु $१+\frac{अ}{क्ष}=\frac{क्ष+अ}{क्ष}$ ∴ **२ लेम्मा** वरून $\left(१+\frac{अ}{क्ष}\right)^{न}=\frac{(क्ष+अ)^{न}}{क्ष^{न}}$

यामुळें $\frac{(क्ष+अ)^{न}}{क्ष^{न}}$ ही $१+(२^{न}-१)\frac{अ}{क्ष}$ हिजपेक्षां कमी आहे

दोन्ही बाजू $क्ष^{न}$ याणें गुण, तर **३ लेम्मा** वरून या प्रमाणें होईल

$(क्ष+अ)^{न}$ ही $क्ष^{न}+(२^{न}-१)\frac{अक्ष^{न}}{क्ष}$ } यांजपेक्षां कमी आहे
अथवा $(क्ष+अ)^{न}$ ही $क्ष^{न}+(२^{न}-१)$ $अक्ष^{न-१}$ }

१७७ पृष्ठावरची प्रतिज्ञा एका विशेष पक्षाला लावून सांगतों. १० हा अंक घेतला असें ह्मण, आणि घन हा सांगीतला घात आहे असें मानून आण. तर असा कांहीं अपूर्णांक काढितां येईल कीं ज्याचा घन १० यांचे

आंत ·०००१ इतके अंतरानें होईल? $(२)^३ = ८$, आणि $(३)^३ = २७$, तर २ कमी आहेत आणि ३ अधिक आहेत असें दिसतें. तर २ आणि ३ यांचेमधील २·१, २·२, २·३, इत्यादि या अपूर्णांकांचे घन तपासून पहा. $(२·१)^३ = ९·२६१$, आणि $(२·२)^३ = १०·६४८$; यांत २·१ हे कमी आहेत, आणि २·२ हे अधिक आहेत. आतां २·१ आणि २·२ यांचे मधले २·११, २·१२, २·१३, इत्यादि या अपूर्णांकांचे घन तपासून पहा. तर हें कळलें जातें

$$(२·१५)^३ = ९·९३८३७५ \qquad (२·१६)^३ = १०·०७७६९६$$

यामुळें २·१५ कमी आहेत, आणि २·१६ अधिक आहेत.

या प्रमाणें पुढें चालले असतां, हें कळलें जाईल, कीं

$(२·१५४)^३$ हे १० पेक्षां कमी आहेत,	$(२·१५५)^३$ हे १० पेक्षां अधिक आहेत
$(२·१५४४)^३$ हे १० पेक्षां ········	$(२·१५४५)^३$ हे १० पेक्षां ··········
$(२·१५४४३)^३$ हे १० पेक्षां ········	$(२·१५४४४)^३$ हे १० पेक्षां ··········
इत्यादि.	इत्यादि.

अशी रीतीनें दोन अपूर्णांक काढितां येतील, कीं ज्यांतून एकाचा घन १० पेक्षां कमी आणि दुसऱ्याचा घन १० पेक्षां अधिक होईल, परंतु ते दोनही घन १० चा इतके जवळ असावे, कीं त्या घनांचें आणि १० चें अंतर ·०००१ इतकें होईल, हा मात्र प्रश्न करावयाचा राहिला आहे. वरचे क्रमांतून हें पहा कीं

२·२	हे	२·१	यांपेक्षां केवळ	·१ इतक्यानें अधिक आहेत.
२·१६	हे	२·१५	यांपेक्षां०	·०१ इतक्यानें अ०
२·१५५	हे	२·१५४	यांपेक्षां०	·००१ इतक्यानें अ०
२·१५४५	हे	२·१५४४	यांपेक्षां०	·०००१ इतक्यानें अ०
इत्यादि.		इत्यादि.		इत्यादि.

आणि ७ वे लेम्मा वरून जर क्ष पेक्षां अ कमी असेल, तर

$(क्ष+अ)^३$ ही $क्ष^३ + ७अक्ष^२$ यांपेक्षां कमी आहे

अथवा $(क्ष+अ)^३ - क्ष^३$ ही $७अक्ष^२$ यांपेक्षां कमी आहे

वरचे क्रमांतील अपूर्णांकांतून एक कमी अपूर्णांक दाखविण्यासाठीं क्ष घे; तर १० पेक्षां $क्ष^3$ कमी आहे ह्मणून क्ष हा ३ पेक्षां कमी असावा, आणि त्याचा वर्ग ही ९ पेक्षां कमी असावा. यामुळें $७ अ क्ष^2$ हे ७ अ×९, अथवा ६३ अ यांपेक्षां कमी असावे. आणि $(क्ष+अ)^3 - क्ष^3$ ही $७ अ क्ष^2$ पेक्षां कमी आहे यावरून ६३ अ पेक्षां फारच कमी असावी. वरचे अधिक अपूर्णांक दाखविण्यासाठीं क्ष+अ घे; तर यांचें अंतर अ, कृतीचा क्रम पुढें चालविला असतां, ·०००००० १ इतकें होईल, यामुळें, ६३ अ हे ·०००००६३ हे ·००००१ यापेक्षां कमी आहेत. यामुळें क्ष ची किंमत अशी निघेल, कीं

$क्ष^3$ हा १० पेक्षां कमी आहे $(क्ष+·००००००१)^3$ ही १० पेक्षां अधिक आहे

आणि $(क्ष+·००००००१)^3 - क्ष^3$ ही ·००००१ हिजपेक्षां कमी आहे.

परंतु १० हे या दोन घनाचेमध्यें आहेत, ह्मणून १० यांशीं जीं दोन निरनिराळ्ये घनांचीं अंतरें आहेत, तीं त्या दोन घनांचे अंतरापेक्षां कमी होतील; यामुळें त्यांतून कोणताही अपूर्णांक घेतला, तर त्याचा घन इच्छित्याप्रमाणें १० चे जवळ होईल. इच्छिलेले अपूर्णांक काढिले असतां या प्रमाणें होतील, २·१५४४३४६ आणि २·१५४४३४७. तशाच रीतीने दुसरे ही पक्ष उलगडले जातील

यावरून, या पुढील प्रमाणें बोलण्याची तऱ्हा कामांत आणावी लागत्ये. १० यांस पूर्ण घनमूळ नाहीं, असें ह्मणण्याबद्दल या प्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं ज्या अपूर्णांकांचे घन इच्छे प्रमाणें १० चे जवळजवळ येतील असे अपूर्णांक काढितां येतील, आणि $\sqrt[3]{१०}$ हें पूर्ण घनमूळ असें जाणून त्या अपूर्णांकास १० चे घनमूळाचा जवळचे आहेत असें ह्मणतात. ह्मणजे, $(२·१५४४३४६)^3$ हे १० चा बरोबरीस जितके जवळ आहेत तितके $(२·१५४)^3$ हे नाहींत, असें ह्मणण्याबद्दल, २·१५४४३४६ हे जितके १० चा घनमूळाजवळचे आहेत तितके २·१५४ हे नाहींत असें ह्मणतात.

हे पुढील शब्द ज्या अर्थानें कामांत घेतात त्यांचा तो अर्थ आतां शिकणारास समजेल:

प्रत्येक पूर्णांकास आणि अपूर्णांकास अगदी बरोबरीचें किंवा जवळचें या दोहोंतून एकतरी मूळ असतें.

$\sqrt[6]{\text{अ}^5}$ यांत अ=१० घे, तर अ^5=१०००००. आतां, $\sqrt{\text{अ}}\times\sqrt[3]{\text{अ}} = \sqrt[6]{\text{अ}^5}$ हें सर्वपक्षीं सिद्ध केल्यावर आणि अ ची किंमत वरप्रमाणें असली, तर या समीकरणावरून काय अर्थ समजावा? हाच अर्थ समजावा कीं दोन अपूर्णांक निघतील ज्यांचा वर्ग आणि घन इच्छेप्रमाणें १० चे जवळजवळ होईल, ह्मणजे ·०००१ इतके जवळ आहेत असें ह्मण, तर अशी अपूर्णांकास $\sqrt{१०}$ आणि $\sqrt[3]{१०}$ यांचा जवळच्या किंमती असें ह्मटलें जाईल, आणि हे दोन अपूर्णांक परस्पर गुणिले असतां, जो गुणाकार होईल, त्याचा षड्घात केला असतां, तो १०^5 यांचे तितकाच जवळ जवळ येईल, अथवा $\sqrt[6]{१०^5}$ यांचे जवळचे किंमतीचा होईल. या दोन प्रतिज्ञेचा ताळा अगोदरच अनुमानांत घेतों, कारण कीं शुद्ध प्रतिज्ञेपासून जवळजवळचे प्रतिज्ञेंत जावयाचे रीतीचें एक उदाहरण सांगितल्यानें तें सर्वांस लागू पडेल.

मनांत आण कीं अ असा कांहीं अंक आहे कीं ज्याला निःशेष वर्गमूळ आणि घनमूळ हीं दोन्हीं आहेत, जसें ६४, अथवा $\frac{१}{७२९}$. त्याचें वर्गमूळ दाखवायासाठीं क्ष घे, आणि घनमूळ दाखवायासाठीं य घे. तर

$$\text{क्ष}^2=\text{अ यामुळें } (\text{क्ष}^2)^3 = \text{अ}^3 \text{ अथवा } \text{क्ष}^2\cdot\text{क्ष}^2\cdot\text{क्ष}^2 = \text{अ}^3 \text{ अथवा } \text{क्ष}^6 = \text{अ}^3,$$

$$\text{य}^3=\text{अ यामुळें } (\text{य}^3)^2 = \text{अ}^2 \text{ अथवा } \text{य}^3\cdot\text{य}^3 = \text{अ}^2 \text{ अथवा } \text{य}^6 = \text{अ}^2$$

$$\therefore \text{क्ष}^6\text{य}^6 = \text{अ}^3\text{अ}^2 \text{ अथवा } (\text{क्षय})^6 = \text{अ}^5$$

कांकीं $\text{क्ष}^6\text{य}^6$ हें क्षक्षक्षक्षक्षक्ष यययययय, ह्या सारिखेच आहेत, आणि त्यांचा गुणाकार या क्रमानें केला जाईल

$$\text{क्षय}\cdot\text{क्षय}\cdot\text{क्षय}\cdot\text{क्षय}\cdot\text{क्षय}\cdot\text{क्षय} = (\text{क्षय})^6$$

यामुळें, क्षय हें अ^5 याचें षड्घात मूळ आहे, परंतु क्ष हा अचें वर्गमूळ आहे, आणि य त्याचें घनमूळ आहे, ह्मणजे,

$$\text{क्षय} = \sqrt[6]{\text{अ}^5} \text{ किंवा } \sqrt{\text{अ}}\times\sqrt[3]{\text{अ}} = \sqrt[6]{\text{अ}^5}$$

आतां, मनांत आण कीं अ असा कांहीं अंक आहे कीं ज्याला निःशेष वर्गमूळ आणि घनमूळ नाहीं, असें १०. क्ष आणि य असे अपूर्णांक काढितां येतील, कीं क्ष^{२} आणि य^{३} हे अ चे जवळ जवळ इच्छे प्रमाणें होतील. मनांत आण, कीं क्ष^{२}=अ+प आणि य^{३}=अ+क ह्मणजे प आणि क इच्छेस येईल तितके लहान* होतील. अ पेक्षां प आणि क हे कमी आहेत असें आरंभीं कल्पितों. तर ७ व्ये लेम्मा वरून,

(अ+प)^{३} ही अ^{३}+७ पअ^{२} यापेक्षां कमी आहे

(अ+क)^{२} ही अ^{२}+३ कअ यापेक्षां कमी आहे

परंतु (क्ष^{२})^{३} अथवा क्ष^{६}=(अ+प)^{३} आणि (य^{३})^{२} अथवा य^{६}=(अ+क)^{२} यामुळें

क्ष^{६} हा अ^{३}+७ पअ^{२} यापेक्षां कमी आहे

य^{६} हा अ^{२}+३ कअ यापेक्षां कमी आहे

तर ३ लेम्मावरून क्ष^{६}य^{६} हा (अ^{३}+७ पअ^{२}) (अ^{२}+३ कअ) यापेक्षां कमी आहे

अथवा (क्षय)^{६} हा अ^{५}+अ^{४} (७प+३क) +२१ पकअ^{३} यापेक्षां कमी आहे

परंतु क्ष^{२} अथवा अ+प हा अ पेक्षां अधिक आहे, यामुळें क्ष^{६} हा अ^{३} पेक्षां अधिक आहे; आणि य^{३} अथवा अ+क हा अ पेक्षां अधिक आहे, यामुळें य^{६} हा अ^{२} पेक्षां अधिक आहे; तर क्ष^{६}य^{६} अथवा (क्षय)^{६} हा अ^{३}·अ^{२} अथवा अ^{५} यापेक्षां अधिक आहे. यावरून,

(क्षय)^{६} हा अ^{५} याचे आणि अ^{५}+अ^{४} (७प+३क) +२१ पकअ^{३} यांचे कोठेतरी मध्यें आहे यामुळें त्याची किंमत अ^{५}हून, अ^{४} (७प+३क) +२१ पकअ^{३} इतक्यानें भिन्न नाहीं.

वरचे पद्धतीमध्यें अ^{४} आणि अ^{३} हे कितीही मोठे** असतील, तरी प आणि क

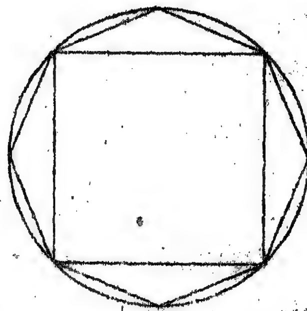
* इच्छेस येईल तितके लहान होतील, ह्मणजे त्यांचा लहानपणा कांहीं विशेष किंमतीचा आहे, असा अर्थ नाहीं. परंतु अर्थ हाच कीं कसाही लहान अपूर्णांक घेतला तरी त्यापेक्षां ही कमी घेतां येईल.

** न आणि म यांतून जर न कांहीं ठिकाणें परिमाण असेल, आणि जर इच्छेस येईल इतका लहान म घेतला जाईल, तर म न हा गुणाकार इच्छेस येईल तितका लहान केला जाईल; परंतु हें मात्र मनांत ठेविलें पाहिजे, कीं गुणाकाराला इच्छिलेला लहानपणा देण्याकरितां, जितका न मोठा असेल, तितका लहान म घ्यावा.

इच्छेस येईल तितके लहान होतील, तर ७ प+३ क आणि २१ पक हेही इच्छेस येईल तितके लहान होतील, यामुळें ती वरची पद्धती इच्छेस येईल तितकी लहान केली जाईल. ह्मणजे, (क्षय)^{६} हा अॅ याचे इच्छेस येईल तितका जवळ केला जाईल, अथवा क्षय हा अॅचे षड्घात मूळाचा जवळचा आहे.

बीजगणिताचे पुस्तकामध्यें वरची सिद्धता बहुत करून लिहून दाखवीत नाहीं, परंतु जास **क्रमनियम** ह्मणतात, त्यांत वरचें उत्तर खरें मानून घेतात. क्रमनियम या शब्दाचा अर्थ सांगतों, कांकीं त्यांत शिकणाराचे उपयोगी असे बहुत विषय आहेत; परंतु तो शिकणारानें सोडून दिला, तरी या प्रकरणाचें अनुसंधान सुटत नाहीं, यामुळें या विषयींचा गोष्टी बारीक अक्षरांनीं पुढें लिहितों, आणि या विषयाचें सूचक नाम पृष्ठाचे वर तसेंच मांडितों.

क्रमशः आणि आकस्मिक क्रमभेदावाचून हे दोनही शब्द सारिख्ये अर्थाचे आहेत. उदाहरण, असें मनांत आण, कीं एक चौरस आहे, ज्याचा दोन समांतर बाजू उत्तर आणि दक्षिण दिशेंत आहेत. जो कोणी पुरुष अशा चौरसाची प्रदक्षिणा करील त्यास प्रत्येक कोनावरून पुढें चालत्ये समयीं एक वर्तुळ पाद फिरावें लागतें, ह्मणजे जेव्हां तो उत्तर किंवा दक्षिण दिशेस चालतो, तेव्हां कांहीं मधल्ये दिशेंत न चालतां एकदांच पूर्वेकडे किंवा पश्चिमेकडे फिरतो, आणि पूर्व किंवा पश्चिमेकडे चालतो तेव्हां त्याचे उलटें. यापक्षीं त्याची दिशा क्रमभेदानें बदलत्ये. जरी त्या आकृतीला आठ बाजू असल्या, तरी त्याची दिशा क्रमभेदानें पालटेल. परंतु तो पालट पूर्वीपेक्षां कमी होईल; त्या आकृतीला सोळा बाजू असल्यास कोनावरचे पालट त्यापेक्षांही कमी होतील, आणि याप्रमाणें पुढेंही.



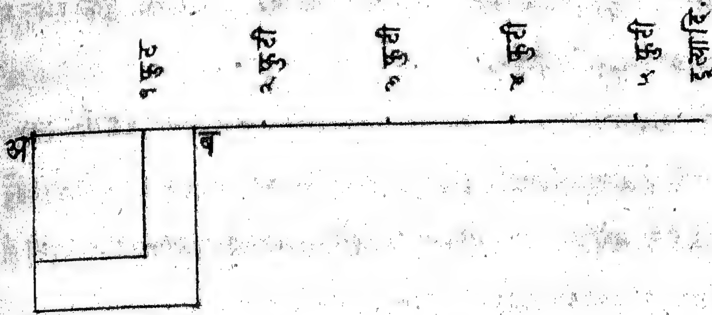
परंतु वर्तुळाचे किंवा दीर्घवर्तुळाचे भोंवती प्रदक्षिणा केली, तर दिशाभेदक्रम सुटत नाहीं. जर भूमितीचा वर्तुळाभोंवती भूमितीचा बिंदू प्रदक्षिणा करितो, तर तो बिंदू चालत असतां त्याचें गमन अमुक दिशेंत झालें नाहीं अशी दिशा कल्पवत नाहीं; आणि कोणत्येही भलत्ये दोन बिंदूंचे मध्येंच जर चालत आहे तर त्या दोन बिंदूंचा दिशेमधल्या सर्व दिशांत त्याचें गमन होईल.

भूमितीपासून वरचें उदाहरण दृष्टांतार्थ घेतलें आहे, आणि त्यांत क्रमशः भेद होतो असें कल्पिलें आहे; आणि या कल्पनेस कांहीं विरोध येत नाहीं, परंतु जेव्हां अशी कल्पना करितों, कीं बिंदूचे गतीपासून रेघा उत्पन्न होतात, तेव्हां वरची भूमितीची कल्पनाही नीट दिसत्ये. परंतु अंकगणित, आणि नंतर बीजगणित हीं दोन्हीं भूमितीला लागू केलीं असतां, हेंच विचारायाचें राहिलें, कीं भूमितीचीं सर्व परिमाणें अंकगणितरीतीनें दाखविलीं जातील कीं काय? उदाहरण, अ पासून निघून ब सरळ रेघेंत दोनहात फुटीपर्यंत चालतो अशी कल्पना कर, तर ज्या अनंत बिंदूवरून ब चालतो त्यांतील ज्या प्रत्येक बिंदूवरून अ पासून ब चालला त्या प्रत्येक बिंदूचें अंतर फुटी आणि फुटीचे अपूर्णांक यांचे सहाय्यानें दाखविलें जाईल कीं काय?

स्पष्ट आहे कीं एक आणि दोन फुटींचेमध्यें हे पुढील अपूर्णांक येतील. म्हणजे, १·१, १·२, १·३, इत्यादि फूट; १·१ आणि १·२ फुटीमध्यें हे अपूर्णांक येतील, म्हणजे, १·११, १·१२, १·१३, इत्यादि फूट; १·११ आणि १·१२ फुटीमध्यें हे अपूर्णांक येतील, म्हणजे १·१११, १·११२, १·११३, इत्यादि फूट; आणि याप्रमाणें अनंत* पावेतों होईल. परंतु अ पासून १ आणि २ फुटींमध्यें ब ची कांहीं भूमितिरूप स्थिति नेमिली असतां, ती स्थिति केवळ बरोबर दाखविण्यासाठीं १ फूट आणि एक फुटीचा अपूर्णांक अशानें ती स्थिति बरोबर दाखविली जाणार नाहीं. आतां जी भूमितिनें नेमिली जाईल, परंतु अंकगणितानें नेमिली जाणार नाहीं अशी एक स्थिति दाखवितों.

---

* विकृष्टपणें मनांत आणावें, कीं अनंत पावेतों असें म्हटलें असतां अर्थ हा, कीं दूरच्या पावेतों.



वरच्या आकृती प्रमाणें अब रेघेवरचें चौरस १ फुटीच्या चौरसाचें दुप्पट होण्यासाठीं ब ची स्थिति कोठे असावी, याचा नेम भूमितिमध्यें भूमितिरूपानें दाखविला आहे, परंतु अंकगणितानें दाखविला नाहीं. एक फूट दाखविण्यासाठीं १ घे; आतां वरसांगितल्याप्रमाणें अब रेघेला कांहीं अंकगणितरूपाचें परिमाण नेमिलें जाईल कीं नाहीं, याचा विचार करितों. फुटीच्या प्रत्येक अपूर्णांकास असें अपूर्णांक रूप दिलें जाईल, कीं त्याचे अंश आणि छेद पूर्णांक होतील, यावरून जर अब रेघेला अंकगणित परिमाण नेमिलें जाईल, तर अब $\frac{म}{न}$ फूट आहे, आणि म आणि न पूर्णांक आहेत असें मनांत आण. ह्मणजे एक किंवा अधिक फुटी न सम भागांत भागून, त्या भागांतून म भाग घेतले अशानें अब रेघ झाली असें मनांत आण. या फुटीचा एक न भागास, सोईसाठीं, भागाचा भाग ह्मण; तेव्हां एक फुटीमध्यें न भागाचे भाग आहेत, आणि अब मध्यें म भागाचे भाग आहेत. तेव्हां फुटीच्या रेघेवरच्या चौरसामध्यें भागाचे भागाचीं चौरसें न×न इतकीं आहेत, आणि अब रेघेच्या चौरसामध्यें म×म इतकीं त्याच जातीचीं चौरसें आहेत. यावरून, अब रेघेवरचें चौरस एक फूट रेघेवरच्या चौरसाचें दुप्पट आहे, तर या प्रमाणें असावें

ममम=२नन

आतां म आणि न हे पूर्णांक असावे या संकेतानें हें समीकरण शक्य नाहीं असें दाखवितों. न पूर्णांक आहे, ह्मणून नन पूर्णांक आहे, आणि २नन पूर्णांकाची दुप्पट आहे, आणि यामुळें तो सम अंक आहे; परंतु नन च्या दुपटी बराबर मम आहे, यामुळें ममही सम आहे. ह्मणून तुसला मही सम आहे, कांकीं विषम अंक त्याणें तोच गुणिला असतां विषम अंक होतो. परंतु जर म सम आहे, तर त्याचें अर्धपूर्णांक होईल; तर

तें अर्ध दाखविण्यासाठीं म' घे, तेव्हां म = २म'. मची ही किंमत वरचे समीकरणांत म-चे स्थळीं मांड, तर या प्रमाणें होईल

$२म' \times २म' = २नन$ $\qquad$ $४म'म' = २नन$ अथवा $२म'म' = नन$

न सम अंक असावा हें दाखविण्याकरितां, वरचें समीकरण $नन = २म'म'$ तशाच रीतीनें कामांत घेतां येईल. नचें अर्ध न' पूर्णांक आहे असें मनांत आण, तर $न = २न'$ आणि ही किंमत समीकरणांत नचेंस्थळीं मांडिल्यानें या प्रमाणें होतें

$२न' \times २न' = २म'म'$ $\qquad$ $४न'न' = २म'म'$ अथवा $२न'न' = म'म'$

यावरून पूर्वीं प्रमाणें म' सम अंक आहे असें सिद्ध होतें. म आणि न हे पूर्णांक असून $मम = २नन$ हें समीकरण खरें आहे असें दाखविण्याविषयीं हे पुढील अंक निरंतर पूर्णांक असले पाहिजेत

म $\quad$ (म' ह्मणजे मचें अर्ध) $\qquad$ (म'' ह्मणजे म'चें अर्ध) इत्यादि

न $\quad$ (न' ह्मणजे नचें अर्ध) $\qquad$ (न'' ह्मणजे न'चें अर्ध) इत्यादि

परंतु असें होण्यास अशक्य आहे; कांकीं भलत्ये कांहीं अंकाचें अर्ध केलें आणि त्या अर्धाचें अर्ध याप्रमाणें पुढें करीत गेले असतां शेवटीं १ हून कमी असा कांहीं अपूर्णांक येईल. यामुळें, कोणत्येही पूर्णांकाविषयीं $मम = २नन$ हें समीकरण खरें नाहीं, आणि त्यावरून अब हा $\frac{म}{न}$ या अपूर्णांकानें दाखवितां येत नाहीं.

जर वरचें समीकरण खरें असें मानिलें, तर त्या पासून या प्रमाणें होईल,
$\frac{मम}{नन} = २$ अथवा $\frac{म}{न} \times \frac{म}{न} = २$ अथवा $क्षक्ष = २$ यांत $क्ष = \frac{म}{न}$ आहे.

१८९ एतद्वाप्रमाणें $क्षक्ष = २$ हें समीकरण या अर्थानें मात्र स्वीकारितां येतें; कीं, कांहीं एक लहान अपूर्णांक घेऊन क्षची कांहीं किंमत काढितां येईल, जिचा योगानें क्षक्ष हे २पेक्षां त्या अपूर्णांकानें कमी होतील. ह्मणजे

$क्षक्ष - २ = ०$ $\qquad$ हें समीकरण स्थापण्याबद्दल

$क्षक्ष - २ =$ कांहीं गणित परिमाण ( ) याहून कमी

असें मात्र स्थापितां येईल. कुंडलीमध्यें इच्छे प्रमाणें कसाही लहान अपूर्णांक मांडितां येईल.

सर्व व्यवहार कामां करितां वर सांगीतलें इतकें पुरें; कांकीं व्यवहार कामांत जे-व्हां बीजगणित लावावें लागतें त्यांचा सूक्ष्मपणा, मापण्याचे सुयंत्राचें सहाय्य पावलेल्या दृष्टीच्या मर्यादेबाहेर, असण्याचें प्रयोजन नाहीं. जी अतिसूक्ष्मरेघ दृष्टीनें पहाण्यास शक्य होत्ये, ती जर एक इंचाचा दशसहस्रांश असेल, तर ती पुढील समीकरण उलगडण्या-साठीं खचित सत्यतेचा जवळजवळ पुरतेपणीं होईल, ह्मणजे

जर क्षक्ष−२=० हें समीकरण निश्चित खरें होण्यासाठीं

क्षक्ष−२= अंकगणितानें एक इंचाचा दशसहस्रांशांपेक्षां कमी इतका पुरे.

क्षक्ष−२=० असें समीकरण जवळजवळ जें उत्तर स्थापितें, तें उत्तर कदा-चित फार लहान किंवा मोठें असेल; ह्मणजे, क्षक्ष हा २ पेक्षां किंचित कमी असेल किंवा किंचि-त अधिक असेल. १८१, १८२ वें पृष्ठ पहा, त्यांत क्षक्षक्ष−१०=० या समीकरणा चा उ-लगडण्याचा दोन्ही तऱ्हा दाखविल्या आहेत. यावरून, जरी क्ष अथवा ∛१० यांस खरी स्थि-ती नाहीं, तथापि, इच्छेप्रमाणें परस्पर जवळजवळ होत असे दोन अपूर्णांक काढले जातील, ते अ आणि ब हे दोन अपूर्णांक आहेत असें मनांत आण, त्यांतून पहिला अ कमी आहे, अथवा अअअ हा १० पेक्षां कमी, आणि दुसरा ब अधिक आहे, अथवा बबब १० पेक्षां अधिक; आणि अशा कृतीनें शुद्ध बरोबरी जवळ जाण्यास किंचित अंतर रहा-तें, तर पुढील प्रमाणें बोलण्याची रीति कामांत घेण्याचा शिरस्ता आहे: ह्मणजे १० यां-स घनमूळ आहे, परंतु तें घनमूळ असंममान* परिमाण आहे, ह्मणजे समीपतेवांचू-न कांहीं पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें बरोबर दाखविलें जात नाहीं; ह्मणजे, ∛१० याचे हवा तेवढा जवळ असा अपूर्णांक काढितां येईल.

तथापि हें पुढील विचारायाचें राहिलें: जरी, क्षक्ष−२=० हें समीकरण इच्छे-प्रमाणें जवळजवळ उलगडलें जातें तरी त्या जवळजवळ आलेल्ये उत्तरावर अधिक कांहीं कृती लावायाची गरज पडले, अशा कांहीं कृती असतील की नाहीं, आणि त्या परि-माणास त्या कृती लाविल्या, त्यांत कितीही लहान चूक असली ती चूक, आरंभीं कशीही

---

* ह्मणजे १ याची कांहीं समभाग नाहीं; ह्मणजे १ याचे कोणत्येही भागाचे भागांचे मिळवणीनें तो दाखविला जात नाहीं.

लहान असली तरी तीपासून अशी चूक होत्ये कीं ती कांहीं मर्यादेबाहेर कमी केली जाणार नाहीं असा गुण त्या कृतींत असेल कीं नाहीं ? उदाहरण, जेव्हां शिकणारास अंकांचें लागरतंम ह्मणजे काय हें समजूं लागल्यावर, असें एकादें कृत्य येईल कीं ज्याचें उत्तर क्षचें लाग्रतंम असेल, आणि त्या क्षची किंमत क्षक्ष − २ = ० या समीकरणांतून काढायाची असेल. तर या पुढील दोन प्रतिज्ञेंतून शिकणारानें कोणती घ्यावी? त्यांतून एक तरी खरी असावी.

१. क्षची किंमत काढतानां जी कांहीं चूक केली असेल ती चूक क्षचे लाग्रतंम घेतानां इतकी कमी केली जाईल, कीं लाग्रतंमांतील चूक कोणत्याही सांगीतल्या अपूर्णांकापेक्षां कमी होईल.

२. अंक काढण्यांत कितीही लहान चूक केली असली, तर लाग्रतंमांतली चूक कोणत्येही दिलेल्ये अपूर्णांकापेक्षां अधिक असावी, सांगीतलेला अपूर्णांक ·००१ हाच आहे असें मनांत आण.

या पुढील सूचनेवाचून वरचा दोन गोष्टीविषयीं कांही उत्तर देववत नाहीं:

जेव्हां एकादी नवी कृती, किंवा नवी पद्धती कामांत आणितात, तेव्हां ज्या कृत्यांत ती कृती येत्ये, त्या कृत्याचें उलगडणें जरी केवळ बरोबर होत नाहीं, तरी बरोबरीचे जवळजवळ येईल असें मानून घेऊं नये, परंतु प्रत्यक्ष सिद्ध करून दाखविलें पाहिजे.

पूर्वीं ज्या कृती सांगीतल्या आहेत, त्यांविषयीं ही वरची गोष्ट शिकणारानें सिद्ध करण्याकडे लक्ष द्यावें. एक उदाहरण विस्तारपूर्वक करून दाखवितों.

$\frac{अ+ब}{क+ड}$ हें कांहीं कृत्याचें उत्तर आहे असें मनांत आण. ब आणि ड यांची किंमत काढितेसमयीं, कांहीं चूक केली आणि ती चूक इच्छेप्रमाणें हवी तितकी लहान आहे असें मनांत आण. अथवा वरचे बोलण्याचे रीतीप्रमाणें बब − २ = ०, आणि डडड − ३ = ० याचें उत्तर इच्छेप्रमाणें केवळ जवळ येतें अशा दोन समीकरणांत ब आणि ड आहेत असें घे. बचा जवळजवळचा किंमती दाखविण्यासाठीं ब' आणि ब'' घे, त्यांतून ब' कमी, आणि ब'' अधिक; डचा जवळजवळचा किंमती दाखवायासाठीं

$इ'$ आणि $इ''$ घे, तर वरचे पद्धतीमध्यें या जवळच्या किंमती मांडिल्याने या प्रमाणें होईल,

$$\frac{अ+ब'}{क+इ'} \text{ आणि } \frac{अ+ब''}{क+इ''}$$

या दोन पद्धतींस ताडून पहायासाठीं, पहिलींतून दुसरी वजा कर, ह्मणजे याप्रमाणें होईल

$$\frac{अ+ब'}{क+इ'}-\frac{अ+ब''}{क+इ''}=\frac{(अक+अइ''+कब'+ब'इ'')-(अक+अइ'+कब''+इ'ब'')}{कक+कइ'+कइ''+इ'इ''}$$

$$=\frac{अ(इ''-इ')-क(ब''-ब')+(ब'इ''-इ'ब'')}{कक+(इ'+इ'')क+इ'इ''}$$

आणि १८१,१८२ पृष्ठांप्रमाणें $इ'$ याचे जवळजवळ $इ''$ आणि $ब'$ याचे जवळजवळ $ब''$ इच्छेप्रमाणें केले जातील, यामुळें $इ''-इ'$ आणि $ब''-ब'$ इच्छेप्रमाणें फार लहान करितां येतील; यावरून $अ(इ''-इ')$ आणि $क(ब''-ब')$ १८४ पृष्ठावरचे टीपेवरून हवे तितके लहान करितां येतील. आणि त्याचसारिखें $ब'इ''-इ'ब''$ हेही. कांकी ती आणि खालीं लिहिलेली पद्धती सारिखीच आहे असें दिसेल

$$ब'(इ''-इ')-इ'(ब''-ब').$$

यावरून वरचे अपूर्णांकाचीं वेगळालीं पदें इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतात त्यावरून त्या अपूर्णांकाचा अंश इच्छेप्रमाणें लहान केला जाईल. परंतु $इ'$ यापेक्षां $इ''$ नेहेमी अधिक आहे, ह्मणून १७८ पृष्ठावरचे ५ व्ये लेम्मा प्रमाणें त्या अपूर्णांकाचा छेद या पुढील पेक्षां नेहेमी मोठा होईल

$$कक+(इ'+इ')क+इ'इ'.$$

या उदाहरणावरून दिसलें, कीं एक अपूर्णांक आहे ज्याचा अंश इच्छेप्रमाणें लहान लहान केला जाईल, परंतु त्याचा छेद तसा लहान केला जात नाहीं; यामुळें तो अपूर्णांक हवा तितका लहान केला जाईल. ह्मणजे, $\frac{अ+ब}{क+इ}$ याच्या निरनिराळ्या किंमती $\frac{अ+ब'}{क+इ'}$ आणि $\frac{अ+ब''}{क+इ''}$ हे अपूर्णांक आहेत जे इच्छेप्रमाणें जवळजवळ आणितां येतील, अथवा ज्यांचें अंतर इच्छेप्रमाणें लहान करितां येईल. पूर्वींसारिखें किंमती-

र्णअर्थाचे भाषणानें, $\frac{अ+ब}{क+इ}$ या अपूर्णांकास वास्तवीक किंमत आहे, ब आणि इयांचा जवळजवळ किंमती मांडिल्या असतां, त्या वास्तवीक किंमतीचे जवळजवळ होत जातात.

बीजगणितरूप पद्धती मध्यें जो क्रमनियम आहे असें मानिलें, तो या पुढील सिद्धांतांत आहे, आणि तो नियम विशेष पक्षांनीं शिकणारानें सिद्ध करावा:

सामान्य सिद्धांत	विशेषपक्ष
प एक बीजरूप पद्धती आहे, जीमध्यें क्ष येतो, त्या पद्धतींत क्ष-चेजागीं अ मांडिला असतां त्या पद्धतीची किंमत प बरोबर होईल.	प = क्ष+क्ष^2 प = अ+अ^2
क्ष-चेजागीं अ+म मांडला असतां प पद्धती क्र चे बरोबर होईल असें मनांत आण.	क्र = (अ+म) + (अ+म)^2 = अ+अ^2 + (१+२अ) म+म^2 = प + (१+२अ) म+म^2
तेव्हां जर इच्छे प्रमाणें अ आणि अ+म हे हवे तितके जवळजवळ केले जातील; म्हणजे, हवा तितका म लहान केला जाईल; तेव्हां प आणि क्र यांचें अंतर जितकें पाहिजे तितकें लहान केलें जाईल.	या वरचे समीकरणापासून क्र − प = (१ + २अ) म+म^2 जर हवा तितका म लहान केला तर यांतील प्रत्येक पद हवें तितकें लहान केलें जाईल.

या पूर्वीं जा पद्धती काढिल्या आहेत, त्यांविषयीं एक गोष्टीवर मात्र संशय येतो, म्हणजे, √क्ष, ३√क्ष, इत्यादि, जसा जसा पक्ष असेल, तसा तसा तो संशय यांचे खऱ्या किंवा जवळजवळच्या किंमतीविषयीं असतो. जर इच्छे प्रमाणें हवा तितका म लहान केला जातो, तर ३√अ आणि ३√अ+म यांचा जवळजवळचा किंमती इच्छे प्रमाणें हव्या तितक्या जवळजवळ केल्या जातील कीं काय? या प्रश्नास उत्तर देण्यासाठीं, एक सिद्धांत अगोदर सांगीतला पाहिजे, जो सिद्धांत दुसऱ्ये पुष्कळजागीं उपयोगी पडेल.

तो सिद्धांत या पुढील प्रमाणें आहे

$$क्ष^{२}-य^{२} = (क्ष-य)\,(क्ष+य)$$

$$क्ष^{३}-य^{३} = (क्ष-य)\,(क्ष^{२}+क्षय+य^{२})$$

$$क्ष^{४}-य^{४} = (क्ष-य)\,(क्ष^{३}+क्ष^{२}य+क्षय^{२}+य^{३})$$

. . . .

$$क्ष^{न}-य^{न} = (क्ष-य)\,(क्ष^{न-१}+क्ष^{न-२}य+\cdots+क्षय^{न-२}+य^{न-१})$$

वरचीं समीकरणें गुणाकारापासून समजतील; उदाहरण,

$$\begin{array}{l} क्ष^{३}+क्ष^{२}य+क्षय^{२}+य^{३} \\ क्ष-य \\ \hline क्ष^{४}+क्ष^{३}य+क्ष^{२}य^{२}+क्षय^{३} \\ \quad -क्ष^{३}य-क्ष^{२}य^{२}-क्षय^{३}-य^{४} \\ \hline क्ष^{४}+० \quad +० \quad +० \quad -य^{४} \end{array}$$

वरचा गुणाकार, प्रवेशकांतील गुणाकाराचे दुसरे रीती प्रमाणें केला आहे, असें पहाण्यांत येईल, आणि पुढें ही या रीतिप्रमाणें गुणाकार नेहेमी केले जातील.

$क्ष+य$, $\quad क्ष^{२}+क्षय+य^{२}$, $\quad क्ष^{३}+क्ष^{२}य+क्षय^{२}+य^{३}$, इत्यादि.

ह्या पद्धतींचा क्रम शोधिला असतां पहाण्यांत येईल, कीं प्रत्येक पद्धती तिचे पूर्वींचे पद्धतीस यने गुणून, त्या गुणाकाराला क्षचा एक घात अधिक मिळवून झाली आहे. जसें,

$$क्ष^{२}+क्षय+य^{२} = क्ष^{२}+य\,(क्ष+य)$$

$$क्ष^{३}+क्ष^{२}य+क्षय^{२}+य^{३} = क्ष^{३}+य\,(क्ष^{२}+क्षय+य^{२}) \qquad इत्यादि.$$

वरच्या तीन पद्धतींच्या जागीं $प_{१}$, $प_{२}$, $प_{३}$, इत्यादि अशीं चिन्हें घेतलीं*,

---

* या मोठ्ये प च्या पायांखालीं जे अंक आहेत त्यांशीं आणि मूळ प्रकाशक चिन्हांशीं घालमेल होऊं देऊं नये. १०६ पृष्ठावरच्या घाताच्या चिन्हाप्रमाणें हे कामांत घेतले आहेत, आणि त्यांस प एक, प दोन, प तीन, इत्यादि याप्रमाणें वाचितात.

नर याप्रमाणें होईल $प_2 = क्ष^2 + य\, प_1,\ प_3 = क्ष^3 + य\, प_2,\ प_4 = क्ष^4 + य\, प_3$, इत्यादि

अथवा सामान्यतः $प_न = क्ष^न + य\, प_{न-1}$

हेंही पहाण्यांत येईल, कीं क्षनें गुणून आणि यचा एक घात मिळवून त्याच प-दनी निघतील. जसें:

$$क्ष^2 + क्षय + य^2 = य^2 + क्ष(क्ष + य)$$

$$क्ष^3 + क्ष^2य + क्षय^2 + य^3 = य^3 + क्ष(क्ष^2 + क्षय + य^2) \text{ इत्यादि.}$$

अथवा $प_2 = य^2 + क्ष\, प_1,\quad प_3 = य^3 + क्ष\, प_2,\quad प_4 = य^4 + क्ष\, प_3$, इत्यादि

अथवा सामान्यतः, $प_न = य^न + क्ष\, प_{न-1}$

हा सिद्धांत याप्रमाणें मांडितां येतो:

$$क्ष^न - य^न = (क्ष - य)\, प_{न-1}$$

आणि याप्रमाणें सिद्ध केला जातो:

सामान्य सिद्धांत	विशेष पक्ष
$प_न = क्ष^न + य\, प_{न-1}$	$प_4 = क्ष^4 + य\, प_3$
$प_न = य^न + क्ष\, प_{न-1}$	$प_4 = य^4 + क्ष\, प_3$
$(-)\ 0 = क्ष^न - य^न - (क्ष - य)\, प_{न-1}$	$(-)\ 0 = क्ष^4 - य^4 - (क्ष - य)\, प_3$
$क्ष^न - य^न = (क्ष - य)\, प_{न-1}$	$क्ष^4 - य^4 = (क्ष - य)\, प_3$

आतां $\sqrt[3]{१०}$ आणि $\sqrt[3]{१० + म}$ यांस शोधितों, जांत म इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतो. यांचा जवळ जवळ किंमती दाखविण्यासाठीं य आणि क्ष घे, अशानें १८१ आणि १८२ व्ये पृष्ठांवरून

$$\left.\begin{aligned} क्ष^3 &= (१० + म) + वि \\ य^3 &= १० + व \end{aligned}\right\} \text{ यांत वि आणि व इच्छेप्रमाणें लहान केले जातील.}$$

$$(-)\quad क्ष^3 - य^3 = म + वि - व$$

अथवा $(क्ष - य)(क्ष^2 + क्षय + य^2) = म + वि - व$

$$क्ष - य = \frac{म + वि - व}{क्ष^2 + क्षय + य^2}$$

आतां क्ष आणि य हे दोन्हीं २ पेक्षां मोठे आहेत, कांकीं $२^३ = ८$ ह्मणून १० पेक्षां लहान आहेत: यामुळें वरचे अपूर्ण पद्धतीचा छेद १२ पेक्षां अगत्य मोठा होईल, आणि तिचे अंश इच्छे प्रमाणें लहान लहान केले जातील. यावरून वरची अपूर्ण पद्धतीजी $= क्ष - य$, ती इच्छे प्रमाणें हवी तितकी लहान करितां येत्ये, यामुळें इच्छे प्रमाणें क्ष आणि य हवे तितके जवळ जवळ केले जातील. परंतु क्ष आणि य हे $\sqrt[३]{१०+म}$ आणि $\sqrt[३]{१०}$ यांचा जवळ जवळचा किंमती आहेत.

शिकणारानें हा पुढील सिद्धांत उलगडून सिद्ध करावा:

$$क्ष^२ - य^२ = (क्ष+य)(क्ष-य)$$

$$क्ष^४ - य^४ = (क्ष+य)(क्ष^३ - क्ष^२य + क्षय^२ - य^३)$$

$$क्ष^६ - य^६ = (क्ष+य)(क्ष^५ - क्ष^४य + क्ष^३य^२ - क्ष^२य^३ + क्षय^४ - य^५)$$

इत्यादि इत्यादि

$$क्ष^३ + य^३ = (क्ष+य)(क्ष^२ - क्षय + य^२)$$

$$क्ष^५ + य^५ = (क्ष+य)(क्ष^४ - क्ष^३य + क्ष^२य^२ - क्षय^३ + य^४)$$

इत्यादि इत्यादि

आतां घात आणि मूळ प्रकाशक चिन्हांची सामान्य सिद्धता दाखवितों.

क्षचे घाताचा कोणताही घात करायाचा असेल, तर दोन्ही घातांचीं घातप्रकाशक चिन्हें परस्पर गुणून तो गुणाकार घाताचें प्रकाशक चिन्ह होईल;

उदाहरण,

$$(क्ष^३)^४ = क्ष^{३×४} = क्ष^{१२}, \text{ कांकीं } (क्ष^३)^४ = क्ष^३.क्ष^३.क्ष^३.क्ष^३ = क्ष^{३+३+३+३}$$

यासारिखें,

$$(क्ष^२)^{१२} = क्ष^{२४} \quad (क्ष^३)^६ = क्ष^{१८} \quad (क्ष^अ)^ब = क्ष^{अब}$$

$$(क्ष^{अ+ब})^{अ-ब} = क्ष^{अ^२-ब^२} \quad (क्ष^{अ-ब})^{अ+ब} = क्ष^{अ^२-ब^२}$$

$$(क्ष^म)^न = (क्ष^न)^म = क्ष^{मन}$$

गुणाकाराचा घात हा गुण्य आणि गुणकाचे घातांचे गुणाकाराबरोबर आहे.

जसें, $(अबक)^३ = अबक.अबक.अबक = अअअबबबककक = अ^३ब^३क^३$

$$(अ^३ब^३क^३)^४ = (अ^३)^४ (ब^३)^४ (क^३)^४ = अ^{१२}ब^{१२}क^{१२}$$

$$(अ^मब^नक^प)^र = (अ^म)^र (ब^न)^र (क^प)^र = अ^{मर} ब^{नर} क^{पर}$$

हीच रीति भागाकारास लाविली जात्ये. जसें, $\left(\frac{अ}{ब}\right)^३ = \frac{अ^३}{ब^३}$; कांकीं पहिलें पद याजबरोबर आहे $\frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब} \times \frac{अ}{ब}$, अथवा १७७ पृष्ठावरचे २ लेम्मा प्रमाणें $= \frac{अअअ}{बबब}$.

मूळाचें मूळ तेंच आहे ज्याचें प्रकाशक चिन्ह दोन पहिल्ये सांगीतल्ये मूळांचे प्रकाशक चिन्हाचे गुणाकाराबरोबर आहे. जसें घनमूळ अथवा त्रिघात मूळाचें चतुर्घात मूळ, बारा घातमूळ आहे. हें सिद्ध करायासाठीं, क्ष याचे त्रिघात मूळाचें चतुर्घात मूळ दाखवायासाठीं य घे, तेव्हां

$$\sqrt[४]{\sqrt[३]{क्ष}} = य \therefore \sqrt[३]{क्ष} = य^४ \qquad क्ष = (य^४)^३ = य^{१२}$$

$$\text{अथवा } य = \sqrt[१२]{क्ष}, \text{ परंतु } य = \sqrt[४]{\sqrt[३]{क्ष}}$$

१७५ व्ये पृष्ठावरचे ६ व्ये सिद्धांतांत असें दाखविलें गेलें कीं क्ष ला अंकगणित रूपानें केवळ एक घनमूळ, किंवा १२ घातमूळ होऊं शकतें; आणि घनमूळाला अंकगणित रूपानें केवळ एक चतुर्घात मूळ होऊं शकतें. यावरून वरची कृती सिद्ध झाली; म्हणजे क्षचे **एक** घनमूळाचें **एक** चतुर्घात मूळ हें क्षचें **एक** १२ घातमूळ आहे; आणि प्रत्येक तऱ्हेचे मूळाचें अंकगणितरूपानें केवळ एक मूळ आहे, असें वरचे गोष्टीवरून दाखविलें जातें. परंतु जीं बीजरूप चिन्हें क्ष चीं मूळें आहेत, त्यांस अंकगणित रूपाचा अर्थ असेल किंवा नसेल, अशा या सर्व चिन्हांविषयीं मनन करित्ये समयीं, शिकणारानें स्मरण ठेवावें, कीं वरचे कृतीपासून हें सिद्ध होत नाहीं कीं क्ष चे **हरएक** तृतीय घात मूळाचे **हरएक** चतुर्घात मूळ क्ष चें १२ घातमूळ आहे. अशी

गोष्ट घडेल, परंतु अद्यापि सिद्ध झाली नाहीं.

त्याच रीतीनें सिद्ध केलें जातें, कीं

$$\sqrt{\sqrt{क्ष}} = \sqrt[४]{क्ष};\ \sqrt{\sqrt[३]{क्ष}} = \sqrt[६]{क्ष} = \sqrt[३]{\sqrt{क्ष}}$$

$$\sqrt[अ]{\sqrt[ब]{क्ष}} = \sqrt[अब]{क्ष} = \sqrt[ब]{\sqrt[अ]{क्ष}};\ \sqrt[५]{\sqrt[५]{क्ष}} = \sqrt[२५]{क्ष}$$

गुणाकाराचें मूळ गुण्य गुणकाचे मूळांचा गुणाकार केल्यानें निघतें. जसें.

$$\sqrt[४]{अबक} = \sqrt[४]{अ} \times \sqrt[४]{ब} \times \sqrt[४]{क} \cdots\cdots\cdots (\text{ऊ})$$

वरचे दोन पद्धतींचा चतुर्घात एकच आहे, ह्मणजे, अबक. कांकीं **१७१ व्या पृष्ठावरचे** व्याख्याना प्रमाणें

$$\left(\sqrt[४]{अबक}\right)^४ = अबक$$

आणि **१९६ पृष्ठावरून,**

$$\left(\sqrt[४]{अ} \times \sqrt[४]{ब} \times \sqrt[४]{क}\right)^४ = \left(\sqrt[४]{अ}\right)^४ \times \left(\sqrt[४]{ब}\right)^४ \times \left(\sqrt[४]{क}\right)^४ = अ \times ब \times क$$

ह्मणजे, (**ऊ**) समीकरणाची प्रत्येक बाजू अबक चें चतुर्घात मूळ आहे. परंतु अबक यास अंकगणित रूपाचें केवळ एक चतुर्घात मूळ आहे; यामुळें (**ऊ**) समीकरणाची प्रत्येक बाजू तें मूळ आहे; आणि त्यामुळें त्या दोन बाजू बरोबर आहेत. तशीच रीतीनें सिद्ध केलें जातें, कीं

$$\sqrt{अबक} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब} \times \sqrt{क} \qquad \sqrt{अब^२} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब^२} = ब\sqrt{अ}$$

$$\sqrt[३]{अ^३ब^३क^३} = \sqrt[३]{अ^३} \times \sqrt[३]{ब^३} \times \sqrt[३]{क^३} \qquad \sqrt[४]{३२} = \sqrt{१६} \times \sqrt[४]{२} = २\sqrt[४]{२}$$

ह्याच रीति भागाकारास लाविली जाईल, जसें. $\sqrt[३]{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt[३]{अ}}{\sqrt[३]{ब}}$; कांकीं या दोहोंचा घन एकच आहे असें काढिलां येईल, ह्मणजे, $\frac{अ}{ब}$.

जर क्षचा भलता घात वाढविला, आणि त्या घाताचें मूळ काढिलें, तर कृतीचा क्रम बदल केल्यानें उत्तरामध्यें कांहीं फेर पडत नाहीं.

ह्मणजे, $\sqrt[३]{क्ष^४}$ आणि $\left\{\sqrt[३]{क्ष}\right\}^४$ हीं दोन्ही बरोबर आहेत

हें सिद्ध करायासाठीं, १९६ वें पृष्ठ पहा,

$$\sqrt[२]{क्ष^४} = \sqrt[२]{क्षक्षक्षक्ष} = \sqrt[२]{क्ष} \times \sqrt[२]{क्ष} \times \sqrt[२]{क्ष} \times \sqrt[२]{क्ष} = \{\sqrt[२]{क्ष}\}^४$$

त्याच सारिखें. $\sqrt[अ]{क्ष^ब} = (\sqrt[अ]{क्ष})^ब$; $\sqrt{क्ष^३} = (\sqrt{क्ष})^३$.

$\sqrt[अ]{क्ष^ब}$ या पद्धतींतळें, जर अ आणि ब हे दोन्ही एकच अंकानें गुणिले किंवा भागिले, तर त्या पद्धतीचे किंमतींत फेर पडत नाहीं. ह्मणजे,

$$\sqrt[मअ]{क्ष^{मब}} = \sqrt[अ]{क्ष^ब}$$

कारण, पूर्वीं दाखविलें गेलें, कीं

$\sqrt[मअ]{क्ष^{मब}} = \sqrt[अ]{\sqrt[म]{क्ष^{मब}}}$ हीं याप्रमाणें आहेत $\sqrt[अ]{\sqrt[म]{(क्ष^ब)^म}} = \sqrt[अ]{क्ष^ब}$

$$\text{कांकीं} \quad \sqrt[म]{(क्ष^ब)^म} = क्ष^ब$$

त्याच सारिखें, $\sqrt[६]{अ^४} = \sqrt[३]{अ^२} = \sqrt[९]{अ^६} = \sqrt[१२]{अ^८}$

घाताचें मूळ काढायाचें असेल, तेव्हां जर घात प्रकाशक आणि मूळप्रकाशक यांचा भागाकार निःशेष होत असल्यास, घात प्रकाशकास मूळ प्रकाशकानें भाग.

जसें. $\sqrt[४]{क्ष^{१२}} = क्ष^{\frac{१२}{४}} = क्ष^३$. कांकीं $क्ष^{१२} = (क्ष^३)^४$; यामुळें $\sqrt[४]{क्ष^{१२}} = क्ष^३$.

त्याच सारिखें, $\sqrt[८]{क्ष^{१६}} = क्ष^२$, $\sqrt{क्ष^{२०}} = क्ष^{१०}$; आणि याप्रमाणें पुढेंही.

जेव्हां घाताचें प्रकाशक चिन्ह मूळाचे प्रकाशकानें निःशेष भागिलें जात नाहीं. जसें. $\sqrt[३]{क्ष^७}$, या पक्षींही, अद्यापि बीजगणिताचे तऱ्हेनें करण्याची रीति कांहीं सांपडलीनाहीं. जिणेंकरून $\sqrt[३]{क्ष^७}$ यास याचें $\sqrt[३]{\ }$ चिन्ह नाहींसें होई* असें रूप देववत नाहीं. यामुळें, क्ष हा कोणत्ये पूर्ण किंवा अपूर्णांकाचे स्थळीं

---

* याप्रमाणें कृती करावी. $क्ष^७ = क्ष^६ . क्ष$, तर $\sqrt[३]{क्ष^७} = \sqrt[३]{क्ष^६ \times क्ष} = \sqrt[३]{क्ष^६} \times \sqrt[३]{क्ष} = क्ष^२ \sqrt[३]{क्ष}$; यांत तरी $\sqrt[३]{\ }$ हें चिन्ह राहिलें.

आहे हें काढावें, आणि नंतर+ त्या किंमतीनें $\sqrt[3]{\text{क्ष}^{७}}$ अथवा $\text{क्ष}^{२}\sqrt[3]{\text{क्ष}}$ याची किंमत अंकगणित रीतीनें काढायाची मात्र राहिली.

$\sqrt[3]{\text{क्ष}^{७}}$ यास दर्शविण्याचे रीतीविषयींचा मात्र प्रश्न राहिला, आणि तो प्रश्न **१७१ आणि १७२ व्ये पृष्ठावर** हा प्रश्न मनांत आला, आणि तेथे कळलें, कीं $\sqrt{\text{क्ष}}$, $\sqrt[3]{\text{क्ष}}$, इत्यादिकांचेजागीं $\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}$, $\text{क्ष}^{\frac{१}{३}}$, इत्यादि अशेरूपानें मांडणें एक पक्षीं मोठ्ये सोयीस पडलें असतें. परंतु त्या ठिकाणीं इतकेंच सांगून पुढें कांहीं लिहिलें नाहीं. कांकीं, **व्यवहारी अपूर्णांकांस जा रीती लाविल्या जातात, त्याहून निराळ्या रीती अपूर्ण घातप्रकाशकांस लावण्याचे अगत्यावांचून, अथवा पूर्णांक प्रकाशक चिन्हास जा रीती लागतात त्याहून निराळ्या रीति अपूर्ण घातप्रकाशकांस लावण्याचे अगत्यावांचून**, या प्रकाशक चिन्हें लिहिण्याचे तऱ्हेपासून

+ बीजगणित आणि अंकगणित यांचे कृती मध्यें कांहीं फेर आहे असें समजलें पाहिजे. बीजगणितामध्यें उत्तरें काढितात असें वास्तवीक ह्मणवत नाहीं, परंतु उत्तरांस केवळ असें रूप देववतें कीं जा रूपापासून त्यांची किंमत अंकगणित रीतीनें सहज काढितां येईल. उदाहरण, अ आणि ब यांची बेरीज काय आहे? खरें ह्मटलें असतां अ+ब हें या प्रश्नाचें उत्तर नाहीं, परंतु त्याचें दर्शक मात्र आहे, ह्मणून अ आणि ब हे कोणत्ये अंकस्थळीं आहेत, हें कळे पावेतों प्रश्नाचें योग्य उत्तर काढण्यास थांबलें पाहिजे. परंतु, ८अ+५अ यांची बेरीज काय आहे? असा प्रश्न केल्यावर पूर्वीपेक्षां एक पायरी पुढें जाऊं शकतों; कांकीं, ८अ+५अ ही पद्धती जरी बीजगणित रूपदर्शक आहे, तथापि या विद्येचे भाषणानें जें अति सरळ रूप होऊं शकतें तें रूप नाहीं. परंतु तें अति सरळ रूप १३अ हें आहे; तथापि अ कोणत्या अंकस्थळीं आहे हें कळे पावतों उत्तर सांपडत नाहीं. उलगडण्याचे अशा क्रमास पोंचल्यावर पुढें उत्तराचे जवळ जाण्यासाठीं बीज सोडून अंकगणित घ्यावें लागतें, तेव्हां असें ह्मणतात कीं बीजगणिताचे शेवटील रूपास पोंचला. जसें अ+ब हें शेवटील रूप आहे; परंतु ८अ+५अ हें तसें नाहीं. पुनः $\sqrt[3]{\text{क्ष}^{७}}$, अथवा $\text{क्ष}^{२}\sqrt[3]{\text{क्ष}}$, हें शेवटील रूप आहे; $\sqrt[3]{\text{क्ष}^{१२}}$ हें तसे नाहीं.

मूळांचे सर्व दुर्बोध संबंध जाणण्यास कांहीं स्पष्ट कारण नव्हतें. पूर्ण घातप्रकाशकांविषयीं जा रीती सिद्ध केल्या त्यांचीं, आणि अपूर्ण घात प्रकाशकां विषयींचा जारी तींचा शोध करायाचा आहे, यादोहोंचीं उदाहरणें दोन उभ्ये ओळींत लिहून दाखवितों; आ तां हें विचारायाचें आहे, कीं पुढें लिहिलेल्ये कल्पनेवरून दुसरे ओळींतले सिद्धांत खरे आहेत कीं काय? ती कल्पना याप्रमाणें

जर $\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}$ हा $\sqrt[\text{न}]{\text{क्ष}^{\text{म}}}$ यास दाखवितो

$\text{क्ष}^{६} \times \text{क्ष}^{४} = \text{क्ष}^{६+४} = \text{क्ष}^{१०}$	$\text{क्ष}^{\frac{२}{३}} \times \text{क्ष}^{\frac{१}{२}} = \text{क्ष}^{\frac{२}{३}+\frac{१}{२}} = \text{क्ष}^{\frac{७}{६}}$ हें खरे आहे कीं नाहीं?
$\frac{\text{क्ष}^{६}}{\text{क्ष}^{४}} = \text{क्ष}^{६-४} = \text{क्ष}^{२}$	$\text{क्ष}^{\frac{२}{३}} \div \text{क्ष}^{\frac{१}{२}} = \text{क्ष}^{\frac{२}{३}-\frac{१}{२}} = \text{क्ष}^{\frac{१}{६}}$ हे खरें०?
$(\text{क्ष}^{६})^{२} = \text{क्ष}^{६\times२} = \text{क्ष}^{१२}$	$(\text{क्ष}^{\frac{२}{३}})^{\frac{२}{५}} = \text{क्ष}^{\frac{२}{३}\times\frac{२}{५}} = \text{क्ष}^{\frac{४}{१५}}$ हें खरें०?
$\sqrt[३]{\text{क्ष}^{६}} = \text{क्ष}^{\frac{६}{३}} = \text{क्ष}^{२}$	$\sqrt[३]{\text{क्ष}^{\frac{४}{५}}} = \text{क्ष}^{\frac{४}{५}\div३} = \text{क्ष}^{\frac{४}{१५}}$ हें खरें०?

पहिल्यानें हें लक्षांत येतें, कींजा तऱ्हेनें पूर्वींचा दुसरा विस्तार झाला होता त्या तऱ्हेने वरचे शेवटील रीती पासून हा विस्तार होतो. यावरून हेंच कळलें, कीं जर ब हा अ नें भागिला जातो, तर $\text{क्ष}^{\frac{\text{ब}}{\text{अ}}}$ हा $\sqrt[\text{अ}]{\text{क्ष}^{\text{ब}}}$ याचा खरा दर्शक आहे. परंतु जेव्हां ब हा अ नें भागिला जात नाहीं, तेव्हां $\text{क्ष}^{\frac{\text{ब}}{\text{अ}}}$ यास कांहीं अर्थ नाहीं. तर त्याला अर्थ देतों; ह्मणजे $\sqrt[\text{अ}]{\text{क्ष}^{\text{ब}}}$, हें कसेंही असो तथापि हें पद त्यास दर्शवितें, असें ह्मणतों. आतां या नवे चिन्हास जा रीति लावल्या पाहिजेत त्यांचा शोध करितों. खालच्या पहिल्ये उभ्ये ओळीमध्यें सामान्य पक्ष दाखविला आहे, आणि दुसऱ्ये उभ्ये ओळींत विशेष पक्ष दाखविला आहे. जाजा पृष्ठांवर वेगळ्याल्या रीती आहेत, त्या पृष्ठांचा अंक एक्ये बाजूस मांडिला आहे.

$\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \times \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ हें काय आहे?	$\text{क्ष}^{\frac{२}{३}} \times \text{क्ष}^{\frac{१}{२}}$ हें काय आहे?
$\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}$ याचा अर्थ $\sqrt[\text{न}]{\text{क्ष}^{\text{म}}}$	$\text{क्ष}^{\frac{२}{३}}$ याचा अर्थ $\sqrt[३]{\text{क्ष}^{२}}$
१६८ पृ० $= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{मक}}}$	१६८ पृ० $= \sqrt[६]{\text{क्ष}^{४}}$
$\text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$ याचा अर्थ $\sqrt[\text{क}]{\text{क्ष}^{\text{प}}}$	$\text{क्ष}^{\frac{१}{२}}$ याचा अर्थ $\sqrt{\text{क्ष}}$
१९८ पृ० $= \sqrt[\text{नक}]{\text{क्ष}^{\text{नप}}}$	१९८ पृ० $= \sqrt[६]{\text{क्ष}^{३}}$
यामुळें $\text{क्ष}^{\frac{\text{म}}{\text{न}}} \times \text{क्ष}^{\frac{\text{प}}{\text{क}}}$	यामुळें, $\text{क्ष}^{\frac{२}{३}} \times \text{क्ष}^{\frac{१}{२}}$

$$= \sqrt[नक]{क्ष^{मक}} \times \sqrt[नक]{क्ष^{नप}}$$

१९८ पृ० $= \sqrt[नक]{क्ष^{मक} \times क्ष^{नप}}$

१९८ पृ० $= \sqrt[नक]{क्ष^{मक+नप}}$

हें याप्रमाणें दर्शविलें जातें

$$क्ष^{\frac{मक+नप}{नक}}$$

परंतु, $\frac{मक+नप}{नक} = \frac{म}{न} + \frac{प}{क}$

यामुळें, $क्ष^{\frac{म}{न}} \times क्ष^{\frac{प}{क}} = क्ष^{\frac{म}{न} + \frac{प}{क}}$

$$= \sqrt[६]{क्ष^{४}} \times \sqrt[६]{क्ष^{३}}$$

१९८ पृ० $= \sqrt[६]{क्ष^{४} \times क्ष^{३}}$

१९८ पृ० $= \sqrt[६]{क्ष^{७}}$

हें याप्रमाणें दर्शविलें जातें

$$क्ष^{\frac{७}{६}}$$

परंतु, $\frac{७}{६} = \frac{२}{३} + \frac{१}{२}$

यामुळें, $क्ष^{\frac{२}{३}} \times क्ष^{\frac{१}{२}} = क्ष^{\frac{२}{३} + \frac{१}{२}}$

आतां हीं पुढील पृष्ठांचे खुणें वाचून अधिक संक्षेपानें दाखविलीं आहेत.

$क्ष^{\frac{म}{न}} \div क्ष^{\frac{प}{क}}$ हें काय आहे?

म्हणजे $\sqrt[न]{क्ष^{म}} \div \sqrt[क]{क्ष^{प}}$ हें आहे

अथवा $\sqrt[नक]{क्ष^{मक}} \div \sqrt[नक]{क्ष^{नप}}$

अथवा $\sqrt[नक]{क्ष^{मक} \div क्ष^{नप}}$

अथवा $\sqrt[नक]{क्ष^{मक-नप}}$

अथवा $क्ष^{\frac{मक-नप}{नक}}$

परंतु. $\frac{मक-नप}{नक} = \frac{म}{न} - \frac{प}{क}$

यामुळें. $क्ष^{\frac{म}{न}} \div क्ष^{\frac{प}{क}} = क्ष^{\frac{म}{न} - \frac{प}{क}}$

$क्ष^{\frac{२}{३}} \div क्ष^{\frac{१}{२}}$ हें काय आहे?

म्हणजे $\sqrt[३]{क्ष^{२}} \div \sqrt{क्ष}$ हें आहे

अथवा $\sqrt[६]{क्ष^{४}} \div \sqrt[६]{क्ष^{३}}$

अथवा $\sqrt[६]{क्ष^{४} \div क्ष^{३}}$

अथवा $\sqrt[६]{क्ष^{४-३}}$

अथवा $क्ष^{\frac{१}{६}}$

परंतु. $\frac{१}{६} = \frac{२}{३} - \frac{१}{२}$

यामुळें, $क्ष^{\frac{२}{३}} \div क्ष^{\frac{१}{२}} = क्ष^{\frac{१}{६}}$

$\left(क्ष^{\frac{म}{न}}\right)^{\frac{प}{क}}$ हें काय आहे?

याचा अर्थ $\sqrt[क]{\left\{\sqrt[न]{क्ष^{म}}\right\}^{प}}$ हा आहे

अथवा १९८ पृ० $\sqrt[क]{\sqrt[न]{\left(क्ष^{म}\right)^{प}}}$

अथवा १९६ पृ० $\sqrt[नक]{क्ष^{मप}}$

अथवा $क्ष^{\frac{मप}{नक}}$

परंतु. $\frac{मप}{नक} = \frac{म}{न} \times \frac{प}{क}$

यामुळें $\left(क्ष^{\frac{म}{न}}\right)^{\frac{प}{क}} = क्ष^{\frac{म}{न} \times \frac{प}{क}}$

$\left(क्ष^{\frac{४}{५}}\right)^{\frac{२}{३}}$ हें काय आहे?

याचा अर्थ $\sqrt[३]{\left\{\sqrt[५]{क्ष^{४}}\right\}^{२}}$ हा आहे

अथवा १९८ पृ० $\sqrt[३]{\sqrt[५]{\left(क्ष^{४}\right)^{२}}}$

अथवा १९६ पृ० $\sqrt[१५]{क्ष^{८}}$

अथवा $क्ष^{\frac{८}{१५}}$

परंतु. $\frac{८}{१५} = \frac{४}{५} \times \frac{२}{३}$

यामुळें, $\left(क्ष^{\frac{४}{५}}\right)^{\frac{२}{३}} = क्ष^{\frac{४}{५} \times \frac{२}{३}}$

या शेवटील कृतींत, २०० व्ये पृष्ठावरचे तिसऱ्ये आणि चवथ्ये प्रश्नांचीं उत्तरें आहेत.

१७० आणि १७१ पृष्ठ पाहून,स्मरण केल्यानें जा मूळ रीती तेथें कामांत आणिल्या, त्या अपूर्ण घात मूळ प्रकाशक चिन्हांस लाविल्या जातात, त्या एथें सिद्ध झाल्या त्यावरून, ऋण अपूर्ण घात मूळ प्रकाशकांचा अर्थ, आणि त्यां विषयींचा रीती स्थापिल्या जातील. जसें

$$क्ष^{-\frac{2}{3}} \text{ हे } \frac{1}{क्ष^{\frac{2}{3}}} \text{ अथवा } \frac{1}{\sqrt[3]{क्ष^2}} \text{ अथवा } \sqrt[3]{\left(\frac{1}{क्ष}\right)^2} \text{ यांचेजागीं आहेत.}$$

वर्ग, घन आणि चतुर्घात मूळांविषयीं किती **बीजगणितरूप** मूळें असतील, आणि तीं कोण कोणत्या जातीचीं आहेत, तीं आतां शोधितों. यापुढें जाण्यास सद्यः शिकणारास अवघड पडेल.

पहिल्यानें, वर्गमूळाविषयीं. +१ आणि −१ हीं दोन्हीं +१ याचीं वर्गमूळें. आणि +अ आणि −अ हीं दोन्हीं, +अअ यांचीं वर्गमूळें आहेत, हें स्पष्ट आहे. कांकीं,

$$-1 \times -1 = +1 \qquad -अ \times -अ = +अअ$$

$$+1 \times +1 = +1 \qquad +अ \times +अ = +अअ$$

आतां हेंच विचारायाचें आहे, कीं +१ याचीं दोन वर्गमूळांपेक्षां अधिक वर्गमूळें होऊं शकतात कीं नाहीं? +१ याचें भलतें कांहीं वर्गमूळ क्ष असो, तर **वर्गमूळ शब्दाचे व्याख्याना प्रमाणें**, क्षक्ष = १, अथवा क्षक्ष − १ = ० असें असावें. परंतु क्षक्ष − १ = (क्ष+१) (क्ष−१); यामुळें (क्ष+१) (क्ष−१) = ०.* यावरून, क्ष+१ अथवा क्ष−१ = ०. क्ष+१ = ० याचें उत्तर क्ष = −१ हें मात्र आहे; क्ष−१ = ०, याचें उत्तर क्ष = +१ हें आहे; यामुळें +१ आणि

* जेव्हां याप्रमाणें कांहीं गुणाकार अब = ०, तेव्हां त्यांतून अ किंवा ब एक तरी ० असावें, कांकीं जर दोहींला ही किंमत असेल, तर चाललेरीतीप्रमाणें, त्यांचे गुणाकारासही कांहीं किंमत होईल.

−१ हीं मात्र १ याचीं वर्गमूळें आहेत. हींच कृती, क्ष क्ष = अ अ, अथवा (क्ष−अ) (क्ष+अ) = ० यास लाविली आल्ये.

यामुळें ऋण परिमाणाला धन किंवा ऋण परिमाणरूप वर्गमूळ होऊं शकत नाहीं; कांकीं त्यांतून, कोणतेंही एक, त्याणें तेंच गुणिलें असतां, गुणाकार धन होतो. तथापि √−१ हें कांहींच **परिमाण** नाहीं असें म्हणवणार नाहीं, कांकीं गणिताचे रीतीवरून जीं चिन्हें निघतात त्यांस तें नांव देण्यास ठरविलें. परंतु जेव्हां √−१ येतो तेव्हां तो ११८ व्ये पृष्ठावर जो −१ आहे त्याचे अर्थाचा आहे, म्हणजे तो −१ कृत्याचे खोट्ये कल्पनेचा दाखला आहे, याकरितां कृत्याला, अगत्यानुरूप, तपासून फिरविलें पाहिजे, किंवा त्याचा विस्तार केला पाहिजे, किंवा त्याला टाकून दिलें पाहिजे. परंतु −१ याचा अर्थ जा क्रमानीं स्थापिला गेला त्याजवर लक्ष्य दिलें असतां, ते या पुढील प्रमाणें आहेत असें कळेल:

१. पूर्वीं ३−४ इत्यादि, अशी आतीचे चिन्हांचे संयोग आढळले, आणि ३, −, ४, या चिन्हांस जो तेव्हां अर्थ होता त्याचे विरुद्ध कृती करण्याचें त्या संयोगांत सुचविलें होतें.

२. जा कृत्यांपासून अशी तऱ्हेचे संयोग उत्पन्न झाले, त्यांस तपासून, कृती पुनः केल्यावांचून तीं नीट कशीं करावीं हें समजेल; यावरून ३−४ इत्यादि, पद्धतींपासून काय समजावें, कीं तेणें करून त्या केव्हां येतील याचें अनुमान करितां यावें. अथवा त्या आल्या असतां त्यांचा अर्थ सांगतां यावा याचा निश्चय केला.

३. ३−४ इत्यादि यांस चालती रीति लाविल्यानें काय काय उत्पन्न होईल हें, आणि खोट्ये कल्पनेचें नीट करणें कृतीचे कोणत्येही पुढल्ये क्रमापावेतों बंद ठेविलें असतां काय घडेल हें शोधिलें.

४. पूर्वीं जें सर्व सांगीतलें त्यावरून, व्यवहारांतील शब्दांचे अर्थाचा विस्तार अशी तऱ्हेनें केला, कीं त्या पूर्वीं जीं केवळ खोट्ये कल्पनेचीं उत्तरें होतीं तीं,

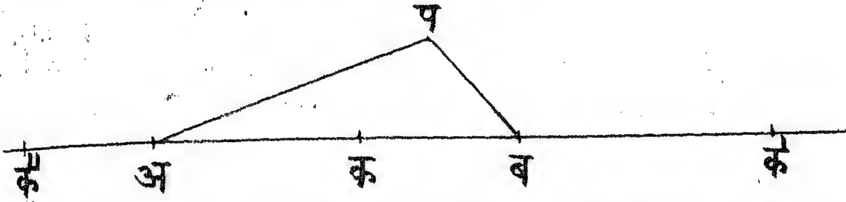
नियमित अर्थाचीं असून ओळखीचीं चिन्हें झालीं, आणि तीं सिद्ध केलेल्या रीतीनीं, कामांत आणिलीं गेलीं. अशानें यांत आणि संकोचित अर्थानें कामांत घेतलीं होतीं त्यांत कांहीं भेद नव्हता.

४. सर्वपक्षांत असें दिसून आलें, कीं जेव्हां निघालेलें उत्तर केवळ अंकगणितरूपानें होतें, ह्मणजे जेव्हां परांस संकोचित अर्थ होता, तेव्हां तें उत्तर यथायोग्य आणि समजायाजोगें होतें. तेव्हां पूर्वींचे क्रमाचे संकोचित अर्थ ठेवून, असमजायाजोगे चिन्हानें, कृती करून उत्तरामध्यें कांहीं चूक राहिली नव्हती; परंतु जरी आपल्या कृतीचा क्रम उलटून, प्रत्येक क्रम अंकगणितरूपानें केला असता, तर उत्तर वरचे कृतीचे उत्तरासारिखेंच आलें असतें असें सर्वपक्षांत दिसून आलें.

यावरून दिसण्यांत आलें कीं, ३ अशा कांहीं संख्येचे पूर्वीं + हें चिन्ह असलें, तर त्याचा अर्थ मिळवणीचा आहे, तें + चिन्ह – ३ यांचे पूर्वीं आलें असतां, पद्धतीचे पूर्व भागास – ३ जोडायाचे आहेत असा अर्थ सुचवितें; आणि आणखीही त्यावरून दिसण्यांत आलें, कीं + (–६) – (+४) या पद्धतीमध्यें + आणि – यांचा विस्तार अर्थ जरी सोडवत नाहीं, तथापि + ६ + ३ हें जरी कित्येक विस्ताररूप कृतीचें उत्तर आहे, तरी त्यास गणितरूपाचा अर्थ होतो.

$\sqrt{-१}$, $\sqrt{-२}$, इत्यादि यांस प्रस्तुत कांहीं अर्थ नाहीं, आणि विरुद्धरूपाचीं आहेत, तथापि वरचे सांगीतल्या कृतीचे क्रमाप्रमाणें + आणि – यांचे अर्थाचा अधिक विस्तार करून, $\sqrt{-१}$, $\sqrt{-२}$, इत्यादि यांस कामांत आणण्याची आणि यांचा अर्थ करण्याची योग्य रीति दिली जाईल, असें वरचे सगळ्या गोष्टीवरून, अनुमान केलें जातें. केवळ अनुमान असें ह्मणतों, कांकीं जरी एकच उदाहरणापासून कार्य झालें, तथापि जा रीतीवरून तें झालें ती रीति सर्वत्र लागू पडेल असा निश्चय करवत नाहीं. पूर्वीं अशी रीति सांगीतली गेली, परंतु त्या रीतीविषयीं कांहीं एथें सांगण्याचा अभिप्राय नाहीं. ती समजून घेण्या-

स जागा पुष्कळ राहिली आहे इतकें मात्र एथे दाखवितों.



कोणी पुरुष अ स्थळापासून निघून, प्रथम कोठें तरीं अब रेघेवर, किंवा तिच्चे वाढविलेल्ये दोन टोंकावर थांबून, शेवटीं ब स्थळीं थांबतो असें मनांत आण; आणि उजव्ये कडेस मोजलेलें अंतर धन आणि डाव्येकडेस मोजलेलें अंतर ऋण अशी कल्पना केली असतां, त्याचे पहिल्ये स्थळापासून जितका लांब जातो त्या सर्व अंतरांतून + अब याचें अंतर मागल्ये रीतीचे सहाय्यावरून काढितां येतें, तें या प्रमाणें:

१. जर तो क जवळ थांबतो, तर (+ अक) + (+ कब) = + अब
२. जर तो क' जवळ थांबतो, तर (+ अक') + (− क'ब) = + अब
३. जर तो क'' जवळ थांबतो, तर (− अक'') + (+ क''ब) = + अब

आतां पहा, जर तो पुरुष अब रेघ अथवा तिचे वाढविल्ये भागावरून निघून दुसऱ्यकडे जाईल, म्हणजे जर तो अप, पब, रेघेवरून जाईल, तर अप इत्यादिकांचे संबंधाचीं कांहीं चिन्हें नाहींत; तर त्यांचे जागीं ॥ असें कांहीं नवें चिन्ह घेऊन मांडलें असतां याप्रमाणें होईल

॥ (॥ अप) ॥ (॥ पब) = + अब

यांवरून बीजगणित लागू करण्यांत असें दिसतें, कीं कांहीं नवीं चिन्हें कामांत घ्यावीं लागतील, आणि $\sqrt{-1}$, इत्यादि अशीं निरर्थक चिन्हें आढळतील. तर + आणि − या चिन्हांस विस्तारपूर्वक कामांत आणून, जीं जीं नवीं चिन्हें यापुढें योजून काढावीं लागतील त्यांचे जागीं, $\sqrt{-1}$ इत्यादि, हें येई असा कांहीं विस्तार करितां येणार नाहीं कीं काय? ही गोष्ट शिकणारास केवळ अनुमान करण्याविषयीं आहे, परंतु यावरून त्यास ही पुढील कृती करणें योग्य आहे.

१. $\sqrt{-१}$ इत्यादिचिन्हेच्या पद्धतीस बीजगणिताच्या रीती लाविल्यानें काय होतें हें पहाण्याकरितां मात्र त्या रीती त्यास लाव, परंतु त्याचे उत्तरावर विश्वास ठेवूं नको, तथापि पुष्कळ उत्तरांचे अनुभवावरून विश्वास ठेवण्याचें अगत्य वाटेल, त्यांहून अधिक विश्वास ठेवूं नको.

२. कृती करितानां $\sqrt{-१}$, इत्यादि तऱ्हेची पद्धती नाहींशी झाली असें जेव्हां दिसेल, तेव्हां उत्तर खरें आहे कीं नाहीं तें तपास.

आतां घनमूळाचा विचार करितों. क्ष हा १ याचें कोणतेंही घनमूळ असो. तेव्हां $क्ष^{३} = १$, अथवा $क्ष^{३} - १ = ०$; $क्ष^{३} - १ = (क्ष - १)\ (क्ष^{२} + क्ष + १) = ०$

१९३ पृष्ठ पहा, आणि य = १ असें घे;

यामुळें, $क्ष - १ = ०$. अथवा $क्ष^{२} + क्ष + १ = ०$

पहिल्यापासून $क्ष = १$ असें निघतें. आणि स्पष्ट आहे कीं १ हा १ चें घनमूळ आहे. पुढला अध्याय समजल्याचे पूर्वी दुसऱ्या रूपाचें उलगडणें शिकणारा चानें करवणार नाहीं; परंतु एथे जाणावें कीं त्यास दोन उत्तरें आहेत. आणि दोहोंमध्यें $\sqrt{-अ}$ हें चिन्ह ज्याचा अर्थ अजून कळला नाहीं तें त्यांत येतें. तीं दोन उत्तरें याप्रमाणें आहेत

$$\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} \text{ आणि } \frac{-१ - \sqrt{-३}}{२}$$

यांतून दुसरें उत्तर शिकणारानें स्वबुद्धीनें काढावें, आणि पहिल्याविषयीं ह्या पुढील गोष्टी दाखवितों; १. $\sqrt{-३}$ यास जर चालत्या रीती लागतात असें मानिलें, तर तें $क्ष^{२} + क्ष + १$ या समीकरणास स्थापितें; २. त्याच कल्पनेनें, तें १ चें घनमूळ आहे.

$$\text{जर } क्ष = \frac{-१ + \sqrt{-३}}{२}, \text{ तर } क्ष^{२} = \frac{(-१)^{२} + २\ (-१)\ (\sqrt{-३}) + (\sqrt{-३})^{२}}{४}$$

$$= \frac{१ - २\sqrt{-३} + (-३)}{४} = \frac{-२ - २\sqrt{-३}}{४} = \frac{-१ - \sqrt{-३}}{२}$$

यामुळें

$$क्ष^{२} + क्ष + १ = \frac{-१ - \sqrt{-३}}{२} + \frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} + १ = \frac{-१ - १}{२} + १ = ०$$

पुनः $क्ष^3 = क्ष^2 \times क्ष = \frac{-१-\sqrt{-३}}{२} \times \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}$

$$= \frac{(-१)^2-(\sqrt{-३})^2}{४} = \frac{१-(-३)}{४} = \frac{४}{४} = १$$

$$प = \frac{-१-\sqrt{-३}}{२} \qquad फ = \frac{-१+\sqrt{-३}}{२}, \text{ असें घे,}$$

तर अअअ अथवा $अ^3$ याचीं तीन घनमूळें अ, पअ, आणि फअ, अ-गत्य असावीं. कांकीं $अ \times अ \times अ = अ^3$.

$$पअ \times पअ \times पअ = प^3अ^3 = अ^3 \text{ कांकीं } प^3 = १$$

$$फअ \times फअ \times फअ = फ^3अ^3 = अ^3 \text{ कांकीं } फ^3 = १$$

आणि $क्ष^2 + अक्ष + अ^2 = ०$ हें उलगडण्याचें समजल्यानंतर, $क्ष^3 - क्ष^3 = ०$ या समीकरणांतून वरप्रमाणें निघालें आईल.

क्ष हा १ याचा चतुर्घात मूळांतून एक चतुर्घातमूळ असो. तेव्हां $क्ष^4 = १$, अथवा $क्ष^4 - १ = ०$; ह्मणजे,

$$(क्ष^2-१)\ (क्ष^2+१) = ०, \text{ यामुळें, } क्ष^2-१ = ० \text{ अथवा } क्ष^2+१ = ०,$$

$क्ष^2 - १ = ०$ याचीं उत्तरें पूर्वींप्रमाणें, −१ आणि +१ अशीं आहेत; आणि $क्ष^2+१=०$ याचीं उत्तरें. $क्ष = +\sqrt{-१}$ अथवा $क्ष = -\sqrt{-१}$. यामुळें, १ यास चार चतुर्घात मूळें आहेत, ह्मणजे +१, −१, $+\sqrt{-१}$, आणि $-\sqrt{-१}$. चाळुनी रीति लाविल्यानें हें खरें आहे असें कळेल; उदाहरण,

$$(\sqrt{-१})^2 = -१, \quad (\sqrt{-१})^3 = (\sqrt{-१})^2.\sqrt{-१} = -\sqrt{-१}$$

$$(\sqrt{-१})^4 = (\sqrt{-१})^3.\sqrt{-१} = -\sqrt{-१}.\sqrt{-१} =$$

$$-(\sqrt{-१})^2 = -(-१) = १$$

अधिक शोध झाल्यावांचून, $\sqrt{-क्ष}$ अशा तऱ्हेचा पद्धतीचा केवळ तर्कानें उपयोग करणें पुढील प्रमाणें आहे: अ, ब, क, आणि ड, हीं धन किंवा ऋण परिमाणें असोत. तर

$$अ + ब\sqrt{-क्ष} = क + ड\sqrt{-क्ष}$$

अ = ब आणि क = ड असे नसतील तर वरचें समीकरण खरें होणार नाहीं. कां तर मनांत आण कीं $अ = क \pm ई$ असें आहे, ह्मणजे क आणि अ मध्यें कांहीं

भेद आहे, तेव्हां

$$क \pm ई + ब\sqrt{-क्ष} = क + ड\sqrt{-क्ष} \qquad \sqrt{-क्ष} = \frac{\pm ई}{ड - ब}$$

ह्मणजे $\sqrt{-क्ष}$ हा धन किंवा ऋण परिमाण आहे, हें अशक्य. यामुळें $(\pm ई) \div (ड-ब)$ हें वाटीप्रमाणें बीजगणितानुरूप परिमाण होण्यास अशक्य. आतां जर ई=०, आणि ड आणि ब हे बरोबर नसतील, तर या प्रमाणें होईल, $\sqrt{-क्ष} = ० \div (ड-ब) = ०$, हेंही खरें नाहीं; जर ईला कांहीं नियमित किंमत असेल आणि ड=ब असेल तेव्हां या प्रमाणें होईल, $\sqrt{-क्ष} = \pm ई \div ०$, हें ८७ पृष्ठावरचे लिहिलेल्ये विषयाशीं मिळत नाहीं, कांकीं कोणतेंही परिमाण त्याणें तेंच गुणिलें असतां तें मोठें आहे ह्मणून गुणाकार ऋण होत नाहीं, अथवा जरी परिमाण अधिक मोठें होत जातें तरीही तो गुणाकार ऋण होण्यास अधिक जवळ होत नाहीं. ही कल्पना मात्र राहिली, कीं ई=० आणि ड−ब=०, ह्मणजे अ=क आणि ड=ब; आणि $\sqrt{-क्ष}$ याविषयीं एथपर्यंत हेंच मात्र रूप मिळालें, ह्मणजे $\frac{०}{०}$. परंतु जा समीकरणापासून हें निघालें तें समीकरण नेहेमी खरें आहे इतकें मात्र हें दाखवितें; जर अद्यापि असें समीकरण अगदीं खरें असें मान्य केलें, तर जेव्हां अ=क आणि ब=ड असेल तेव्हां वरचे रूपाचें उत्तर निघेल. पण वरचे गोष्टीवरून पुरता निर्वाह होत नाहीं; त्यापासून हें मात्र सिद्ध होतें, कीं अ=क आणि ब=ड असें नसेल, तर समीकरण कधींही खरें होऊं शकत नाहीं; तथापि अ=क आणि ब=ड असें जरी आहे तरी समीकरण खरें आहे, याविषयीं अद्यापि वाद आहे. जर क्ष कांहीं तऱ्हेचे परिमाणाच्या दर्शक नसेल, तर क्ष=क्ष त्या समीकरणास खरें आहे असें विचारपूर्वक मानणार नाहीं; = या चिन्हाचे अर्थांत अशी कांहीं कल्पना आहे, कीं ती परिमाणावांचून दुसरे कशासही लागत नाहीं, असें ह्मणण्यांत येईल. परंतु जर कोणी असें मानील, तर त्याणें १३९ पृष्ठावर, = या चिन्हाचें विस्ताररूप व्याख्यान पहावें, तथापि शिकणारानें ध्यानांत धरावें कीं जोंपर्यंत $\sqrt{-क्ष}$ इत्यादि चिन्हाशीं चांगली माहितगारी झाली नाहीं, तोंपर्यंत $\sqrt{-क्ष}$, इत्यादि चिन्हांवर, त्यांतले व्याख्यानाची अर्थशक्ती लागू

होत्ये असें त्याचे ध्यानांत पक्कें येणार नाहीं.

परंतु वरचे सारिखीं दुसरीं कांहीं बीजानुरूप परिमाणें आहेत त्यांचा आ-तां विचार केला पाहिजे. तीं या प्रमाणें आहेत, $\sqrt{३}$, $\sqrt{५}$, $\sqrt[३]{२}$, इत्यादि यांचा निःशेष किंमती निघत नाहींत. परंतु **१७९ पृष्ठाप्रमाणें** जवळ ज-वळ मात्र निघतात. या पुढील समीकरणामध्यें, अ, ब, क, आणि ड, पूर्णकिं-वा अपूर्णांक असतील, आणि जर अ = क आणि ब = ड असें नसेल, तर तें समीकरण खरें होऊं शकत नाहीं असें ह्मणतों. तें हें समीकरण

$$अ + ब \sqrt{३} = क + ड \sqrt{३}$$

$\sqrt{३}$ याचे आगीं $\sqrt{-क्ष}$ मांडिला असतां, प्रतिशब्दीं वरची कल्पना लागू होत्ये, परंतु जर ड, ब, ई, पूर्ण किंवा अपूर्णांक असतील, तर

$$\sqrt{३} = \frac{\pm ई}{ड - ब}$$

असें खोटें रूप जें होऊं शकत नाहीं तें निघतें.

क्ष आणि य हे पूर्णांकाचे वर्ग अथवा अपूर्णांक नसतील, आणि जर नियमित पूर्ण किंवा अपूर्णांकांचे आगीं सर्व अक्षरें असतील, तर वरचे रीती प्रमाणें हें सिद्ध केलें जाईल, कीं

$$अ + ब \sqrt{क्ष} = क + ड \sqrt{य} \cdots\cdots\cdots (\text{४})$$

तर यांत अ = क असावा, आणि यामुळें ब $\sqrt{क्ष}$ = ड $\sqrt{य}$. कांकीं जर असें न-सलें, तर अ = क ± ई घे; यास अचे आगीं मांड, आणि क वजा कर,

तर $$\pm ई + ब \sqrt{क्ष} = ड \sqrt{य}$$

दोन्ही बाजूंचा वर्ग करून या प्रमाणें होतें

$$(\pm ई)^2 + २ (\pm ई) ब \sqrt{क्ष} + (ब \sqrt{क्ष})^2 = (ड \sqrt{य})^2$$

अथवा $$ई^2 \pm २ ई ब \sqrt{क्ष} + ब^2 क्ष = ड^2 य$$

यामुळें $$\sqrt{क्ष} = \frac{ड^2 य - ब^2 क्ष - ई^2}{\pm २ ई ब}$$

ह्मणजे, $\sqrt{क्ष}$ यास नियमित अपूर्णांकानें दाखविला येत नाहीं, तो येथें तसा दा-

खविला आहे हें खोटें आहे. तर यामुळें अ=क आणि ब$\sqrt{क्ष}$=ड$\sqrt{य}$ असें केल्यानें मात्र वरचे (४७) समीकरणास खरें रूप देतां येतें.

४+२$\sqrt{३}$, २१+४$\sqrt{५}$, इत्यादि जातीचे परिमाणांचें वर्गमूळ काढण्यास कांहीं पक्षीं हें वरचें मूळकारण लावलें जाईल. २+$\sqrt{७}$ असें परिमाण घे, आणि त्याचा वर्ग कर.

$$(२+\sqrt{७})^२ = २^२+२\times२\sqrt{७}+(\sqrt{७})^२$$
$$=४+४\sqrt{७}+७=११+४\sqrt{७}$$

आतां मनांत आण कीं, ११+४$\sqrt{७}$ असें परिमाण दिलें असेल, तर या दोन पुढील गोष्टी कशा काढाव्या? १. कीं त्यास त्याच रूपाचें वर्गमूळ आहे.* २. तें वर्गमूळ २+$\sqrt{७}$ असें आहे कीं काय? या पुढील प्रमाणें काढाव्या: जर ११+४$\sqrt{७}$ यास वर्गमूळ तशेंच रूपाचें असेल, तर तें वर्गमूळ क्ष+$\sqrt{य}$ आहे असें मान, म्हणून

$\sqrt{११+४\sqrt{७}}$=क्ष+$\sqrt{य}$, या समीकरणाचे दोन्ही बाजूंचा वर्ग कर.

$$११+४\sqrt{७}=क्ष^२+२क्ष\sqrt{य}+(\sqrt{य})^२$$
$$=क्ष^२+य+२क्ष\sqrt{य}$$

यावरून $क्ष^२+य=११$ आणि $२क्ष\sqrt{य}=४\sqrt{७}$

यामुळें (−) $क्ष^२-२क्ष\sqrt{य}+य=११-४\sqrt{७}$

परंतु या समीकरणाची पहिली बाजू, क्ष−$\sqrt{य}$, याचा वर्ग आहे. अथवा

$(क्ष-\sqrt{य})^२=११-४\sqrt{७}$ म्हणजे, $क्ष-\sqrt{य}=\sqrt{११-४\sqrt{७}}$

परंतु $क्ष+\sqrt{य}=\sqrt{११+४\sqrt{७}}$

हीं वरचीं दोन समीकरणें परस्पर गुण. तर

$$(क्ष+\sqrt{य})(क्ष-\sqrt{य})=\sqrt{११+४\sqrt{७}}\ \sqrt{११-४\sqrt{७}}$$

---

* पहा, कीं ११+४$\sqrt{७}$ आणि क्ष+$\sqrt{य}$ या दोहोंमध्यें रूपाचा बहुत फेर नाहीं, कां कीं ४$\sqrt{७}=\sqrt{(४)^२\times७}=\sqrt{११२}$; यावरून ११+४$\sqrt{७}$=११+$\sqrt{११२}$.

अथवा $क्ष^२-य=\sqrt{(११+४\sqrt{७})(११-४\sqrt{७})}=\sqrt{१२१-११२}=३$

परंतु $क्ष^२+य=$ ११

$(+)$ $२क्ष^२=१४$ $क्ष=७$ $क्ष=\sqrt{७}$

$(-)$ $२य=८$ $य=४$ $\sqrt{य}=२$

यामुळें $\sqrt{११+४\sqrt{७}}$ अथवा $क्ष+\sqrt{य}=\sqrt{७}+२$, ह्मणून, जा रीतीनें $११+४\sqrt{७}$ असें निघालें तसेंच हें आहे.

$\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$ हें करण्यासाठीं वरची रीति लावितों. याचेजागीं $क्ष+\sqrt{य}$ घे.

तर $$अ+ब\sqrt{क}=(अ+\sqrt{य})^२$$
$$=क्ष^२+य+२क्ष\sqrt{य}$$

यामुळें $अ=क्ष^२+य$ आणि $ब\sqrt{क}=२क्ष\sqrt{य}$

यामुळें $अ-ब\sqrt{क}=क्ष^२+य-२क्ष\sqrt{य}=(क्ष-\sqrt{य})^२$

अथवा $क्ष-\sqrt{य}=\sqrt{अ-ब\sqrt{क}}$

परंतु $क्ष+\sqrt{य}=\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$

$(\times)$ $क्ष^२-य=\sqrt{(अ-ब\sqrt{क})(अ+ब\sqrt{क})}=\sqrt{अ^२-ब^२क}$

परंतु $क्ष^२+य=$ $अ$

$(+)$ $$२क्ष^२=अ+\sqrt{अ^२-ब^२क}$$

$$क्ष=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}$$

$(-)$ $$२य=अ-\sqrt{अ^२-ब^२क}$$

$$\sqrt{य}=\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}$$

$$क्ष+\sqrt{य}=\sqrt{\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}+\sqrt{\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}}$$

आणि या समीकरणाची दुसरी बाजू $अ+ब\sqrt{क}$ चें वर्गमूळ आहे.

ताळा $\frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}$ हें दाखविण्यासाठीं प घे.

$\frac{१}{२}अ-\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}$ हें दाखविण्यासाठीं क घे.

$$पक = \left(\frac{१}{२}अ\right)^२ - \left(\frac{१}{२}\sqrt{अ^२-ब^२क}\right)^२ = \frac{१}{४}अ^२ - \frac{१}{४}(अ^२-ब^२क)$$

$$= \frac{१}{४}अ^२ - \frac{१}{४}अ^२ + \frac{१}{४}ब^२क = \frac{१}{४}ब^२क, \text{ यामुळें } \sqrt{पक} = \frac{१}{२}ब\sqrt{क}.$$

पूर्वींचे सिद्धांताप्रमाणें,

$$\sqrt{अ+ब\sqrt{क}} = \sqrt{प}+\sqrt{क}, \quad (अ+ब\sqrt{क}) = (\sqrt{प}+\sqrt{क})^२$$

$$= (\sqrt{प})^२ + २\sqrt{प}\sqrt{क} + (\sqrt{क})^२ = प+२\sqrt{पक}+क$$

परंतु $प+क = \frac{१}{२}अ+\frac{१}{२}अ = अ, \quad २\sqrt{पक} = ब\sqrt{क}$

यामुळें $प+क+२\sqrt{पक} = अ+ब\sqrt{क}$; यावरून दिसतें, कीं वरचा सिद्धांत खरा आहे.

ह्या सिद्धांत व्यवहारी कामाचे फार उपयोगी नाहीं, परंतु $ब\sqrt{क}$, इत्यादि तऱ्हेचीं पदें कामांत आणायाचे अभ्यासासाठीं फार उपयोगी आहे. जेव्हां $अ^२-ब^२क$ याचें खरें वर्गमूळ असेल, तेव्हां तो सिद्धांत याचें केवळ सरळरूप करितो; असें नसलें, तर त्याचे उलटें करितो, कांकीं $\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$ यांत वर्गमूळाचें वर्गमूळ एक वेळा येतें, परंतु त्याचे वर काढलेल्ये किंमतीमध्यें, त्याचे वर्गमूळाचें वर्गमूळ दोन वेळा येतें. असें, या पुढील दोन पद्धतींतून, तो सिद्धांत पहिल्ये पद्धतीला सरळ रूप देतो, परंतु दुसऱ्ये पद्धतीस सरळ रूप देत नाहीं. जरी दोन्ही पद्धती सारिख्या खऱ्या आहेत:

$$\sqrt{१३+२\sqrt{३०}} = \sqrt{१०}+\sqrt{३}$$

$$\sqrt{१३+२\sqrt{३१}} = \sqrt{\frac{१३}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{४५}} + \sqrt{\frac{१३}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{४५}}$$

उलटाविषय. $अ^२$ पेक्षां $ब^२क$ अधिक आहे. किंवा $अ^२-ब^२क$ ऋण परिमाण आहे, अशा पक्षाला वरचें उत्तर लाव. उदाहरण, $२+\sqrt{८}$, यांत $अ=२$, $ब=१$, $क=८$ असा पक्ष ह्मण,

$$\sqrt{२+\sqrt{८}} = \sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{-४}} + \sqrt{१-\frac{१}{२}\sqrt{-४}} \cdots\cdots (ञ)$$

$\sqrt{-१}$, इत्यादि अशो तऱ्हेचे चिन्हांचा अर्थ अद्यापि समजाविला ना-

हीं, तर $२+\sqrt{८}$ यांचें वर्गमूळ त्याच तऱ्हेनें आहे कीं काय? खचित नाहीं; कांकीं अंकगणित रीतीनें त्याचें वर्गमूळ $२+\sqrt{४}$ आणि $२+\sqrt{९}$ या दोहोंचे वर्गमूळामध्यें किंवा ४ आणि ५ यांचे वर्गमूळामध्यें कोठेतरी जवळजवळ सांपडेल.

तर (ज) ही पद्धती खचित अंकगणितरूपाची आहे असें मान्य करावें कीं काय? याविषयीं हें लक्षांत आलें पाहिजे, कीं जी खरी अंकगणितरूपाची पद्धती आहे, ती केवळ रीतीनें, अशक्य रूप दिसे असें करितां येईल.

उदाहरण,

$$क्ष+य = (क्ष+क\sqrt{-१})+(य-क\sqrt{-१})$$

$$क्ष^{२}+य^{२} = क्ष^{२}-(-य^{२}) = (क्ष)^{२}-(य\sqrt{-१})^{२}$$

$$= (क्ष+य\sqrt{-१})(क्ष-य\sqrt{-१})$$

(ज) ही पद्धती अधिक तपासून पहाण्यासाठीं, तिचे प्रत्येक पदाचें वर्गमूळ रीतीप्रमाणें काढ.

अ = १, ब = $\frac{१}{२}$, क = −४, असें घे.

$$\sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{-४}} = \sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

$$\sqrt{१-\frac{१}{२}\sqrt{-४}} = \sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}} - \sqrt{\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

वरचे दोन समीकरणांचे दुसऱ्ये दोन बाजूंमध्यें अद्यापि ऋण परिमाणाचें वर्गमूळ आहे; कांकीं, $\sqrt{२}$ पेक्षां १ कमी आहे, यामुळें $\frac{१}{२}\sqrt{२}$ यापेक्षां $\frac{१}{२}$ कमी आहे, अथवा $\frac{१}{२}-\frac{१}{२}\sqrt{२}$ ऋण आहे, वरचे दोन समीकरणांची बेरीज कर:

$$\sqrt{१+\frac{१}{२}\sqrt{-४}} + \sqrt{१-\frac{१}{२}\sqrt{-४}} = २\sqrt{\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}}$$

परंतु जा पद्धतीनें आरंभ केला ती वेगळ्ये रूपानें हीच आहे;

$$\sqrt{४\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२}\sqrt{२}\right)} \text{ अथवा } \sqrt{२+२\sqrt{२}} \text{ अथवा } \sqrt{२+\sqrt{४\times२}}$$

वरच्या क्ष+य, यामध्यें बुद्ध्या जो फेरफार केला त्या सारिखी इयगय,

लागू पडे अशी रीति घेतल्यानें घडली; आणि जर बेक यापेक्षां अ कमी असेल, तर $\sqrt{२+\sqrt{८}}$, अथवा सामान्य रूपानें $\sqrt{अ+ब\sqrt{क}}$ यास उत्तराचे आगीं जर क ऋण परिमाण नसेल तर पुढें लिहिलेल्या रूपाप्रमाणें मांडतां येणार नाहीं,

$$\sqrt{प+\sqrt{क}} + \sqrt{प-\sqrt{क}}$$

$\sqrt[३]{अ+ब\sqrt{क}}$ याचें मूळ काढायास अवघड आहे आणि तें फार उपयोगी नाहीं, याजकरितां तें सोडून देतों.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. हे पुढील सांगीतलेले सिद्धांत सिद्ध कर:

१. −१ याचीं तीन बीजगणितरूप घनमूळें आहेत. पहिलें −१ आणि $क्ष^२ - क्ष + १ = ०$ याचीं उत्तरें; $\frac{१}{२} + \frac{१}{२}\sqrt{-३}$ आणि $\frac{१}{२} - \frac{१}{२}\sqrt{-३}$ हीं दोन, मिळून तीन.

२. −१ याचीं चार बीजगणितरूप चतुर्घातमूळें या पुढील प्रमाणें आहेत,

$$\frac{१}{२}\sqrt{२}\,(१+\sqrt{-१}) \qquad \frac{१}{२}\sqrt{२}\,(१-\sqrt{-१})$$

$$\frac{१}{२}\sqrt{२}\,(-१+\sqrt{-१}) \qquad \frac{१}{२}\sqrt{२}\,(-१-\sqrt{-१})$$

३. १ याचीं आठ बीजगणितरूप अष्टघातमूळें या पुढील प्रमाणें आहेत.

$$\pm १,\ \pm\sqrt{-१},\ \pm\frac{१}{२}\sqrt{२}\,(१+\sqrt{-१}),\ \pm\frac{१}{२}\sqrt{२}\,(१-\sqrt{-१}).$$

$\sqrt[२]{-१}$ याच्या सगळ्या किमती वरचे पद्धतीमध्यें आहेत, त्या कशासाठीं आहेत याचें कारण सांग?

असें परिमाण दिलें असेल, जामध्यें दुसऱ्या वर्णाचीं करणीचिन्हें असतील ह्मणजे जामध्यें वर्गमूळें आहेत, तर असा एक गुणक काढ, कीं त्याणें तें परिमाण गुणिलें असतां, गुणाकार, करणी मुक्त होईल.

१. एकाकी करणीपद असें, $\sqrt{रु}$. एथें $\sqrt{रु}$ हा त्याचा गुणक आहे,

अथवा जर अ राशिनल्द※ आहे, तर अ$\sqrt{३}$ हाही त्याचा गुणक आहे; कांकीं $\sqrt{३}\times$ अ$\sqrt{३}$ = ३अ, हाही राशिनल्द आहे.

२. द्वियुक्पद. ज्याचीं एक किंवा दोन्ही पदें नित्य करणी असतील, जसें $\sqrt{३}+\sqrt{२}$. (अ+ब) (अ−ब) = अ²−ब². तेव्हां जर अ आणि ब हीं एकाकी करणी पदें असतील, तर अ²−ब² राशिनल्द आहे; यामुळें अ+ब यांचा गुणक अ−ब आहे, आणि याचें उलटेंही. उदाहरण, $\sqrt{३}+\sqrt{२}$ हे $\sqrt{३}-\sqrt{२}$ यांणीं गुणिले तर ३−२, अथवा १ होतो; २$\sqrt{३}$−$\frac{१}{२}\sqrt{७}$ हे २$\sqrt{३}$+$\frac{१}{२}\sqrt{७}$ यांणीं गुणिले तर ४×३−$\frac{१}{४}$×७, अथवा १०$\frac{१}{४}$ होतात.

३. त्रियुक्पद. ज्यामध्यें दोन किंवा तीन करणी पदें आहेत; जसें $\sqrt{३}+\sqrt{५}-\sqrt{७}$. अथवा $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}+\sqrt{क}$. शेवटची पद्धती $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}-\sqrt{क}$ यांणीं गुण. त्यापासून हें होतें. $(\sqrt{अ}+\sqrt{ब})^2-(\sqrt{क})^2$ अथवा अ+२$\sqrt{अब}$+ब−क अथवा अ+ब−क+२$\sqrt{अब}$. आतां अ+ब−क−२$\sqrt{अब}$ यांणीं गुण; त्यापासून हें होतें, $(अ+ब-क)^2-(२\sqrt{अब})^2$ अथवा $(अ+ब-क)^2-$ ४अब. यामुळें $\sqrt{अ}+\sqrt{ब}-\sqrt{क}$ आणि अ+ब−क−२$\sqrt{अब}$ या दोहोंचा गुणाकार इच्छिला गुणक आहे.

$$(\sqrt{३}+\sqrt{५}-\sqrt{७})\ (\sqrt{३}+\sqrt{५}+\sqrt{७})=१+२\sqrt{१५}$$
$$(१+२\sqrt{१५})\ (१-२\sqrt{१५})=१-६०=-५९.$$

त्रियुक्पदापेक्षां दुसऱ्या बहुयुक् करणी पदांचा विचार करण्याचें प्रयोजन क्वचित् पडतें किंवा कधींही पडत नाहीं.

अपूर्णांकाचा छेदस्थळीं करणी पदें असतील तर त्यांची किंमत का-

※ राशिनल्द. हा शब्द बीजगणितामध्यें कामांत आणितात, त्याचा अर्थ करणीचिन्हापासून मोकळा; म्हणजे भलतें कांहीं व्यवहारिक पूर्ण किंवा अपूर्णांक राशिनल्द आहेत, असें २ हा अंक राशिनल्द आहे, आणि $\sqrt{४}$ यास जरी करणीचिन्ह आहे तरी तें राशिनल्द आहे, परंतु $\sqrt{२}$ हा अंक करणीगत अथवा आहे.

ढायास वरची कल्पना लाविली जाईल. उदाहरण, $१ \div (\sqrt{३}+१)$ याची किंमत काढणें असेल, तर छेद शुद्ध करायासाठीं तिहीचें वर्गमूळ काढूं नको, परंतु अंश आणि छेद या दोहोंस $\sqrt{३}-१$ याणीं गुण, याबरून हें होईल.

$$\frac{१}{\sqrt{३}+१}=\frac{\sqrt{३}-१}{(\sqrt{३}+१)(\sqrt{३}-१)}=\frac{\sqrt{३}-१}{३-१}=\frac{१}{२}(\sqrt{३}-१)$$

स्पष्ट आहे कीं या समीकरणाचे पहिल्ये बाजूची किंमत काढण्यापेक्षां दुसऱ्ये बाजूची किंमत काढायास सोपी आहे:

$$\frac{\sqrt{६}+\sqrt{७}}{\sqrt{६}-\sqrt{५}}=\frac{(\sqrt{६}+\sqrt{७})\,(\sqrt{६}+\sqrt{५})}{(\sqrt{६}-\sqrt{५})\,(\sqrt{६}+\sqrt{५})}=६+\sqrt{४२}+\sqrt{३०}+\sqrt{३५}$$

यापेक्षां अधिक मोठ्ये मूळाचा विचार करण्याचें प्रयोजन असेल तेव्हां जा एकाकी करणी पदांत असें पद येतें, जसें $\sqrt[3]{८}$, अ $\sqrt[3]{ब}$. यांतून प्रथमाचा गुणक $(\sqrt[3]{८})^{२}$ अथवा $८^{\frac{२}{३}}$ आहे. कांकीं $८^{\frac{१}{३}}\times ८^{\frac{२}{३}}=८^{\frac{३}{३}}=८$. या तऱ्हेनें हीं पुढील उत्तरें निघतील:

$$\frac{\sqrt[3]{२}}{\sqrt[3]{३}}=\frac{\sqrt[3]{२}.\sqrt[3]{३}.\sqrt[3]{३}}{\sqrt[3]{३}.\sqrt[3]{३}.\sqrt[3]{३}}=\frac{\sqrt[3]{१८}}{३};\ \frac{\sqrt[4]{३}}{\sqrt[4]{२}}=\frac{\sqrt[4]{२४}}{२}$$

$$\frac{\sqrt[न]{अ}}{\sqrt[न]{ब}}\ \text{अथवा}\ \frac{अ^{\frac{१}{न}}}{ब^{\frac{१}{न}}}=\frac{अ^{\frac{१}{न}}\times ब^{\frac{न-१}{न}}}{ब^{\frac{१}{न}}\times ब^{\frac{न-१}{न}}}=\frac{अ^{\frac{१}{न}}\ ब^{\frac{न-१}{न}}}{ब}$$

$$\frac{१}{क^{\frac{१}{न}}\ र^{\frac{१}{व}}}=\frac{क^{\frac{न-१}{न}}\ र^{\frac{व-१}{व}}}{कर};\quad \frac{२}{\sqrt[3]{३}\sqrt[4]{४}}=\frac{२\sqrt[3]{९}\sqrt[4]{१४}}{१२}$$

या अध्यायांतील सर्व गोष्टीविषयींचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत; त्यांस जपून उलगडून ताळा पहावा.

$$अ\times ब^{-१}\times अ^{-३}\times ब^{\frac{२}{३}}=अ^{-२}ब^{-\frac{१}{३}}=\frac{१}{अ^{२}ब^{\frac{१}{३}}}$$

$$अ^{७}\div अ^{-५}=अ^{१२}=अ^{७}\times अ^{५}=१\div अ^{-१२}$$

$$अ^{म}\times ब^{न}=ब^{न}\div अ^{-म}=अ^{म}\div ब^{-न}=१\div अ^{-म}ब^{-न}$$

$$\sqrt{अ\sqrt{अ\sqrt{अ}}} = अ^{\frac{७}{८}} \qquad \sqrt[३]{\left(अ\sqrt{\left(अ\sqrt[३]{अ}\right)}\right)} = अ^{\frac{५}{९}}$$

$$\sqrt[न]{\left\{\sqrt[म+१]{अ^{म-१}ब}\right\}^{म}} = अ^{\frac{म^{२}-म}{मन+न}}\ ब^{\frac{म}{मन+न}}$$

$$\left\{\frac{प}{कर^{-१}}\right\}^{\frac{३}{५}} \times \left\{\frac{क}{प^{२}र}\right\}^{-\frac{१}{३}} = \left(पक^{-१}र\right)^{\frac{३}{५}} \times \left(प^{-२}कर^{-१}\right)^{-\frac{१}{३}}$$

$$= प^{\frac{३}{५}}क^{-\frac{३}{५}}र^{\frac{३}{५}} \times प^{\frac{२}{३}}क^{-\frac{१}{३}}र^{\frac{१}{३}} = प^{\frac{१९}{१५}}क^{-\frac{१४}{१५}}र^{\frac{१४}{१५}}$$

$$= \sqrt[१५]{\frac{प^{१९}र^{१४}}{क^{१४}}} = \sqrt[१५]{प^{१९}}\ \sqrt[१५]{\left(\frac{र}{क}\right)^{१४}} = \frac{प^{\frac{१९}{१५}}क^{\frac{१}{१५}}र^{\frac{१४}{१५}}}{क}$$

$$\sqrt{अ^{२}ब^{३}क} = \sqrt{अ^{२}ब^{२}.बक} = अब\sqrt{बक} = \frac{अब^{२}क}{\sqrt{बक}}$$

$$\sqrt[३]{अ^{४}ब^{८}क^{१३}} = \sqrt[३]{अ^{३}ब^{६}क^{१२}.अब^{२}क} = अब^{२}क^{४}\sqrt[३]{अब^{२}क}$$

$$अ^{\frac{४}{३}}ब^{\frac{८}{३}}क^{\frac{१३}{३}} = अ^{१+\frac{१}{३}}ब^{२+\frac{२}{३}}क^{४+\frac{१}{३}} = अब^{२}क^{४}अ^{\frac{१}{३}}ब^{\frac{२}{३}}क^{\frac{१}{३}}$$

$$\sqrt[\frac{१}{२}]{अ} = अ^{२}\quad \sqrt[\frac{१}{३}]{अ^{२}} = अ^{६}$$

$$\sqrt{१६०} = \sqrt{१६\times१०} = ४\sqrt{१०};\quad \sqrt[३]{१६०} = \sqrt[३]{८\times२०} = २\sqrt[३]{२०}$$

$$\sqrt{३३३२} = १४\sqrt{१७} \quad \sqrt[३]{३३४८} = ३\sqrt[३]{१२४},\ \sqrt[४]{३२} = २\sqrt[४]{२}$$

$$\sqrt{\frac{३}{७}} = \frac{\sqrt{२१}}{७} = \frac{३}{\sqrt{२१}},\quad \sqrt{\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{ब} = \frac{अ}{\sqrt{अब}}$$

$$अ : \sqrt{अब} :: \sqrt{अब} : ब \qquad अ^{\frac{१}{३}} : अ^{\frac{१}{२}} :: अ^{-\frac{१}{३}} : अ^{-\frac{१}{६}}$$

$$\frac{१}{\sqrt{\frac{१}{२}}+\sqrt{\frac{१}{३}}} = ६\left(\sqrt{\frac{१}{२}}-\sqrt{\frac{१}{३}}\right),\quad \frac{१}{\sqrt{अ}-\sqrt{अब}} = \frac{१+\sqrt{ब}}{\sqrt{अ}(१-ब)}$$

$$\frac{१}{\sqrt{अ+१}-१} = \frac{१}{अ}\left(\sqrt{अ+१}+१\right)$$

$$\frac{१}{\sqrt{अ+क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}} = \frac{१}{२क्ष}\left(\sqrt{अ+क्ष}-\sqrt{अ-क्ष}\right)$$

$$\frac{\sqrt{अ+क्ष}+\sqrt{अ-क्ष}}{\sqrt{अ+क्ष}-\sqrt{अ-क्ष}} = \frac{२अ+२\sqrt{अ^२-क्ष^२}}{२क्ष} = \frac{अ}{क्ष}+\sqrt{\frac{अ^२}{क्ष^२}-१}$$

$$\sqrt{अ^२-क्ष^२} = अ\sqrt{१-\frac{क्ष^२}{अ^२}} = क्ष\sqrt{\frac{अ^२}{क्ष^२}-१} = \sqrt{अक्ष}\sqrt{\frac{क्ष}{अ}-\frac{अ}{क्ष}}$$

$$\sqrt{अ+क्ष} = \sqrt{अ}\sqrt{१+\frac{क्ष}{अ}} = \sqrt{क्ष}\sqrt{\frac{अ}{क्ष}+१} = \sqrt{अक्ष}\sqrt{\frac{१}{क्ष}+\frac{१}{अ}}$$

$$\frac{१}{२}\sqrt{ब^२-४अक} = \sqrt{\frac{ब^२}{४}-अक} = \frac{ब}{२}\sqrt{१-\frac{४अक}{ब^२}} = \sqrt{\frac{ब^२-४अक}{४}}$$

$$\sqrt{२अक्ष-क्ष^२} = क्ष\sqrt{२\frac{अ}{क्ष}-१} = \sqrt{क्ष}\sqrt{२अ-क्ष} = अ\sqrt{२\frac{क्ष}{अ}-\frac{क्ष^२}{अ^२}}$$

$$\frac{अ+ब\sqrt{-१}}{क्ष+य\sqrt{-१}} = \frac{अक्ष+बय+(बक्ष-अय)\sqrt{-१}}{क्ष^२+य^२}$$

$$(१+\sqrt{-१}) = \sqrt{-१}\,(१-\sqrt{-१}) \qquad \sqrt{-७} = \sqrt{७}.\sqrt{-१}$$

$$\sqrt{-४} = २\sqrt{-१} \qquad \sqrt{-\frac{१}{२}} = \frac{१}{२}\sqrt{२}.\sqrt{-१}$$

$$\sqrt{-\frac{अ}{ब}} = \frac{\sqrt{अब}}{ब}.\sqrt{-१} \qquad \sqrt{-४}\times\sqrt{-३} = -\sqrt{१२}$$

$$(अ-ब) = \left(अ^{\frac{१}{२}}-ब^{\frac{१}{२}}\right)\left(अ^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{१}{२}}\right) = \left(अ^{\frac{१}{३}}-ब^{\frac{१}{३}}\right)\left(अ^{\frac{२}{३}}+अ^{\frac{१}{३}}ब^{\frac{१}{३}}+ब^{\frac{२}{३}}\right)$$

$$=\left(अ^{\frac{१}{४}}-ब^{\frac{१}{४}}\right)\left(अ^{\frac{३}{४}}+अ^{\frac{१}{२}}ब^{\frac{१}{४}}+अ^{\frac{१}{४}}ब^{\frac{१}{२}}+ब^{\frac{३}{४}}\right)$$

$$अ+ब = \left(अ^{\frac{१}{५}}+ब^{\frac{१}{५}}\right)\left(अ^{\frac{४}{५}}-अ^{\frac{३}{५}}ब^{\frac{१}{५}}+अ^{\frac{२}{५}}ब^{\frac{२}{५}}-अ^{\frac{१}{५}}ब^{\frac{३}{५}}+ब^{\frac{४}{५}}\right)$$

$$\left(अ^{\frac{२}{३}}+अ^{\frac{१}{३}}+१\right)^२ = अ^{\frac{४}{३}}+२अ+३अ^{\frac{२}{३}}+२अ^{\frac{१}{३}}+१$$

$$\left(अ^{\frac{२}{३}}\right)^{\frac{३}{२}} = अ \qquad \left(अब^{\frac{१}{३}}क^{-२}\right)^{-\frac{१}{५}} = अ^{-\frac{१}{५}}ब^{-\frac{१}{१५}}क^{\frac{२}{५}}$$

पद्य. अ $\sqrt{-१}$ अथवा $\sqrt{-अ^२}$, अ+ $\sqrt{-ब}$ अथवा अ+ $\sqrt{ब}$ $\sqrt{-१}$, या रूपाचे परिमाणांस **अशक्यरूप** परिमाणे ह्मणण्याची चाल आहे. त्यांला अर्थ दिला नाहीं ह्मणून अद्यापि त्यांला तेंच नांव आहे; तशेच रीतीनें पहिले अध्यायामध्यें १० – १४ अशक्यरूपाचे होते. या पुस्तकांत त्यांचा मोठा बीज अर्थ समजायाचा नाहीं परंतु त्यांचा अर्थ याहून पुढील विषयांत कळेल; तर त्यांस एथें **शुद्ध चिन्हें** ह्मणतों. बीजगणिताची भाषा चिन्हरूप आहे; परंतु एथपर्यंत जितक्या पद्धती आल्या आहेत, जांमध्यें अक्षर किंवा अंक आहे, त्यांस अंकसंबंधी अर्थ आहे, ह्मणून त्या पद्धती महत्वाचा दर्शक आहेत. परंतु $\sqrt{-१}$ यास अशे तऱ्हेचा अर्थ दिला नाहीं, यामुळें तें + किंवा – याचिन्हासारिखें, किंवा यापेक्षां अधिकचिन्हरूपजातीचें आहे, कांकीं त्यापासून महत्वाचा बोध अथवा कृती करण्याचा समज होत नाहीं. यावरून, शुद्ध चिन्हाशीं कृती करितानां, आपल्यास अनुभव मात्र आश्रय आहे, आणि जेव्हां अनुभवापासून कार्य होत नाहीं तेव्हां मनांत कांहीं नवा संकेत धरिला पाहिजे. जर अशे तऱ्हेचे चिन्हांचा अर्थ आपले दृष्टीस येत नाहीं, कीं जेणेंकरून त्या चिन्हांशीं चालत्ये रीतीनें कृती करितां येईल, तर पूर्वींच समजांत आलें आहे, कीं तीं कृतीचे शेवटीं सर्व टाकिलीं जातील, आणि त्या चिन्हांस ह्या रीती मात्र लाविल्या जातील. लक्ष्य देण्याजोगा पुढला मात्र पक्ष आहे, ह्मणजे, $\sqrt{-अ} \times \sqrt{-ब}$ याला दर्शवायास चिन्ह करावें. चालत्ये रीती प्रमाणें, ही $\sqrt{-अ \times -ब}$ अथवा $\sqrt{अब}$, अथवा $\sqrt{अ} \times \sqrt{-१}$ गुणिला $\sqrt{ब} \times \sqrt{-१}$ अथवा $\sqrt{अब} \times -१$, ह्मणजे – $\sqrt{अब}$. शिकणारानें नेहमी हें शेवटचें रूप घ्यावें, ह्मणजे,

$\sqrt{-अ} \times \sqrt{-ब}$ ही + $\sqrt{अब}$ अशी नसावी परंतु – $\sqrt{अब}$

अशी असावी याचें कारण पुढें दिसेल.

अचें न मूळ दाखविण्यास $\sqrt[न]{अ}$ आणि $अ^{\frac{१}{न}}$ अशीं दोन चिन्हें आहेत, त्यांतून पहिलें चिन्ह शुद्ध अंकगणिताचे अर्थानें घेतलें आईल, आणि दुसरें कोणतेंही बीजरूप मूळ दाखविण्यास घेतलें जाईल, ह्मणजे जर कांहीं विशेष मूळ सांगीतलें नसलें तर इच्छेप्रमाणें हवें तें रूप घेतां येईल. असें, चिन्ह मनांत न आणितां $\sqrt{४}$ हें २ नच आहेत; परंतु $(४)^{\frac{१}{२}}$ हे $+२$ अथवा -२ होतील. असें $\sqrt[३]{अ}$ हें गणितरूपाचें घनमूळ आहे, परंतु

$(अ)^{\frac{१}{३}}$ हा $\sqrt[३]{अ}$, किंवा $\frac{-१+\sqrt{-३}}{२}\times\sqrt[३]{अ}$, किंवा $\frac{-१-\sqrt{-३}}{२}\times\sqrt[३]{अ}$ याप्रमाणें आहे.

$(अ)^{\frac{१}{४}}$ हा $\sqrt[४]{अ}$, किंवा $-\sqrt[४]{अ}$, किंवा $\sqrt{-१}.\sqrt[४]{अ}$, किंवा $-\sqrt{-१}.\sqrt[४]{अ}$ याप्रमाणें आहे.

याच प्रमाणें $अ+ब^{\frac{१}{२}}$ यास दोन किमती आहेत, ह्मणजे, $अ+\sqrt{ब}$, किंवा $अ-\sqrt{ब}$.

यावरून जेव्हां ब धन आहे तेव्हां $\sqrt{ब}$ हा नेहेमी धन गणितरूप परिमाणाचें चिन्ह आहे. चिन्हरहित, ब याची **गणितरूपाची** किंमत मात्र दर्शवायाची इच्छा असेल, तर हें पुढील संक्षेप वाक्य सांगण्यानें होईल: **ब धन किंवा ऋण असेल, तर जा अंकस्थळीं ब घेतला तो अंक धन मानून** $\sqrt{ब}$ यानें दर्शविला जातो ह्मणजे ते दोन्हीं* एकच आहेत. असें ब धन किंवा ऋण असेल त्याप्रमाणें $ब=\pm\sqrt{ब^{२}}$ होईल.

दोन वर्णांचे पद्धतींचा सामान्य विचार आतां पुढें करितों.

---

* $अ\pm क्ष$, अथवा त्याच अर्थाचा $अ+(क्ष^{२})^{\frac{१}{२}}$, यास $अ+\sqrt{क्ष^{२}}$ या रूपानें मांडिलानां पाहिलें, यांत चिन्हाविषयीं भ्रम $\sqrt{}$. या चिन्हास लाविला होता. परंतु असें एके ठिकाणीं मात्र पाहिलें, आणि वर्गमूळ चिन्हें आणि अपूर्णांक जाति मूळ प्रकाशक चिन्हें यांमध्यें भेद दाखविण्यास कांहीं नियमित रीति नवती, ह्मणून तीं कामांत आणण्याचा तऱ्हेतऱ्हेच्या चाली पडल्या आहेत, तथापि वर लिहिलेले संकेत दुसऱ्ये पुष्कळ ग्रंथकर्त्यांच्या चालीस मिळतील असें वाटतें. $\pm\sqrt{अ}$ हें बहुत करून पहाण्यांत येतें, तसें $\pm अ^{\frac{१}{२}}$ हे पहाण्यांत येत नाहीं.

पांचवा अध्याय.

पहिल्या आणि दुसऱ्या वर्णांचे पद्धतींचा सामान्य सिद्धांत; यामध्यें दुसऱ्या वर्णांचे समीकरणांचें अंकगणितरूप उलगडण्याचा विचार आहे.

पहिल्ये अध्यायामध्यें एकवर्ण समीकरणांचें जें मनन केलें तें त्यांचे केवळ **अंकगणितरूपाचे उलगडण्या** विषयीं होतें; ह्मणजे क्ष विषयीं पहिल्ये वर्णापेक्षां अधिक वर्णाचा नाहींत. अशा दोन पद्धती दिल्या असून, त्यांपासून क्षची किंमत काढायाची होती. जिणें करून त्या दोन पद्धती बरोबर होतील. त्या अध्यायामध्यें असें पाहिलें कीं, पहिल्ये वर्णाचे सगळ्ये समीकरणांस या प्रमाणें संक्षेपरूप देतां येत होतें, ह्मणजे अक्ष = ब; असें ५६ पृष्ठावर

$\frac{क्ष}{२} + \frac{क्ष}{३} = १ - \frac{क्ष}{४}$ यास १३ क्ष = १२ असें संक्षेपरूप केलें.

समीकरणाचीं सगळीं पदें समीकरणाचे एक्ये बाजूस आणल्यानें सोईस पडतें; असें अक्ष = ब यापेक्षां अक्ष − ब = ० हें रूप समीकरण शोधायास अधिक सोईस पडतें. समीकरणांचे सगळ्ये सिद्धांतामध्यें दोन मूळ शोध आहेत असें आणलें आहे. त्यांतील पहिला शोध हाच; **जीमध्यें क्ष येतो अशी बीजानुरूप पद्धती दिली आहे, तर क्षचा एक किंवा अधिक किंमती काढाव्या, अशा कीं त्यांहीं करून ती पद्धती नाहींशी होईल, ह्मणजे ती शून्याबरोबर होईल.**

याचे पूर्वींचे अध्यायामध्यें **मूळ** हा शब्द जा अर्थानें घेतला, त्याहून भिन्न अर्थानें तो एथें वहिवाटीचे खालीप्रमाणें कामांत आणिला. जा पद्धती-

मध्यें क्ष येतो तीस जी कोणतीही क्ष ची किंमत शून्या बरोबर करित्ये, अथवा बोलण्याचे चाली प्रमाणें तीस नाहींसें करित्ये, त्या किंमतीस त्या पद्धतीचें मूळ ह्मणतात. जसें ५५ व्ये पृष्ठावरचें जें बोलणें कामांत आणिलें तें आतां या पुढील प्रमाणें फिरविलें जाईल: २क्ष−१−५क्ष+१९ याचें मूळ ६ आहे; १६क्ष−क्ष^{२}−४८ याचीं मूळें ४ आणि १२ आहेत; क्ष^{३}−६क्ष^{२}+११क्ष−६ याचीं मूळें १, २, आणि ३ आहेत.

दुसरा मूळ शोध या पुढील प्रमाणें आहे; जी मध्यें क्ष येतो अशी बीजानुरूप पद्धती दिली आहे, तर क्ष चा कोणत्या किमती त्या पद्धतीस धन करितात, व कोणत्या किमती तीस ऋण करितात, आणि कोणत्या किमती तीस शुद्ध चिन्हरूप करितात?

२१९ वें पृष्ठ पहा. एक वर्णसमीकरणांचे पद्धती विषयीं. या वरचे दोन प्रश्नांचें उत्तर आतां सांगतों. आरंभीं ही पुढील सूचना लिहितों.

१. क्षचा निरनिराळ्या किंमती, आणि त्या किमतीं पासून पद्धतीचा चिन्हांवरून जीं उत्तरें निघतात त्यांचा विचार करितों, तर जेव्हां अगत्य पडेल तेव्हां मूळ दाखविण्यासाठीं त्या अक्षरास कांहीं फेर करून कामांत आणूं. जसें, जेव्हां क्ष=७, अथवा क्ष=७ हें मूळ आहे, तेव्हां २क्ष−१४ ही नाहींशी होत्ये असें ह्मणण्याचे जागीं, मूळाला क्ष$_{।}$ असें ह्मणूं; दुसरें मूळ असेल त्याला क्ष$_{॥}$, आणि इत्यादि ह्मणूं, हें शिकणारानें मनांत धरावें.

२. उलटी गोष्ट स्पष्ट करून सांगीतली नसली तर, अक्ष+ब, अक्ष^{२}+बक्ष+क; इत्यादि अशा पद्धतींतील अ, ब, इत्यादि, गुणक धन किंवा ऋण बीजगणित रूपाचीं परिमाणें आहेत अशी नेहेमी कल्पना धरिली जाईल. जसें, जेव्हां अ हा १, २, −१, −$\frac{१}{२}$√३, इत्यादि असेल अशी पक्षांशीं कृती केली जाईल; परंतु स्पष्ट सांगीतल्या वांचून जा पक्षीं अ हा √−१, अथवा १+√−३, इत्यादि अशा जातीचें परिमाण आहे त्या पक्षीं अशी कधीं कल्पना करीत नाहीं. परंतु क्ष विषयीं अशी तऱ्हेचा निबंध केला जात नाहीं.

३. असें मनांत धरिलें जाईल कीं १५३ पृष्ठावरच्या स्थलांतर करण्याचे रीतिशीं शिकणारा माहिलगार आहे; ह्मणजे, अ = २, ब = −३, असें कल्पून आणि २क्ष − ३ यास २क्ष + (−३) अशा रूपानें लिहून, अक्ष + ब ही २क्ष−३ याशीं मिळती होई असें शिकणारा करूं शकतो.

जांत क्ष येतो अशी एक वर्ण पद्धतीचें सामान्य रूप अक्ष + ब आहे.

उदाहरण

$\frac{क्ष-५}{२} - \frac{क्ष-२}{३}$ + क्ष ही $\frac{क्ष}{२} - \frac{५}{२} - \frac{क्ष}{३} + \frac{२}{३}$ + क्ष ही आहे

अथवा $\left(\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + १\right)$ क्ष $-\left(\frac{५}{२} - \frac{२}{३}\right)$

अ = $\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + १$ आणि ब = $-\left(\frac{५}{२} - \frac{२}{३}\right)$,

अशी कल्पना केल्यानें वरची पद्धती अक्ष + ब याशीं मिळस्ये

अक्ष + ब याचें मूळ सहज काढितां येतें; कांकीं

अक्ष + ब = ० असें असल्यास क्ष = $-\frac{ब}{अ}$, यास $क्ष_१$ ह्मण.

जेव्हां अक्ष + ब ही पद्धती नाहींशी होस्ये, तेव्हां ती अ$क्ष_१$ + ब या प्रमाणें मांडिली जाईल, आणि यांत $-\frac{ब}{अ}$ यास $क्ष_१$ दर्शविती. $क्ष_१ = -\frac{ब}{अ}$ यापासून अ$क्ष_१$ = −ब अथवा ब = −अ$क्ष_१$ असें होतें. बची ही किंमत अक्ष + ब या पद्धतींत बच्चे जागीं मांड, तेव्हां ती या प्रमाणें होस्ये, ह्मणजे अक्ष − अ$क्ष_१$ अथवा अ (क्ष − $क्ष_१$). यावरून हा पुढील **सिद्धांत** होतो. **अक्ष + ब याचें मूळ जर $क्ष_१$ असेल, तर**

अक्ष + ब = अ (क्ष − $क्ष_१$), असें क्षच्चे सगळ्ये किमती विषयीं होईल.

हें वरचें **संकेत समीकरण** नाहीं, परंतु त्याशीं **एकरूप** समीकरण आहे. त्यापासून ध्वनित होतें, कीं त्याचा दोन्ही बाजू अगदीं सारिख्या आहेत, परंतु त्यांचीं रूपें निरनिराळीं आहेत: रूप बदल केल्याशिवाय, दुसरे कांहीं भेदावांचून अक्ष + ब यापासून लागलेंच तें निघतें असें दिसेल.

अक्ष + ब = अ $\left(क्ष + \frac{ब}{अ}\right)$ = अ $\left\{क्ष - \left(-\frac{ब}{अ}\right)\right\}$ = अ (क्ष − $क्ष_१$)

कारण वर सांगितलें गेलें कीं $-\frac{ब}{अ}$ याचेजागीं $क्ष_{।}$ मांडितां येतो.

वरचें हें पुनः पुनः सांगणें अनुपयोगी दिसेल, परंतु दोन वर्णांचे पद्धतींचा विचार करणें येईल, तेव्हां याचें कारण समजेल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. या पुढील पद्धतींचीं मूळें नुसती पाहून काढून दाखीव.

पद्धती	$३क्ष+\frac{१}{२}$,	$-४क्ष-३$,	$\frac{१}{२}क्ष-\frac{२}{३}$
मूळें	$-\frac{\frac{१}{२}}{३}$,	$-\frac{-३}{-४}$,	$-\frac{-\frac{२}{३}}{\frac{१}{२}}$
संक्षेप मूळें	$-\frac{१}{६}$,	$-\frac{३}{४}$,	$+\frac{४}{३}$
रूपांतर पद्धती	$३\left\{क्ष-\left(-\frac{१}{६}\right)\right\}$,	$-४\left\{क्ष-\left(-\frac{३}{४}\right)\right\}$,	$\frac{१}{२}\left\{क्ष-\frac{४}{३}\right\}$

सिद्धांत. मूळापेक्षां जेव्हां क्ष अधिक असेल, तर अक्ष+ब ही पद्धती अ चे चिन्हाची आहे, आणि जेव्हां मूळापेक्षां क्ष कमी असेल, तर ही पद्धती अ हून निराळ्ये चिन्हाची आहे.

कांकीं, $अक्ष+ब=अ(क्ष-क्ष_{।})$; जर $क्ष_{।}$ पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर $क्ष-क्ष_{।}$ धन आहे, १४२. पृष्ठ पहा, आणि अ× **धन परिमाणानें**, तर अ चें चिन्ह राहातें, १४२. पृष्ठ पहा; परंतु जर $क्ष_{।}$ पेक्षां क्ष कमी असेल, तर $क्ष-क्ष_{।}$ ऋण आहे, आणि अ× **ऋण परिमाणानें**, तर अ चें चिन्ह बदलतें.

उदाहरणें. प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $-\frac{१}{६}$ पेक्षां अधिक आहे, तिजविषयीं $३क्ष+\frac{१}{२}$ ही पद्धती धन आहे; ह्मणजे $-\frac{१}{८}$ याविषयीं : ही गोष्ट लाडून पहातों. जर $क्ष=-\frac{१}{८}$ तर

$$३क्ष+\frac{१}{२}=३\times-\frac{१}{८}+\frac{१}{२}=+\frac{१}{२}-\frac{३}{८}=+\frac{१}{८}$$

प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $-\frac{१}{६}$ पेक्षां कमी आहे तिजविषयीं $३क्ष+\frac{१}{२}$ ही पद्धती ऋण आहे; उदाहरण, जर $क्ष=-\frac{१}{५}$ तर

$$३क्ष+\frac{१}{२}=३\times-\frac{१}{५}+\frac{१}{२}=\frac{१}{२}-\frac{३}{५}=-\frac{१}{१०}$$

याचप्रमाणें, प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $-\frac{३}{४}$ यापेक्षां अधिक आहे, तिजविषयीं

−४ क्ष − ३ ही पद्धती किंवा तिचे बरोबरीचे − $\frac{३}{४}$ ऋण आहेत, आणि प्रत्येक क्षची किंमत जी − $\frac{३}{४}$ पेक्षां कमी आहे तिजविषयीं ही पद्धती धन आहे; परंतु क्ष ची किंमत जी $\frac{४}{३}$ पेक्षां अधिक आहे, तिजविषयीं $\frac{१}{२}$ क्ष − $\frac{२}{३}$ ही पद्धती धन आहे; आणि प्रत्येक क्ष ची किंमत जी $\frac{४}{३}$ पेक्षां कमी आहे, तिजविषयीं तीच पद्धती ऋण आहे.

दोन वर्णांचे पद्धतींविषयीं जी गोष्ट आतां पुढें सांगायाची आहे, तिशीं एकवर्ण पद्धतीचा कल्पना मिळतात यासाठीं वर सांगीतलेल्ये गोष्टीनें निर्वाह होतो.

१. लेम्मा. जर क्ष + य = प + क, आणि क्षय = पक, तर क्ष त्या दोहोंतून प अथवा क यांचे बरोबर आहे, आणि य राहिल्ये दुसऱ्याचे बरोबर आहे.

पहिल्या समीकरणाचा वर्ग कर, नंतर दुसरें समीकरण ४ नीं गुणून त्या वर्गांतून वजा कर, असें पुढील प्रमाणें,

$$
\begin{array}{lrcl}
 & क्ष^२ + २ क्षय + य^२ & = & प^२ + २ पक + क^२ \\
(\times ४) & ४ क्षय & = & ४ पक \\
\hline
(-) & क्ष^२ - २ क्षय + य^२ & = & प^२ - २ पक + क^२ \\
\hline
\end{array}
$$

या समीकरणाचे पहिल्ये बाजूचें वर्गमूळ, क्ष − य किंवा य − क्ष आहे; दुसऱ्या बाजूचें वर्गमूळ, प − क किंवा क − प आहे. या दोहीं बाजूंचें वर्गमूळ काढ, म्हणजे या पुढील चार समीकरणांतून एक निघेल:

क्ष − य = प − क . . . . (१) य − क्ष = प − क . . . . (२)

क्ष − य = क − प . . . . (३) य − क्ष = क − प . . . . (४)

परंतु क्ष + य = प + क; हें समीकरण वरल्या चार समीकरणांशीं, वेगळालें मिळविलें असतां या पुढील प्रमाणें होईल:

(१) अथवा (४) याशीं मिळविलें असतां क्ष = प य = क } हें सिद्ध करायाचें होतें
(२) अथवा (३) याशीं मिळविलें असतां क्ष = क य = प }

ह्या लेम्मा सांगण्याची गरज नव्हती असें शिकणाराचे मनांत येईल: परंतु त्याणें लक्षांत धरावें कीं जरीं क्ष=प अथवा क, आणि य=क अथवा प, तर क्ष+य =प+क, आणि क्षय=पक हें उघड आहे; तथापि याच्चें उलटें, ह्मणजे जर क्ष+य=प+क आणि क्षय=पक, तर प किंवा क याशिवाय दुसऱ्या कशाचे बरोबर क्ष होत नाहीं, आणि क अथवा प याशिवाय दुसऱ्या कशाचे बरोबर य होत नाहीं हें मागल्यासारिखें उघड नाहीं. जसें जर

$$क्ष^{२}-२अक्ष=ब^{२}-२अब$$

तर क्ष=ब हें या समीकरणास स्थापितें हें साफ उघड दिसतें, परंतु क्ष=ब याशिवाय दुसरें कोणतें समीकरणा त्यास स्थापील असें निरवालस उघड नाहीं. खरें ह्मटलें असतां क्ष=२अ−ब हें त्या समीकरणास स्थापील असें दिसेल.

२. लेम्मा. अक्ष+ब आणि अ'क्ष+ब' या पद्धतीस क्ष शीं निराधार परिमाणानें गुणून किंवा भागून जर कक्ष+इ आणि क'क्ष+इ' या पद्धती उत्पन्न होत नाहींत, तर पहिल्या दोन पद्धतींचा गुणाकार या दुसऱ्या दोन पद्धतींचा गुणाकारा बरोबर सर्वदां होऊं शकत नाहीं, ह्मणजे, अक्ष+ब=म (कक्ष+इ) आणि अ'क्ष+ब'=$\frac{१}{म}$ (क'क्ष+इ') , यांत म, क्ष शीं निराधार असून जर याप्रमाणें होऊं शकणार नाहीं तर ते गुणाकार बरोबर होणार नाहींत. कांकीं

(अक्ष+ब) (अ'क्ष+ब') =अअ'$क्ष^{२}$+ (अब'+अ'ब) क्ष+बब' ···(ग)
(कक्ष+इ) (क'क्ष+इ') =कक'$क्ष^{२}$+ (कइ'+क'इ) क्ष+इइ' ···(घ)

जर असें होऊं शकतें, तर क्षला कशीही किंमत दिली तरी वरचा दोन

आगीं क घेतला, ब ब' यांचे जागीं र घेतला, इत्यादि. **असें हें संक्षेपासाठीं घेतलें.** आतां प=प', क=क' आणि र=र' अशीं स्पष्ट एकरूप नसतील तर या दोन पद्धती सर्वदां बरोबर होऊं शकत नाहींत. पुढें याचा ताळा दाखवितों: जर वरचा समीकरणाचा दोन बाजू सर्वदां बरोबर आहेत, तर क्ष=१, असें असलें तर त्या दोन बाजू बरोबर आहेत, आणि जेव्हां क्ष = २ अथवा क्ष=३ असें असलें तरी ही त्याचा दोन बाजू बरोबर आहेत. जेव्हां क्ष अनुक्रमानें १, २, आणि ३ याप्रमाणें केला आहे, तेव्हां समीकरणाचा पहिल्या बाजूचा किमती दाखविण्यासाठीं $त_{१}$, $त_{२}$, $त_{३}$*, असें अनुक्रमानें घे. यावरून कल्पना केल्याप्रमाणें, समीकरणाचा दुसऱ्या बाजूचा किमती त्याच होतील; ह्मणजे,

जेव्हां क्ष =१, $प + क + र = त_{१}$ आणि $प' + क' + र' = त_{१}$

जेव्हां क्ष =२, $४प + २क + र = त_{२}$ आणि $४प' + २क' + र' = त_{२}$

जेव्हां क्ष =३, $९प + ३क + र = त_{३}$ आणि $९प' + ३क' + र' = त_{३}$

$त_{१}$, $त_{२}$, $त_{३}$, हे व्यक्त आहेत अशी कल्पना करून, १६२ **पृष्ठावरचे** रीतीवरून, वरचे समीकरणाचे पहिल्ये समुदायापासून प, क, आणि र, यांची किंमत काढ. नंतर त्याच रीतीवरून प', क', आणि र', यांची किंमत काढ. वरचीं समीकरणें बहुत करून सारिखीं दिसतात, यास्तव जा रीतीनें प, क, आणि र, यांची किंमत जा परिमाणापासून काढिली, त्याच रीतीनें प', क', आणि र', यांचा किमती निघतील. यामुळें, उत्तरें एक सारिखींच होतील, ह्मणजे, प=प', क=क', आणि र=र' असें होईल. अभ्यासासाठीं, पहिल्ये समुदायाचीं उत्तरें सांगतों, तीं याप्रमाणें आहेत,

---

* या तच्चेची संक्षेप रीति मांडण्याविषयीं १९४ पृष्ठ पहा.

$$प = \frac{त_३ - २त_२ + त_१}{२}, \quad क = \frac{८त_२ - ३त_३ - ५त_१}{२} \quad र = त_३ - ३त_२ + ३त_१$$

वरचे ताव्यापेक्षां हा पुढील ताव्हा अधिक सोपा आहे, परंतु एक अक्षर ० याचे बरोबर आहे अशी कल्पना करावी लागते, याचे पुढला अध्याय पक्का ध्यानांत येईपर्यंत अशी कल्पना करायास इच्छित नाहीं.

जर सर्वदां $पक्ष^२ + कक्ष + र = प'क्ष^२ + क'क्ष + र'$ असें आहे, तर, जेव्हां $क्ष = ०$, या पक्षांत, आणि भलत्ये दुसऱ्ये पक्षांतहीही गोष्ट खरी आहे; परंतु तेव्हां त्याचा रूपभेद याप्रमाणें होतो.

$$० + ० + र = ० + ० + र' \text{ अथवा } र = र'$$

यामुळें, सर्वदां, $पक्ष^२ + कक्ष + र = प'क्ष^२ + क'क्ष + र$ असें आहे

(−) र सर्वदां, $पक्ष^२ + कक्ष = प'क्ष^२ + क'क्ष$ असें आहे

(÷) क्ष सर्वदां, $पक्ष + क = प'क्ष + क'$ असें आहे

जेव्हां $क्ष = ०$ तेव्हां हेंही खरें आहे, अथवा

$$० + क = ० + क' \text{ म्हणजे, } क = क'$$

यामुळें $पक्ष + क = प'क्ष + क$ (−) क, $पक्ष = प'क्ष$ अथवा $प = प'$

याच प्रमाणें सिद्ध झालें, कीं क्ष कसाही असो, २२६ पृष्ठावरचा (अ) आणि (घ) पद्धती सर्वदां बरोबर होऊं शकत नाहीं या संकेला खेरीज, म्हणजे,

$$अअ' = कक', \quad अब' + अ'ब = कइ' + क'इ, \text{ आणि } बब' = इइ'$$

दुसरें आणि तिसरें पहिल्यानें भाग, तर हें होतें

$$\frac{अब'}{अअ'} + \frac{अ'ब}{अअ'} = \frac{कइ'}{कक'} + \frac{क'इ}{कक'}, \quad \frac{बब'}{अअ'} = \frac{इइ'}{कक'},$$

$$\text{अथवा } \frac{ब'}{अ'} + \frac{ब}{अ} = \frac{इ'}{क'} + \frac{इ}{क}, \quad \frac{ब'}{अ'} \times \frac{ब}{अ} = \frac{इ'}{क'} \times \frac{इ}{क}$$

यावरून, **पहिल्ये लेम्माप्रमाणें** $\frac{ब'}{अ'} = \frac{इ'}{क'}$, आणि $\frac{ब}{अ} = \frac{इ}{क}$ अथवा $\frac{ब'}{अ'} = \frac{इ'}{क'}$ आणि $\frac{ब}{अ} = \frac{इ'}{क'}$.

यांतून पहिला संकेत घे.

$$\text{परंतु, } अक्ष+ब = अ\left(क्ष+\frac{ब}{अ}\right) = अ\left(क्ष+\frac{इ}{क}\right)$$
$$= अ\cdot\frac{कक्ष+इ}{क} = \frac{अ}{क}\left(कक्ष+इ\right)$$

याचप्रमाणें $अ'क्ष+ब' = \frac{अ'}{क'}\left(क'क्ष+इ'\right)$

परंतु $\frac{अअ'}{कक'} = १$ अथवा $\frac{अ}{क}\times\frac{अ'}{क'} = १$, जर $\frac{अ}{क} = म$, तर $\frac{अ'}{क'} = \frac{१}{म}$

यामुळें $$अक्ष+ब = म\left(कक्ष+इ\right)$$

आणि $$अ'क्ष+ब' = \frac{१}{म}\left(क'क्ष+इ'\right)$$

दुसऱ्या संकेताची कल्पना करून शिकणारानें उलगडून दाखवावें कीं त्यापासून उत्तर यासारिखेंच होतें.

दोन वर्ण समीकरणांचें अंकगणितरूप उलगडणें दाखविण्याकरितां, बीजगणितांतील सर्वांपेक्षां सरळरूप पद्धती घेतों, ती ही आहे, $अक्ष^२ + बक्ष + क$ दोन वर्णांचे कोणत्याही दुसऱ्ये पद्धतीस, रूपांतर करून, अशी रूपांत आणितां येईल.

२२३ वें एष्ठ पहा. असें, जर $अ = -\frac{१}{२}$, $ब = २$, आणि $क = -३$ तर $-\frac{१}{२}क्ष^२+२क्ष-३$ हें समीकरण त्या संक्षेपरूपाशीं मिळतें.

व्याख्या. **क्ष विषयीं** त्या पद्धतीस पूर्णवर्ग ह्मणतात, जेव्हां तिचें वर्गमूळ अशी रूपानें काढितां येतें कीं त्यांत क्ष हा $\sqrt{\;}$ या चिन्हांत येत नाहीं. शोधल्यानें याप्रमाणें दिसेल, असें.

$$\sqrt{अक्ष^२+२अ'क्ष+अ'^२} = \sqrt{अ}\left(क्ष+अ\right)$$
$$\sqrt{अ'क्ष+२अक्ष^२+क्ष^२} = \sqrt{क्ष}\left(अ+क्ष\right)$$

यावरून क्ष विषयीं $अक्ष^२+२अ'क्ष+$ [illegible]

नाहीं; अ विषयीं $अ^2क्ष + २अक्ष^2 + क्ष^3$ हा पूर्ण वर्ग आहे. परंतु क्ष विषयीं नाहीं. पहा, जर क्ष विषयीं $पक्ष^2 + कक्ष + र$ हा पूर्ण वर्ग असेल, तर कोणती ही पद्धती जीमध्यें क्ष नाहीं तिणें गुणून पूर्ण वर्ग रहातो. कांकीं जर

$$पक्ष^2 + कक्ष + र = (गक्ष + ह)^2$$

तर (×) म $$मपक्ष^2 + मकक्ष + मर = \{\sqrt{म}\,(गक्ष + ह)\}^2$$

ऊम्मा. क्ष विषयीं $पक्ष^2 + कक्ष + र$ हा पूर्ण वर्ग आहे त्यापासून या संकेताचा बोध होतो ह्मणजे, $क^2 = ४\,पर$

$पक्ष^2 + कक्ष + र$ याचें वर्गमूळ $गक्ष + ह$ आहे, अशी कल्पना कर. **याशिवाय दुसरी कोणत्येही रूपाची पद्धती होऊं शकत नाहींहें शोधल्यानें कळेल.** तर

$$(गक्ष + ह)^2 = पक्ष^2 + कक्ष + र$$

अथवा $$ग^2क्ष^2 + २गहक्ष + ह^2 = पक्ष^2 + कक्ष + र.$$ असें **सर्वदां आहे.** यामुळें **२२६ पृष्ठाप्रमाणें,**

$$ग^2 = प, \qquad २गह = क, \qquad ह^2 = र$$

एथें, तर, **तीन** समीकरणें आहेत, जांपासून जीं अद्यापि ठरविलेलीं नाहीं अशीं ग आणि ह परिमाणें ठरवायाचीं आहेत. जर पहिलें आणि तिसरें समीकरण परस्पर गुणून त्यांचा गुणाकार ४ नीं गुणिला, आणि जर दुसऱ्याचा वर्ग केला, तर याप्रमाणें होईल

$$४\,ग^2ह^2 = ४\,पर \text{ आणि } (२गह)^2 \text{ अथवा } ४\,ग^2ह^2 = क^2$$

यामुळें $क^2 = ४\,पर$, **ग** आणि ह यांचीं तीन समीकरणें खरीं होण्याकरितां, असा संकेत स्थापिला पाहिजे.

वरचे समीकरणांपासून $ग = \sqrt{प}$, $ह = \sqrt{र}$, अथवा, जर $क^2 = ४\,पर$, तर $पक्ष^2 + कक्ष + र$ याचें वर्गमूळ $= \sqrt{प}\,क्ष + \sqrt{र}$, असें होतें.

णि $\sqrt{र}$ या दोन पदांपासून कांहीं भ्रांत होईल, कांकीं २०३

$ग^2 = प$ यापासून $ग = +\sqrt{प}$ अथवा $-\sqrt{प}$ होईल, आणि

त्यासारिखें, ह ह्या +√र अथवा −√र होईल.

परंतु एथें ध्यानांत आणलें पाहिजे, कीं २गह = क यास ४ग^{२}ह^{२} = क^{२} असा रूपभेद केल्यानें क^{२} = ४ पर हें समीकरण मिळालें. परंतु २गह = −क. ज्यांत क च्या आगीं −क मांडिला आहे यापासून ही क^{२} = ४ पर हें समीकरण निघेल; यामुळें, त्याच समीकरणापासून असें कळलें, कीं पक्ष^{२} + कक्ष + र आणि पक्ष^{२} − कक्ष + र. हे दोन्ही पूर्ण वर्ग आहेत. आणि जर गक्ष + ह या पद्धतीशीं ग आणि ह या दोहोंच्या किमतींच्या होईल तितक्या तऱ्हांनीं संयोग केला असतां, या पुढील चार पद्धती होतात:

√पक्ष + √र	−√पक्ष + √र
√पक्ष − √र	−√पक्ष − √र

यांतून कोणतीही पद्धती पक्ष^{२} + कक्ष + र अथवा पक्ष^{२} − कक्ष + र यांचें वर्गमूळ होईल. परंतु २गह = क हें समीकरण पहिल्ये पद्धतीस मात्र लागतें, आणि त्याच प्रमाणें २गह = −क. हें दुसरे पद्धतीस मात्र लागतें, आणि **हीं दोन्हीं समीकरणें ४ग^{२}ह^{२} = क^{२} यानें दर्शविलीं जातात,** तर पहिलें समीकरण रूपभेद न करितां घेतलें तर, गक्ष + ह याच्या सगळ्या चार किमती पक्ष^{२} + कक्ष + र यांचीं वर्गमूळें होऊं शकत नाहींत, परंतु ज्यांत ग आणि ह यांचीं चिन्हें अशीं आहेत कीं त्यांच्या गुणाकार गह याचें चिन्ह, क च्या चिन्हासारिखें होईल. तींच पदें मात्र या पद्धतीचीं वर्गमूळें होतील. ह्मणजे, जर क धन आहे, तर ग आणि ह हीं दोन्हीं धन किंवा दोन्हीं ऋण असावीं; कां कीं त्यापक्षीं गह धन असावा: जर क ऋण असला, तर ग धन आणि ह ऋण अथवा ग ऋण आणि ह धन असावा.

असें, जर, क धन आहे, आणि क^{२} = ४ पर, तर पक्ष^{२} + कक्ष + र यांचीं वर्गमूळें √पक्ष + √र, आणि −√पक्ष − √र आहेत; जर क ऋण आहे तर पक्ष^{२} − कक्ष + र यांचीं वर्गमूळें √पक्ष − √र आणि −√पक्ष + √र आहेत. **२०३ पृष्ठावर** सांगितलें कीं परिमाणाचे दोन वर्गमूळांमध्यें

चिन्हांचा मात्र भेद असतो, ह्मणून वरची गोष्ट त्याशीं मिळती आहे; कांकीं

$$-\sqrt{प क्ष}-\sqrt{र} = -(\sqrt{प क्ष}+\sqrt{र})$$
$$-\sqrt{प क्ष}+\sqrt{र} = -(\sqrt{प क्ष}-\sqrt{र})$$

उदाहरणें. $३ क्ष^२ + २ क्ष + १$ हा पुरा वर्ग नाहीं, कांकीं $(२)^२$, अथवा ४ हें $४ (३ \times १)$, अथवा १२ यांचे बरोबर नाहीं; परंतु $२ क्ष^२ - १२ क्ष + १८$ हा पूर्ण वर्ग आहे, कांकीं $(-१२)^२$, अथवा १४४ हे $= ४ (२ \times १८)$, अथवा १४४. **यांत क ऋण आहे** ह्मणून त्याचें वर्गमूळ $\sqrt{२ क्ष} - \sqrt{१८}$ अथवा $-\sqrt{२ क्ष} + \sqrt{१८}$ हें आहे.

ज्यास **वर्गपूरीकरण** असें ह्मणतात तें या वरचे सिद्धांताचें मुख्य कारण आहे; ह्मणजे $प क्ष^२$, क क्ष अथवा र या तिहींतून कोणत्येही दोहोंचे सहाय्यानें तिसऱ्या पदाची किंमत किंवा तें पद काढितां येईल. उदाहरण, $२ क्ष^२ + ३ क्ष$ हीं दिलीं असतां वर्ग पुरा कर. यांत $प = २$, $क = ३$, र ची किंमत सांगीतली नाहीं. परंतु वरची पद्धती पूर्ण होण्यास $क^२ = ४ प र$ असावे, ह्मणजे, $९ = ८ र$, अथवा $र = \frac{९}{८}$, या वरून असें दिसतें कीं $२ क्ष^२ + ३ क्ष + \frac{९}{८}$ हा पूर्णवर्ग आहे, त्याचीं मूळें

$$\sqrt{२ क्ष} + \frac{३}{\sqrt{८}} \text{ अथवा } -\sqrt{२ क्ष} - \frac{३}{\sqrt{८}} \text{ हीं आहेत.}$$

सामान्यतः, जर $क^२ = ४ प र$, तर $र = \frac{क^२}{४ प}$ ह्मणजे $प क्ष^२ + क क्ष$ याचा पूर्णवर्ग हें पुढील मिळविल्यानें होतो,

$$\frac{(\text{क्ष चा गुणक})^२}{४(\text{क्ष}^२\text{चा गुणक})}$$

जसें, $अ क्ष^२ + ब क्ष + \frac{ब^२}{४ अ}$ हा पूर्णवर्ग आहे, आणि त्याच प्रमाणें $४ अ^२ क्ष^२ + ४ अ ब क्ष + ब^२$, हा ही पुरा वर्ग आहे त्याचीं मूळें $\pm (२ अ क्ष + ब)$ आहेत.

आतां या पुढील पद्धतीचे वेगळाल्ये रूपांचा विशेष लक्षण भेद दाखवितों.

$$अ क्ष^२ + ब क्ष + क.$$

या पद्धतींत, जर $ब^{२} = ४अक$ आहेत तर ही पद्धती पूर्ण वर्ग आहे असें पूर्वी दिसलें. जा पक्षांत ४ अक पेक्षां $ब^{२}$ अधिक आहे, आणि जा पक्षांत ४ अक पेक्षां $ब^{२}$ कमी आहे या दोन पक्षांचा निरनिराळा विचार करितों.

१. ४ अक यापेक्षां $ब^{२}$ अधिक आहे, अशी कल्पना कर. अथवा या प्रमाणें

$$ब^{२} = ४अक + इ^{२}\text{※ अथवा } ४अक = ब^{२} - इ^{२}$$

आतां $$अक्ष^{२} + बक्ष + क = \frac{४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ४अक}{४अ} = \frac{४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ब^{२} - इ^{२}}{४अ}$$

$$= \frac{(२अक्ष + ब)^{२} - इ^{२}}{४अ} = \frac{(२अक्ष + ब + इ)(२अक्ष + ब - इ)}{४अ}$$

अथवा, हा पुढील सिद्धांत होतो :

जर $इ^{२} = ब^{२} - ४अक$. अथवा $इ = \sqrt{ब^{२} - ४अक}$, तर

$$अक्ष^{२} + बक्ष + क = \frac{१}{४अ}(२अक्ष + ब + इ)(२अक्ष + ब - इ)$$

या दोन्हीं एकरूपानें बरोबर आहेत.

२. $ब^{२} = ४अक$ अशी कल्पना कर, तर $अक्ष^{२} + बक्ष + क$ पूर्णवर्ग आहे, आणि $४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ४अक$ ही पद्धती आणि $४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ब^{२}$ ही एकच आहे. तरीं ती ही पूर्णवर्ग आहे; आणि

$$अक्ष^{२} + बक्ष + क = \frac{४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ब^{२}}{४अ} = \frac{(२अक्ष + ब)^{२}}{४अ}$$

३. ४अक यापेक्षां $ब^{२}$ कमी आहे, अशी कल्पना कर, म्हणजे

$$ब^{२} = ४अक - इ^{२} \quad \text{अथवा } ४अक = ब^{२} + इ^{२}, \text{ तर}$$

$$अक्ष^{२} + बक्ष + क = \frac{४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ४अक}{४अ} = \frac{४अ^{२}क्ष^{२} + ४अबक्ष + ब^{२} - इ^{२}}{४अ}$$

$$= \frac{(२अक्ष + ब)^{२} + इ^{२}}{४अ}$$

※ $४अक + इ^{२}$ असें कां, $४अक + इ$ कां नाहीं, कारण ४अक हें खचित वाढविलें असें दाखवायाचें आहे. इ धन किंवा ऋण हें कळे पावेतों, ४अक + इ ही वाढविली किंवा कमी झाली हें कळत नाहीं. परंतु इ धन किंवा ऋण असो, तथापि $इ^{२}$ धन आहे. शुद्ध चिन्हरूप पदें एथें उपयोगांत येत नाहीं या वरून कोणतेंही वर्गरूप पद परिमाण वाढविलें असें शिकणारानें समजावें.

पुढें जाण्याचे पूर्वी वरच्या पद्धती विशेष पक्षांस लाविती.

१. ३क्ष^२ — ७ क्ष + ४, अशी पद्धती असो. यांत अ = ३, ब = — ७, क = ४, आणि ब^२ = ४९, ४ अक = ४८. यावरून ४ अक पेक्षां ब^२ अधिक आहे, आणि ब^२ — ४ अक = १. हा इ^२ आहे; यामुळें इ = +१, किंवा —१. इ = +१ असें असो, तर

$$३ क्ष^२ — ७ क्ष + ४ = \frac{(६ क्ष — ७ + १)(६ क्ष — ७ — १)}{४ \times ३} = \frac{(६ क्ष — ६)(६ क्ष — ८)}{१२}$$

$$= \frac{(६ क्ष — १) \times २ (३ क्ष — ४)}{१२} = (क्ष — १)(३ क्ष — ४)$$

गुणाकार केल्यानें हें खरें आहे असें दिसेल. इ = —१ अशी कल्पने वरून शिकणारानें दाखवावें कीं वरच्या सारिखेंच उत्तर येतें.

$$\begin{array}{r} ३ क्ष — ४ \\ क्ष — १ \\ \hline ३ क्ष^२ — ४ क्ष \\ — ३ क्ष + ४ \\ \hline ३ क्ष^२ — ७ क्ष + ४ \end{array}$$

आतां हें विचारायाचें आहे, कीं या पद्धतीचीं मूळें, अथवा क्षच्या किमती काय आहेत अशा कीं त्या किमतीनी ती पद्धती नाहींशी होईल. गुण्य किंवा गुणक यांतून एक तरी = ० असेल तर गुणाकार ० होतो; ह्मणजे क्ष — १ = ०, असें असो, अथवा ३ क्ष — ४ = ० असें असो, तर

पहिल्ये पक्षीं, $३ क्ष^२ — ७ क्ष + ४ = ० \times (३ — ४) = ०$

दुसरे पक्षीं. $३ क्ष^२ — ७ क्ष + ४ = (\frac{४}{३} — १) \times ० = ०$

परंतु जर क्ष — १ = ०, तर क्ष = +१, आणि जर ३ क्ष — ४ = ० तर क्ष = $\frac{४}{३}$, यामुळें १ आणि $\frac{४}{३}$ या क्षच्या किमती आहेत जेणेंकरून ३क्ष^२—७क्ष+४ ही पद्धती नाहींशी होत्ये, किंवा ते अंक त्या पद्धतीचीं मूळें आहेत, २२२ पृष्ठ पहा.

आतां विचार करितों कीं क्ष याचा किमती काय असाव्या, अशा कीं

$३क्ष^२ - ७क्ष + ४$ अथवा त्याचे बरोबरीची (क्ष−१)(३क्ष−४) ही धन किंवा ऋण होईल. पहाण्यांत येतें, कीं जर १ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर क्ष−१ धन आहे, आणि जर $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर ३क्ष − ४ हे धन आहेत; परंतु जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर क्ष−१ ऋण आहे, आणि जर $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर ३क्ष−४ ऋण आहेत. २२४ पृष्ठ पहा.

क्षची किंमत.	क्ष−१ याचें चिन्ह.	३क्ष−४ याचें चिन्ह.	(क्ष−१)(३क्ष−४) यांचे गुणाकाराचें चिन्ह.
१ पेक्षां कमी	−	−	+
१ पेक्षां अधिक, $\frac{४}{३}$ पेक्षां कमी	+	−	−
$\frac{४}{३}$ पेक्षां अधिक	+	+	+

१ आणि $\frac{४}{३}$ या मूळांमध्यें क्ष असल्या शिवाय, वरची शेवटील पद्धती सर्वदां धन आहे. या तऱ्हेनें $३क्ष^२ - ७क्ष + ४$ याविषयीं या पुढील गोष्टी सिद्ध झाल्या: म्हणजे, $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष अधिक असेल, तर ती पद्धती + आहे; जर क्ष = $\frac{४}{३}$, असेल तर ती ० आहे; जर $\frac{४}{३}$ पेक्षां क्ष कमी आहे किंवा १ पेक्षां अधिक आहे, तर ती − आहे; जर क्ष १ आहे, तर ती ० आहे; जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर ती + आहे.

१. या पुढील पद्धतींशीं अशीच कृति करावी.

$$२क्ष^२ + ३क्ष + १ = (क्ष+१)(२क्ष+१)$$

$$३क्ष^२ + ४क्ष - ७ = (क्ष-१)(३क्ष+७)$$

$$-२क्ष^२ + ६क्ष - ४ = (२-क्ष)(२क्ष-२)$$

एथपर्यंत अशा पद्धती निवडून घेतल्या जांपासून **इरराशनल्** उत्तरें येत नाहींत: आतां तर $३क्ष^२ + ५क्ष - १$ या पद्धतीस तपासून पहा. यांत अ=३, ब=५, क = −१; ४ अक अथवा −१२ यांपेक्षां $ब^२$ अथवा २५ अधिक आहेत १८० पृष्ठ पहा, आणि $ब^२ - ४अक = ३७ = ई$; यामुळें

इ = ± √३७. इ बरोबर + √३७ असें असो, तर, २३३व्ये पृष्ठावरून

$$३क्ष^२+५क्ष-१ = \frac{(२\times ३क्ष+५+\sqrt{३७})(२\times ३क्ष+५-\sqrt{३७})}{४\times ३}$$

$$= \frac{१}{१२}(२\times ३क्ष+५+\sqrt{३७})(२\times ३क्ष+५-\sqrt{३७})$$

या पद्धतीचीं मूळें दाखविण्यासाठीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे, तर मूळें या प्रमाणें आहेत

$$क्ष_{।} = -\frac{\sqrt{३७}+५}{६} \text{ आणि } क्ष_{॥} = \frac{\sqrt{३७}-५}{६}$$

$$= -१\cdot ८४७१२७१ \qquad = \cdot १८०४६०४ \text{ जवळजवळ}$$

$क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ या मूळांमध्यें क्ष असल्याशिवाय, पूर्वीं प्रमाणें, पहाण्यांत येईल, कीं वरची पद्धती ऋण कधींही होणार नाहीं.

२. आतां $३क्ष^२-६क्ष+३$ ही पद्धती घे. यांत ब अथवा $(-६)^२$ हा ४अक अथवा ४×३×३ याचे बरोबर आहे. यावरून ही पद्धती पूर्ण वर्ग आहे, आणि **२३१ पृष्ठावरून**

$$३क्ष^२-६क्ष+३ = (\sqrt{३}\,क्ष-\sqrt{३})^२ = ३(क्ष-१)^२$$

जेव्हां √३ क्ष − √३ नाहींसे होतात, अथवा जेव्हां क्ष = १, तेव्हां मात्र वरची पद्धती नाहींशी होत्ये. परंतु यांत गुण्यगुणक हे दोन्ही एकसारिखेच आहेत म्हणजे, √३ क्ष − √३, असे आहेत, या कारणास्तव आणि वरचा पक्षांशीं सारिखेपणा राखण्यासाठीं, असें **म्हणण्यांत येतें**, कीं अशी पद्धतीला **दोन** मूळें आहेत, आणि तीं **बरोबर** आहेत. यावरून या पद्धतीला दोन मूळें आहेत, आणि त्यांतून प्रत्येक = १ आहे.

ही पद्धती ऋण कधींही होणार नाहीं, कांकीं सर्व पक्षांत $(क्ष-१)^२$ धन आहे. क्षला केवळ चिन्हरूप किंमत दिल्यानें त्या पद्धतीस ऋण करितां येतें: उदाहरण, १ + √−१ ही किंमत दे, तेव्हां **२१९ पृष्ठावरून केवळ रीती प्रमाणें** $(क्ष-१)^२ = -१$ होईल.

३. जे पक्ष पूर्वीं घेतले गेले त्यांतून एकांतही ४ अक यापेक्षां ब कमी नव्हता. आतां तर $२क्ष^२-क्ष+४$ या पद्धतीस शोधून पहा. यांत अ = २, ब = −१,

$क = ४$; आणि $ब^2 = १$, $४ अक = ३२$ म्हणजे हे $ब$ पेक्षां अधिक आहेत. २३१ पृष्ठाप्रमाणें $४ अक - ब^2 = ड^2$ असें असो, तर यामुळें $ड^2 = ३१$ आहेत.

यावरून २३३ पृष्ठाप्रमाणें हें होईल

$$२क्ष^2 - क्ष + ४ = \frac{(२ \times २ क्ष - १)^2 + ३१}{४ \times २} = \frac{(४क्ष - १)^2 + ३१}{८}$$

या पद्धतीस कांहीं धन किंवा ऋण मूळ नाहीं, कांकीं जोंपर्यंत क्ष धन किंवा ऋण आहे तोंपर्यंत $(४क्ष - १)^2$ ही सर्वदां धन होईल, यास्तव ती ३१ याशीं मिळविली असतां ३१ खचित वाढले जातील, आणि यामुळें, $(४क्ष - १)^2 + ३१$ ही $= ०$ कधींही होणार नाहीं, परंतु ती सर्वदां धन आहे. तर, असें दिसतें, कीं क्ष याचे प्रत्येक धन किंवा ऋण किमती विषयीं, $२क्ष^2 - क्ष + ४$ ही सर्वदां धन आहे. अशा बंधारणानें या पद्धतीची अतिलहान किंमत $\frac{३१}{८}$ आहे, कांकीं $४क्ष - १ = ०$, अथवा $क्ष = \frac{१}{४}$ असें केल्यानें $(४क्ष - १)^2$ याची अतिलहान किंमत काढिली आहे. यामुळें, वरचे पद्धतींत हा पुढील गुण आहे: $क्ष = \frac{१}{४}$ असें केल्यानें त्याची अतिलहान किंमत $\frac{३१}{८}$ अशी काढिली आहे; कांकीं क्ष चे प्रत्येक दुसऱ्ये किंमतीविषयीं ती $\frac{३१}{८}$ यापेक्षां अधिक आहे.

हे पुढील पक्ष शिकणारानें शोधून पाहावे.

$$क्ष^2 + क्ष + १ = \frac{१}{४} \left\{ (२क्ष + १)^2 + ३ \right\}$$

$$क्ष^2 - क्ष + १ = \frac{१}{४} \left\{ (२क्ष - १)^2 + ३ \right\}$$

$$-२क्ष^2 + २क्ष - ५ = -\frac{१}{८} \left\{ (४क्ष - २)^2 + ३६ \right\}$$

वरचा पद्धतींस केवळ चिन्हरूपमूळें देऊं शकतात, म्हणजे $२क्ष^2 - क्ष + ४ = ०$, असें करायाकरितां, या प्रमाणें करूं.

$$(४क्ष - १)^2 + ३१ = ० \qquad (४क्ष - १)^2 = -३१$$

$$४क्ष - १ = +\sqrt{-३१} \quad \text{अथवा} \quad ४क्ष - १ = -\sqrt{-३१}$$

जीं मूळें यांपासून निघतात, त्यांस दाखविण्यासाठीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे, तर

$$क्ष_{।} = \frac{१+\sqrt{-३१}}{४} \qquad क्ष_{॥} = \frac{१-\sqrt{-३१}}{४}$$

२१९ पृष्ठाप्रमाणें हीं केवळ रीतीनें मूळें आहेत असें दिसेल.

आतां वरचे पेक्षां कांहीं साधारण पक्ष घेतों.

१. $अक्ष^२+बक्ष+क=०$, यांत $ब^२-४अक=इ^२$, **२३३ पृष्ठाप्रमाणें,** आणि $अक्ष^२+बक्ष+क=\frac{१}{४अ}(२अक्ष+ब+इ)(२अक्ष+ब-इ)$

$अक्ष^२+बक्ष+क$ या पद्धतीचीं, पुढील प्रमाणें, आठ वेगळालीं रूपें आहेत, तर **अ, ब, क, ड,** आणि **अ', ब', क', ड',** या आठ अक्षरांनीं तीं रूपें दर्शविलीं आहेत.

		अचें चिन्ह.	बचें चिन्ह.	कचें चिन्ह.
(अ)	$२क्ष^२+५क्ष+१$	+	+	+
(अ')	$-२क्ष^२+५क्ष-१$	−	−	−
(ब)	$२क्ष^२-५क्ष+१$	+	−	+
(ब')	$-२क्ष^२+५क्ष-१$	−	+	−
(क)	$२क्ष^२+५क्ष-१$	+	+	−
(क')	$-२क्ष^२-५क्ष+१$	−	−	+
(ड)	$२क्ष^२-५क्ष-१$	+	−	−
(ड')	$-२क्ष^२+५क्ष+१$	−	+	+

जो गुण या सर्व रूपांस साधारण आहे त्याचा आरंभीं विचार करितों, आणि त्यानंतर प्रत्येक रूपाचे विशेष गुणाचा विचार केला जाईल.

$अक्ष^२+बक्ष+क$ याचीं मूळें या पुढील समीकरणांचे उलगड ह्यानें निघतात: मूळें दाखविण्याकरितां $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे

$$२अक्ष+ब-इ=० \qquad २अक्ष+ब+इ=०$$

$$क्ष_{।}=\frac{-ब+इ}{२अ} \qquad क्ष_{॥}=\frac{-ब-इ}{२अ}$$

आणि, [illegible]

ही एक सारिखीच आहे, आणि $२अक्ष+ब+इ$ ही पद्धती आणि $२अ(क्ष-क्ष_{२})$

ही एक सारिखीच आहे. ही गोष्ट खरी आहे असें पुनः दाखवितों,

$$२अक्ष+ब-इ = २अ\left(क्ष+\frac{ब-इ}{२अ}\right) = २अ\left(क्ष-\frac{-ब+इ}{२अ}\right) = २अ(क्ष-क्ष_{१})$$

$$२अक्ष+ब+इ = २अ\left(क्ष+\frac{ब+इ}{२अ}\right) = २अ\left(क्ष-\frac{-ब-इ}{२अ}\right) = २अ(क्ष-क्ष_{२})$$

$$\therefore\ अक्ष^{२}+बक्ष+क = \frac{४अ^{२}(क्ष-क्ष_{१})(क्ष-क्ष_{२})}{४अ} = अ(क्ष-क्ष_{१})(क्ष-क्ष_{२})$$

यावरून जेव्हां दुसरे वर्गाचे पद्धतीचीं दोन मूळें, आणि त्याचे पहिल्ये पदाचा गुणक ठाऊक आहे, तेव्हां ती पद्धती ही काढितां येईल. उदाहरण. २ आणि $-\frac{१}{२}$ हीं जा पद्धतीचीं मूळें आहेत, आणि जिचे पहिल्ये पदाचा गुणक ४ आहे, तर ती पद्धती काय आहे ? वरचे पद्धतीचे रूपाप्रमाणें, इच्छिली पद्धती याप्रमाणें असावी

$$४(क्ष-२)\left(क्ष-\left(-\frac{१}{२}\right)\right)\ अथवा\ ४(क्ष-२)\left(क्ष+\frac{१}{२}\right)\ अथवा\ ४क्ष^{२}-६क्ष-४,$$

वरची पद्धती उलगडली असतां, याप्रमाणें निघेल

$$अ(क्ष-क्ष_{१})(क्ष-क्ष_{२}) = अक्ष^{२}-अ(क्ष_{१}+क्ष_{२})क्ष+अक्ष_{१}क्ष_{२}$$

ही, $अक्ष^{२}+बक्ष+क$ याशीं एकरूप आहे; यामुळें २२७ **पृष्ठावरून**, याप्रमाणें होईल

$$ब = -अ(क्ष_{१}+क्ष_{२})\quad अथवा\quad क्ष_{१}+क्ष_{२} = -\frac{ब}{अ}$$

$$क = अक्ष_{१}क्ष_{२}\quad अथवा\quad क्ष_{१}क्ष_{२} = \frac{क}{अ}$$

$$मुळांची\ बेरीज = -\frac{क्षचा\ गुणक}{क्ष^{२}चा\ गुण}$$

$$मुळांचा\ गुणाकार = \frac{क्षवांचून\ पद}{क्ष^{२}चा\ गुणक}$$

जेव्हां अ=१, अथवा पद्धती याप्रमाणें आहे, ह्मणजे, $क्ष^{२}+बक्ष+क$, तेव्हां याप्रमाणें होईल

मुळांची बेरीज = −ब होईल. मुळांचा गुणाकार = क होईल

पूर्वींच्या उदाहरणांवरून या सिद्धांतास लावून पहा.

वरचीं रूपें दाखविण्यासाठीं, पद्धतींचीं चिन्हें कुंडलींत मांडिलीं आहेत: जसें अ पद्धती. (+++) यांणीं, आणि, अ' पद्धती (− − −) यांणीं दाखविली जाईल, इत्यादि. हा पहिला पक्ष, ज्यामध्यें $ब^{२}-४अक$ धन आहेत, चिन्हांच्या पुढील प्रमाणें जा भिन्न भिन्न रचना होऊं शकतात त्या सर्व या पक्षांत आहेत

(+ + −) (− − +) (+ − −) (− + +)

कांकीं या सर्वांमध्यें अ आणि क चीं चिन्हें भिन्न आहेत; यामुळें अक ऋण आहे, आणि, यामुळें, $ब^{२}-(-४अक)$ धन आहे, आणि $ब^{२}$ हून अधिक आहे. एथें तर, अ, ब, क, यांचा अंकगणित किंमतींचे आश्रयावांचून, $ब^{२}-(-४अक)$ धन आहे. याच पक्षांत ही पुढील रचना असेल किंवा नसेल,

(+ + +) (− − −) (+ − +) (− + −)

या सर्वांमध्यें अक धन आहे; आणि यामुळें $ब^{२}-४अक$ या पद्धतीचें चिन्ह $ब^{२}$ आणि अक यांचे केवळ अंकगणित किंमतींचे आश्रयावर आहे.

जा पक्षांस मूळें आहेत त्यांचा आतां विचार करितों; मनांत धरलें पाहिजे, कीं जोडींतून कोणत्येही एक पद्धतीचीं, केवळ चिन्हें बदल करून, तीस तिचे जोडीचे दुसऱ्ये पद्धतीचें रूप दिलें जाईल. जसें, $-क्ष^{२}-क्ष+१=-(क्ष^{२}+क्ष-१)$, अथवा केवळ चिन्हें बदल केल्यानें (− − +) यांचें रूप (+ + −) असें होतें. आणि, जेव्हां अ=०, तेव्हां −अ=०, यामुळें प्रत्येक प्रकार जो पदाचे केवळ चिन्हांचे आश्रयावर आहे, त्यांत या पुढल्या ओळींतील पहिल्या ओळीचे पद्धतींचीं मूळें दुसऱ्ये ओळींतील त्यांशीं मिळत्या पद्धतीचे मुळांसारिखीं आहेत.

(+ + +) (− − −) (+ + −) (− − +)
(+ − +) (− + −) (+ − −) (− + +)

१. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें नसतात, त्या पद्धती (+ + +) (− − −) या रूपाच्या असतात; आणि त्यांत $ब^२$ पेक्षां $ब^२ - ४अक$ कमी आहेत. त्या पद्धतींस जर मूळें असलीं, तरतीं दोन्हीं ऋण असतात. कांकीं जापेक्षां $ब^२$ हून $ब^२-४अक$ कमी आहेत ह्मणून, २२० पृष्ठाप्रमाणें $\sqrt{ब^२}$ अथवा ब ची अंकगणितरूप किंमत याहून $\sqrt{ब^२-४अक}$ कमी आहेत. यामुळें $-ब+\sqrt{ब^२-४अक}$ आणि $-ब-\sqrt{ब^२-४अक}$ या दोहोंस −ब अथवा ब चे विरुद्ध चिन्ह सारिखेंच आहे.* परंतु मूळें हीं पुढील आहेत

$$\frac{-ब+\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ} \qquad \frac{-ब-\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ}$$

चिन्हांविषयीं, हीं दोन्हीं मूळें ऋण आहेत, कांकीं, ब आणि अ यांचीं चिन्हें दोहों पद्धतींत सारिखींच आहेत, आणि अ आणि ब यांचे चिन्हाविरुद्ध अंशाचें चिन्ह आहे, आणि त्यांचे चिन्हा सारिखें छेदाचें चिन्ह आहे.

२. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें नसतात, त्या पद्धती (+ − +) (− + −) या रूपाच्या असतात; आणि त्यांत $ब^२$ हून $ब^२-४अक$ कमी आहेत. आतां अ आणि ब यांस निरनिराळीं चिन्हें आहेत, असें लक्षांत ठेऊन जर अशी पद्धतींस मूळें असलीं, तर वरचे सारिख्याच रुतीनें तीं दोन्हीं धन आहेत असें सिद्ध करितां येईल.

३. जा पद्धतींस वास्तवीक मूळें सर्वदां असतात, त्या पद्धती (+ + −) (− − +) या रूपाच्या असतात; आणि त्यांत $ब^२$ हून $ब^२-४$ अक अधिक असतात. यांतून प्रत्येक पद्धतीस एक धन आणि एक ऋण अशीं दोन मूळें असता-

---

* उदाहरण, −३ ± २ या पद्धतीचा दोन्ही किंमती ऋण असाव्या; −३ ± ५ हि ची एक धन आणि एक ऋण अशा दोन किंमती आहेत.

त, आणि **ऋण मूळ** अंकगणित रूपानें **अधिक** असतें. कांकीं या पक्षीं,* जा-पेक्षां बहून अंकगणित रूपानें $\sqrt{\text{बं}-\text{४अक}}$ अधिक आहेत, तर $-\text{ब}+\sqrt{\text{बं}-\text{४अक}}$ आणि $-\text{ब}-\sqrt{\text{बं}-\text{४अक}}$ यांस निरनिराळीं चिन्हें आहेत; ह्मणजे पहिलीचें चिन्ह + आहे, आणि दुसरीचें – आहे. यामुळें,

$$\frac{-\text{ब}+\sqrt{\text{बं}-\text{४अक}}\ (\text{हें} + \text{आहे})}{\text{२अ}}$$ ही पद्धती चिन्हानें अ आणि ब यांशीं मिळते

$$\frac{-\text{ब}-\sqrt{\text{बं}-\text{४अक}}\ (\text{हें} - \text{आहे})}{\text{२अ}}$$ ही अ आणि ब यांचे चिन्हांशीं मिळत नाहीं

जर अ आणि ब + आहेत, तर दुसरी पद्धती **जी – आहे**, ती **मागल्या टिपेप्रमाणें** अंकगणित रूपानें अधिक आहे: जर अ आणि ब – आहेत, तर **पहिली पद्धती – आहे**, आणि अंकगणित रूपानें तीच अधिक आहे. यामुळें दोन्ही पक्षीं ऋणमूळ अंकगणित रूपानें अधिक आहे.

४. **ज्या पद्धतींस** वास्तविक मूळें सर्वदा असतात, त्या पद्धती (+ – –), (– + +) या रूपाच्या असतात; आणि त्यांत बं पेक्षां बं–४अक अधिक असतात. एथें, वरचे सारिख्याच तर्कानें, सिद्ध केलें जाईल कीं, एक मूळ धन आणि एक मूळ ऋण अवश्य असावें; परंतु **धन मूळ** अंकगणितरूपानें **अधिक** आहे. लक्षांत आणावें कीं या पक्षीं अ आणि ब यांचीं चिन्हें निरनिराळीं आहेत.

या सर्व पक्षांतून हा पुढील सिद्धांत निघतो. अक्षं+बक्ष+क या **पद्धतीस** जेव्हां निरनिराळीं मूळें असतात, **तेव्हां तिचें चिन्ह अचे चिन्हाहून कधीं भिन्न असत नाहीं, परंतु जेव्हां क्षची किंमत दोन मुळांमध्यें येते तेव्हां मात्र तिचें चिन्ह भिन्न असतें.** २३४ आणि २३५

* लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं प+क यांत जें पद अंकगणितरूपानें अधिक आहे, त्या पदाचे चिन्हावरून पद्धतीचें चिन्ह निश्चित होतें; आणिखी लक्षांत ठेवावें, कीं प±क अथवा प–क या दोहोंतून ज्यामध्यें +प आणि ±क या दोन पदांस एकसारिखें चिन्ह आहे, तीच अंकगणित रूपानें अधिक आहे.

एथें पुनः वाचून पहा. कांकीं

अक्ष²+बक्ष+क = अ (क्ष−क्ष₁) (क्ष−क्ष₁₁) असें सर्वदां आहे,

क्ष₁ आणि क्ष₁₁ या दोन मूळांतून एक तरी अधिक असावें; क्ष₁ अधिक आहे असें मनांत आण. तेव्हां, जर क्ष₁ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तर क्ष₁₁ पेक्षां ही क्ष अधिक आहे; आणि क्ष−क्ष₁ आणि क्ष−क्ष₁₁ ह्या दोन्ही धन आहेत. यामुळें अ (क्ष−क्ष₁) (क्ष−क्ष₁₁) हिचें चिन्ह अचे चिन्हासारिखें आहे. क्ष₁ पेक्षां क्ष कमी, परंतु क्ष₁₁ पेक्षां क्ष अधिक आहे, **ह्मणजे क्षची किंमत या दोन मूळांमध्यें आहे** अशी कल्पना कर, तेव्हां क्ष−क्ष₁ ऋण आहे, क्ष−क्ष₁₁ धन आहे; आणि अ × (क्ष−क्ष₁) (क्ष−क्ष₁₁) हिचें चिन्ह अचें चिन्हाहून निराळें आहे. क्ष₁₁ पेक्षां क्ष कमी आहे असें मनांत आण, तर तो क्ष₁ यापेक्षां ही कमी आहे; आणि क्ष−क्ष₁ आणि क्ष−क्ष₁₁ या दोन्ही ऋण आहेत; यामुळें, अ (क्ष−क्ष₁) (क्ष−क्ष₁₁) हीस अ सारिखेंच चिन्ह आहे. या तीन पक्षांचा पुनः विचार केला असतां इच्छिलेला सिद्धांत निघेल.

२. अक्ष²+बक्ष+क = ० यांत ब² = ४अक अथवा ब²−४अक = ०

या पक्षांत अ आणि क यांचें एकसारिखेंच चिन्ह असावें, कांकीं ४अक अगत्य धन असावें.

एथें अक्ष²+बक्ष+क = $\frac{(२अक्ष+ब)^२}{४अ}$

याचीं दोन बरोबरीचीं मूळें या पुढील पासून निघतात

२अक्ष+ब=० अथवा क्ष₁=क्ष₁₁= $-\frac{ब}{२अ}$

जेव्हां ब आणि अ यांचीं चिन्हें निरनिराळीं आहेत, ह्मणजे, जेव्हां पद्धती (+ − +) आणि (− + −) अशा आहेत, तेव्हां दोन्हीं मूळें धन आहेत; आणि जेव्हां ब आणि अ यांचीं चिन्हें एकसारिखीं आहेत, ह्मणजे, जेव्हां पद्धती (+ + +) आणि (− − −) आहेत, तेव्हां दोन्हीं मूळें ऋण आहेत. जापेक्षां अ आणि क यांचीं चिन्हें एकसारिखींच अगत्य असावीं ह्मणून, सर्व दुसरे पक्ष या पक्षांत येत नाहींत.

$अक्ष^{२}+बक्ष+क$ ही पद्धती सर्वदां वर्ग ह्मणजे **धन परिमाण** असून तीस ४अ भाजक आहेत यामुळें तिचें चिन्ह नेहेमी अचे चिन्हासारिखें असतें; पहा कीं या पक्षांत क्षची किंमत **मूळामध्यें** होऊं शकत नाहीं.

३. $अक्ष^{२}+बक्ष+क=०$ $४अक-ब^{२}=इ^{२}$ **२३३ पृष्ठाप्रमाणें.**

एथें अ आणि क यांचीं चिन्हें एकसारिखींच अगत्य असावीं, कांकीं ४अक धन आहेत, ह्मणजे ते $ब^{२}+इ^{२}$, या दोन धनपदांचे बेरिजे बरोबर आहेत. **२३३ पृष्ठाप्रमाणें.** $अक्ष^{२}+बक्ष+क=\frac{१}{४अ}\left\{(२अक्ष+ब)^{२}+इ^{२}\right\}$ ही धनपद्धती ४अनीं भागिलेली आहे ह्मणून, तिचें चिन्ह सर्वदां अचे चिन्हासारिखें आहे.

केवळ चिन्हरूप मूळें या पुढील समीकरणापासून निघतात. २३७ **आणि २३८ पृष्ठ पहा.**

$$(२अक्ष+ब)^{२}+इ^{२}=० \quad अथवा \quad (२अक्ष+ब)^{२}=इ^{२}\times-१$$

अथवा* $२अक्ष+ब=\pm इ\sqrt{-१}=\pm\sqrt{४अक-ब^{२}}\sqrt{-१}$

$$क्ष_{।}=\frac{-ब+\sqrt{४अक-ब^{२}}\sqrt{-१}}{२अ} \qquad क्ष_{॥}=\frac{-ब-\sqrt{४अक-ब^{२}}\sqrt{-१}}{२अ}$$

चालत्या रीती लाविल्यानें, हीं मूळें वर सांगीतल्ये समीकरणास, आणि या पुढील समीकरणांस स्थापितात, असें दिसेल

$$क्ष_{।}+क्ष_{॥}=-\frac{ब}{अ} \qquad क्ष_{।}\,क्ष_{॥}=\frac{क}{अ}$$

परंतु सद्यः **२४२ व्ये पृष्ठा** वरचा सिद्धांतास विस्ताररूप देववत नाहीं, कांकीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ यांस **अधिक** किंवा **कमी** पणाचा अर्थ लावितां येत नाहीं.

दोन वर्णांचे समीकरणांचें अंकरूप उलगडणें बहुत करून **कृतिक्रमानें** होतें, केवळ **सारणीनें** होत नाहीं, ह्मणजे, प्रत्येक पक्षास निरनि-

* पहा कीं $प^{२}=क^{२}$ अथवा $\pm प=\pm क$, यांपासून केवळ दोन निरनिराळीं रूपें होतात; कांकीं $+प=+क$ आणि $-प=-क$ हीं दोन्हीं एकच आहेत, आणि त्याचप्रमाणें $+प=-क$ आणि $-प=+क$ हीं ही एकच आहेत.

राळी कृती आहे, असें पुढील प्रमाणें :

मनांत आणा कीं $२क्ष^{२} - ७क्ष + ३ = ०$

(−)३ $२क्ष^{२} - ७क्ष = -३$

(÷)२ $क्ष^{२} - \frac{७}{२}क्ष = -\frac{३}{२}$

वर्ग पुरा करूं* : $क्ष^{२} - \frac{७}{२}क्ष + \left(\frac{७}{४}\right)^{२} = \left(\frac{७}{४}\right)^{२} - \frac{३}{२} = \frac{२५}{१६}$

वर्गमूळ काढ, $क्ष - \frac{७}{४} = \pm\frac{५}{४}$

$क्ष = \frac{७}{४} + \frac{५}{४}$ अथवा ३; अथवा $क्ष = \frac{७}{४} - \frac{५}{४}$ अथवा $\frac{१}{२}$.

परंतु शिकणारानें हा पुढील सिद्धांत अवश्य पाठ करावा :

जर $अक्ष^{२} + बक्ष + क = ०$

तर $क्ष = \frac{-ब + \sqrt{ब^{२} - ४अक}}{२अ}$ अथवा $\frac{-ब - \sqrt{ब^{२} - ४अक}}{२अ}$

उदाहरणें. १. या पुढील समीकरणाचीं उत्तरें काय आहेत?

$$पक्ष^{२} + क^{२}क्ष = कक्ष^{२} - प^{२}क्ष + प^{३}$$

अथवा $(प - क)क्ष^{२} + (प^{२} + क^{२})क्ष - प^{३} = ०$

यांत $अ = प - क$ $ब = प^{२} + क^{२}$ $क = -प^{३}$

इच्छिलीं मूळें या पुढील पद्धतीच्या दोन किंमती आहेत,

$$\frac{-(प^{२}+क^{२}) \pm \sqrt{(प^{२}+क^{२})^{२} - ४(प-क)(-प^{३})}}{२(प-क)}$$

$$(प^{२}+क^{२})^{२} = प^{४} + २प^{२}क^{२} + क^{४}$$

$$-४(प-क)(-प^{३}) = ४प^{४} - ४प^{३}क$$

याजकरितां वरच्या पद्धतीचीं मूळें या पुढील पद्धतींमध्यें आहेत,

$$\frac{-(प^{२}+क^{२}) \pm \sqrt{५प^{४} - ४प^{३}क + २प^{२}क^{२} + क^{४}}}{२. प - क}$$

* २३२ वें पृष्ठ पहा, जेथें $क्ष^{२} + बक्ष + \frac{ब^{२}}{४}$ हा $क्ष + \frac{ब}{२}$ याचा पूर्ण वर्ग आहे असें दिसलें.

२. $अक्ष^2 - अबक्ष = ब^2क्ष - ब^3$ असें असो,

$अक्ष^2 - (अब + ब^2)क्ष + ब^3 = ०$

याचीं मूळें या पुढील पद्धतीं मध्यें आहेत

$$\frac{अब + ब^2 \pm \sqrt{(अब + ब^2)^2 - ४अब^3}}{२अ}$$

$$(अब + ब^2)^2 - ४अब^3 = अ^2ब^2 + २अब^3 + ब^4 - ४अब^3$$
$$= अ^2ब^2 - २अब^3 + ब^4 = (अब - ब^2)^2$$

याकरितां याचीं मूळें या पुढील पद्धती मध्यें आहेत

$$\frac{अब + ब^2 \pm (अब - ब^2)}{२अ}$$

परंतु $\frac{अब + ब^2 + अब - ब^2}{२अ} = \frac{२अब}{२अ} = ब$ हें एक मूळ आहे,

$\frac{अब + ब^2 - अब + ब^2}{२अ} = \frac{२ब^2}{२अ} = \frac{ब^2}{अ}$ हें दुसरें मूळ आहे.

ताळा, $ब + \frac{ब^2}{अ} = \frac{अब + ब^2}{अ} = - \frac{-(अब + ब^2)}{अ}$

$ब \times \frac{ब^2}{अ} = \frac{ब^3}{अ}$ } २३९ पृष्ठ पहा.

आतां शिकणारानें या पुढील प्रमाणें करावें :

१. अंकगणितरूप समीकरण रचायाची रीति; दोन मूळें आणि पहिल्या पदाचा गुणक हीं घे, नंतर **२३९ पृष्ठाप्रमाणें** यावरून जा पद्धतीचीं हीं दोन मूळें असावीं ती पद्धती रच; नंतर वरचे सारणीवरून या रचिलेल्या पद्धतीचीं मूळें काढ, हीं मूळें, घेतलेलें मुळांबरोबर अगत्य असावीं. नंतर दुसऱ्या कांहीं पद्धती घे; आणि त्यांचीं मूळें काढून, त्यांचा योगानें ताळा पहा.

२. वर तुसतें एकादें समीकरण घ्यावयास सांगीतलें, परंतु अक्षररूप समीकरण उलगडण्याविषयीं अधिक आस्था लागल्ये, म्हणून अशाजातीचा पद्धती रचायासाठीं, भलती एकादी पद्धती घे, जी शून्याशीं बरोबर होईल आणि

तीमध्यें अक्षरांविषयीं एक पदाचा वर्ग दुसऱ्ये पदाचे वर्गापेक्षां अधिक न-
सेल; जसें या पुढील पद्धतींत

$$अब^{2} - अबक + अबक - अब^{2} = ०$$

क्ष = ब असें केल्यानें ती पद्धती नाहींशी होईल, ह्मणजे मनांत आण कीं ब-चे जागीं क्ष मांडिल्यानें एक पद्धती उत्पन्न होईल, जीविषयीं हीवरची गोष्ट पहिल्यानें लक्षांत येणार नाहीं. ह्मणजे

$$अक्ष^{2} - अबक + अकक्ष - अबक्ष = ०$$

हिचें एक मूळ ब असावें. वरचे सारिणीवरून मूळें काढ.

अथवा ही पुढील रीति घे: भलत्या कांहीं दोन सरळ पद्धती घे, त्यांतील एकीस मात्र छेद असावा; जसें $\frac{म}{न}$ आणि प. तेव्हां

$$नक्ष^{2} - (म + नप)क्ष + मप = ०$$

याचीं मूळें $\frac{म}{न}$ आणि प अशीं असावीं. ह्मणजे, यांचे जागीं ब आणि $\frac{१-अब}{अ}$ हीं घे. तेव्हां

$$म = १ - अब,\quad न = अ,\quad प = ब,$$

$$म + नप = १ - अब + अब = १;\ मप = ब - अब^{2}$$

याजकरितां या पुढील पद्धतीचीं मूळें,

$$अक्ष^{2} - क्ष + ब - अब^{2} = ०$$

याप्रमाणें असावीं, $क्ष_{।} = ब$ आणि $क्ष_{॥} = \frac{१-अब}{अ}$

उलटाविषय. $अक्ष^{2} + बक्ष + क = ०$ या पद्धतींत, अ = ० आहे असें मनांत आण. तेव्हां तिचें रूप याप्रमाणें होतें, बक्ष + क = ०, यापासून $क्ष = -\frac{क}{ब}$; अ = ० अशा कल्पनेनें $अक्ष^{2} + बक्ष + क = ०$ याचीं मूळें तपासलीं असतां, त्यांचीं रूपें याप्रमाणें होतात.

$\frac{-ब + \sqrt{ब^{2} - ४अक}}{२अ}$ या पहिल्ये मूळाचें रूप $\frac{०}{०}$ असें होतें ८७ **पृष्ठ पहा.**

$\frac{-ब - \sqrt{ब^{2} - ४अक}}{२अ}$ या दुसऱ्ये मूळाचें रूप $-\frac{२ब}{०}$ असें होतें ८१ **पृष्ठ पहा.**

म्हणून त्या दोन्ही पृष्ठांचे गोष्टींवरून, एक मूळ **अनंत** आणि दुसरें इच्छेप्रमाणें भलतें कांहीं परिमाण आहे असें म्हणावें कीं काय ? या पक्षीं असें म्हणवत नाहीं; यामुळें या पक्षाचा कांहीं अधिक विचार करावा. आतां अ=० अशा कल्पनेचेजागीं, **८१ व्ये पृष्ठाप्रमाणें**, अ अगत्य पडेल तसा लहान आहे अशी कल्पना कर. आतां पुढें जो लेम्मा सांगतों तो बीजगणितांत सर्वत्र उपयोगी पडेल.

लेम्मा. $\sqrt{ब^2+वि}$ या पद्धतींत, वि, इची तेवढी लहान कल्पूनही पद्धती वहून इच्छेस येईल तितक्या लहान परिमाणानें भिन्न करितां येईल: आणखी, याच कल्पनेवरून ती पद्धती $ब+\frac{वि}{२ब}$ याहून हवे तेवढ्ये लहान अंतरानें भिन्न केली जाईल इतकेंच नाहीं, परंतु इच्छेप्रमाणें वि चे हवे तेवढ्ये लहान अपूर्णांकाचे अंतरानें भिन्न केली जाईल.

वरची गोष्ट समजायासाठीं हें पुढें सांगतों; $\sqrt{१+वि}$ यांत वि, कशी ही लहान घेतली तरी ही पद्धती १ हून वि चे अर्धाचे सुमारानें अधिक होईल; परंतु $\sqrt{१+वि}$ ही $१+\frac{१}{२}वि$ याहून पाहिजे तर वि चा एक कोट्यांशापेक्षां कमी अंतरानें भिन्न अशी करितां येईल.

या लेम्माचा पहिला भाग स्पष्ट आहे: त्याचा दुसरा भाग या पुढील प्रमाणें सिद्ध होतो :

$$\left(ब+\frac{वि}{२ब}+\sqrt{ब^2+वि}\right)\left(ब+\frac{वि}{२ब}-\sqrt{ब^2+वि}\right)$$

$$=\left(ब+\frac{वि}{२ब}\right)^2-\left(ब^2+वि\right)$$

$$=ब^2+२ब\times\frac{वि}{२ब}+\frac{वि^2}{४ब^2}-ब^2-वि$$

$$=ब^2+वि+\frac{वि^2}{४ब^2}-ब^2-वि=\frac{वि^2}{४ब^2}.$$

$$ब+\frac{वि}{२ब}-\sqrt{ब^2+वि}=\frac{\frac{वि^2}{४ब^2}}{ब+\frac{वि}{२ब}+\sqrt{ब^2+वि}}$$

परंतु या शेवटील अपूर्ण बीजास जो छेद आहे, त्यांत, वि कमी केली असतां, $ब+\sqrt{ब^२}$ अथवा २ब यांचे जवळजवळ तो छेद होईल. तो छेद दाखवायासाठीं २ब+ व घे, त्यांत अगत्याप्रमाणें वि लहान केल्यानें, व इच्छेप्रमाणें लहान होत जाईल. तेव्हां

$$ब+\frac{वि}{२ब}-\sqrt{ब^२+वि}=\frac{वि^२}{८ब^२(२ब+व)}=\frac{वि}{८ब^२(२ब+व)}\times वि$$

ह्मणजे, $ब+\frac{वि}{२ब}$ आणि $\sqrt{ब^२+वि}$ यांचें अंतर केवळ विचे कांहीं अपूर्ण बीजपदा इतकें आहे, ह्मणजे, विचे $\frac{वि}{८ब^२(२ब+व)}$ इतकें त्यांचें अंतर आहे. परंतु वि हवी तेवढी लहान केली जाय, आणि वर सांगीतलें या कारणास्तव व ही लहान होत जाईल, ह्मणजे $८ब^२(२ब+व)$ ही इच्छेप्रमाणें $८ब^२\times२ब$ अथवा $१६ब^३$ याचे जवळ केली जाईल, यावरून $ब+\frac{वि}{२ब}$ आणि $\sqrt{ब^२+वि}$ यांचें अंतर जें विचें अपूर्ण बीजपद आहे, तें अपूर्णबीज या पुढील प्रमाणें दाखवितां येईल:

$$\frac{वि\ (\text{इच्छेप्रमाणें भलतें कांहीं लहान परिमाण})}{१६ब^३(\text{कांहीं दिलेलें परिमाण}+\text{इच्छेप्रमाणें भलतें कांहीं लहान परिमाण})}$$

आणि या कारणास्तव हें अपूर्णबीज परिमाण इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें ही लहान केलें जाईल.

या पुढीलाची सिद्धता वरच्याच प्रमाणें केली जाईल; ह्मणजे, $ब-\frac{वि}{२ब}$ आणि $\sqrt{ब^२-वि}$ या दोन्हीं पद्धती इच्छेप्रमाणें विचे हवे तेवढ्ये लहान अपूर्ण बीजानें भिन्न केल्या जातील.

आतां इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा अ लहान केला जाईल या कल्पने वरून या पुढील मूळांचे विचारास वरचा सिद्धांत लावितों.

$$\frac{-ब+\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ}\quad \text{आणि}\quad \frac{-ब-\sqrt{ब^२-४अक}}{२अ}$$

यांत क दिलेलें परिमाण आहे, यामुळें इच्छेप्रमाणें ४अक हवे तितके लहान के-

लेजातील; आणि वरच्या लेम्माप्रमाणें जर वि= ४ अक, तर $\sqrt{ब^२-४अक}$ ही ब $-\frac{४अक}{२ब}$ याहून ४अक यांचे हवे तेवढे लहान अपूर्ण बीजानें भिन्न केली जाईल.

तर, $\sqrt{ब^२-४अक}=ब-\frac{४अक}{२ब}-प\times४अक$ असें घे, यांत इच्छेप्रमाणें प आणि अ हवे तेवढे लहान केले जातील.

तेव्हां मूळें याप्रमाणें आहेत,

$$\frac{-ब+ब-\frac{४अक}{२ब}-४पअक}{२अ} \quad आणि \quad \frac{-ब-ब+\frac{४अक}{२ब}+४पअक}{२अ}$$

$$अथवा \quad -\frac{क}{ब}-२पक \quad आणि \quad \frac{-२ब+\frac{२अक}{ब}+४पअक}{२अ}$$

आतां अला उत्तरोत्तर कमी कर, तर अशे पक्षीं तशेच रीतीनें प अधिक अधिक कमी होईल. पहिलें मूळ $-\frac{क}{ब}$, आणि दुसरें मूळ $-\frac{२ब}{०}$ अशे रूपाचे जवळ जवळ येतात. परंतु जा पक्षांत अ=०, ह्मणजे जांत बक्ष+क=०, अशी कल्पना केली, ह्मणजे जा पक्षांत अक्ष^२+बक्ष+क=० असें समीकरण होतें, त्याचें एक मूळ वरच्या पहिल्ये मूळाबरोबर आहे, त्यापासून, क्ष=$-\frac{क}{ब}$ असें निघतें. दुसरे मूळाविषयीं अर्थ अद्यापि सांगीतला नाहीं.

दृष्टांतार्थकृत्य. अ, ब, क, आणि इ, असे चार अंक आहेत, यांतून शेवटील तीन कांहीं अंकानें वाढविले आहेत, आणि त्यांतील पहिला त्या अंकाचे म वेळांनीं वाढविला आहे. असें केल्यावर ते अंक प्रमाणांत होतात. यावरून ते अंक काय आहेत?

अंक दाखविण्यासाठीं क्ष घे. तर मक्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, आणि क्ष+इ हे प्रमाणांत आहेत.

$$अथवा \quad \frac{मक्ष+अ}{क्ष+ब}=\frac{क्ष+क}{क्ष+इ} \quad अथवा \quad (मक्ष+अ)(क्ष+इ)=(क्ष+ब)(क्ष+क)$$

हे गुणाकार कर, आणि त्यांस प=० अशे रूपाचे समीकरणाचें रूप दि-

त्यानें, या पुढील प्रमाणें होईल,

$$(म-१)क्ष^{२}+(मड़+अ-ब-क)क्ष+अड़-बक=०$$

क्षच्या किंमती या पुढील पद्धतींत आहेत

$$\frac{-(मड़+अ-ब-क) \pm \sqrt{(मड़+अ-ब-क)^{२}-४(म-१)(अड़-बक)}}{२(म-१)}$$

आणि यामुळें, बहुतकरून, कृत्यांचीं दोन उत्तरें आहेत. परंतु जर म=१, ह्मणजे जर क्ष असा घ्यावा लागतो कीं क्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, क्ष+ड़, प्रमाणांत आहेत, तर ज्या पक्षाचा विचार करण्याची इच्छा आहे, तसा पक्ष उत्पन्न होतो : कांकीं म-१=०; त्यामुळें समीकरणाचें रूप याप्रमाणें होतें

$$(ड़+अ-ब-क)क्ष+अड़-बक=०;$$

यांतून केवळ एक मूळ निघतें; आणि वरचे दोन मूळांतून एकाचें या प्रमाणें रूप होतें

$$\frac{-२(ड़+अ-ब-क)}{०}$$

या रूपाचे पद्धतीचा अर्थ ८६ आणि ८७ पृष्ठांवरून हाच आहे, कीं कोणताही मोठा अंक कृत्याचे संकेतांस जवळ जवळ स्थापील, त्यापेक्षां अधिक मोठा अंक त्यांस अधिक जवळ स्थापील, आणि या प्रमाणें पुढें. आतां हेंच विचारायाचें राहिलें. कीं जसा क्ष वाढविला असतां, क्ष+अ, क्ष+ब, क्ष+क, क्ष+ड़, हे प्रमाणांत अधिक अधिक जवळ होत जातील कीं काय; ह्मणजे,

$\frac{क्ष+अ}{क्ष+ब}=\frac{क्ष+क}{क्ष+ड़}$ हें समीकरण खरेपणाचे जवळ होईल कीं काय?

या दोन अपूर्णबीजांचे अंश आणि छेद क्षनें भाग; तेणेंकरून त्यांचें रूप याप्रमाणें होईल $\frac{१+\frac{अ}{क्ष}}{१+\frac{ब}{क्ष}}=\frac{१+\frac{क}{क्ष}}{१+\frac{ड़}{क्ष}}$, यांत क्ष हवा तितका मोठा केला

केला असतां, हें समीकरण इच्छे प्रमाणें खरेपणाचें अवळ होईल; कांकीं, असें केल्यानें, $\frac{अ}{क्ष}$, $\frac{ब}{क्ष}$, $\frac{क}{क्ष}$ आणि $\frac{इ}{क्ष}$ हवे तेवढे लहान केले जातील, आणि वरचें समीकरण $\frac{१}{१} = \frac{१}{१}$ इच्छे प्रमाणें यांचे अवळ अवळ केलें जाईल.

यावरून दिसतें, कीं कृत्यास जेव्हां बहुत करून, दोन उत्तरें असतात आणि जेव्हां एकादे विशेष पक्षीं त्याचें एकच उत्तर निघतें. तेव्हां **८६ आणि ८७ पृष्ठांवरचे** गोष्टीचे अर्थाप्रमाणें, असें ह्मटलें जाईल, कीं अव्यक्त पदाचें दुसरें उत्तर **अनंत** आहे.

परंतु $-\frac{२ब}{०}$ याचा अर्थ जो **८६ आणि ८७ पृष्ठांवर** सांगीतला तो जरी वरचे गोष्टीवरून स्थापिला जातो, तथापि हें ही पाहण्यांत येतें, कीं $\frac{०}{०}$ हें दुसऱ्या मूळाचें रूप आहे, त्यास, क्षची कोणती ही किंमत समीकरणास स्थापील असा **८७ पृष्ठावर** जो अर्थ आहे, तो लागू पडत नाहीं, परंतु तें रूप हें दाखवितें कीं खरें मूळ $-\frac{क}{ब}$ आहे. या गोष्टी विषयीं दुसऱ्या अध्यायांमध्यें पुनः विचार होईल.

वरचे पक्षांत अ=०, अशा कल्पनेनें नव्या गोष्टी दिसून येतात: आतां क=० अशी कल्पना कर. त्यावरून समीकरण याप्रमाणें होतें अक्ष²+बक्ष =०, अथवा क्ष (अक्ष+ब) =०; हें समीकरण क्ष=० अथवा अक्ष+ब=० असें असलें तरी स्थापिलें जातें. ह्मणजे, त्याचीं मूळें ० आणि $-\frac{ब}{अ}$ हीं आहेत. मूळां विषयींचा सामान्य सारणी पासून ही ही गोष्ट पहाण्यांत येईल.

याचसारिखें, जर ब=० आहे, तर समीकरण याप्रमाणें होतें, अक्ष²+क=०.

$$क्ष^2 = -\frac{क}{अ},\quad क्ष = +\sqrt{-\frac{क}{अ}} \text{ अथवा } -\sqrt{-\frac{क}{अ}}$$

क आणि अ यांचीं चिन्हें निरनिराळीं असतील, तर एक मूळ धन आहे आणि दुसरें ऋण आहे, आणि क आणि अ यांचीं चिन्हें सारिखींच असतील तेव्हां दोन्हीं मूळें केवळ चिन्हरूप आहेत. ही गोष्टही त्याच सामान्य सारणीपा-

सून निघले.

वरचा सिद्धांत पुष्कळ कामांत येतो त्यांतून एक उदाहरण सांगतों. दोन परिमाणांची बेरीज (स) आणि त्यांचा गुणाकार (प) हीं दोन्हीं ठाऊक आहेत अशी कल्पना कर, तर अशी एक पद्धती काढ, कीं तींत ती बेरीज आणि गुणाकार यांशिवाय दुसरें कांहीं पद येणार नाहीं, आणि त्या पद्धतीचा योगानें त्या दोन परिमाणांचे वर्गांची, अथवा घनांची, अथवा चतुर्घातांची इत्यादि, बेरीज कळली जाईल.

हीं दोन इच्छिलेलीं परिमाणें २४० पृष्ठाप्रमाणें यापुढील पद्धतीचीं मूळें आहेत.

$क्ष^{२} - सक्ष + प = ०, (\times) क्ष^{न}$ तर $क्ष^{न+२} - सक्ष^{न+१} + पक्ष^{न} = ०$

तीं दोन मूळें दाखविण्यासाठीं $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ घे; तर याप्रमाणें होईल

$$क्ष_{।}^{न+२} - सक्ष_{।}^{न+१} + पक्ष_{।}^{न} = ०$$

$$क्ष_{॥}^{न+२} - सक्ष_{॥}^{न+१} + पक्ष_{॥}^{न} = ०$$

$$(+) \qquad क्ष_{।}^{न+२} + क्ष_{॥}^{न+२} - स\left(क्ष_{।}^{न+१} + क्ष_{॥}^{न+१}\right) + प\left(क्ष_{।}^{न} + क्ष_{॥}^{न}\right) = ०$$

$क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ यांचे न घातांची बेरीज दाखविण्यास **$अ_{न}$** घे; यावरून वरचे समीकरणाचें रूप याप्रमाणें होईल

$$अ_{न+२} - स\,अ_{न+१} + प\,अ_{न} = ०$$

अथवा $$अ_{न+२} = स\,अ_{न+१} - प\,अ_{न}$$

आतां जर न = ० तर $अ_{०} = क्ष_{।}^{०} + क्ष_{॥}^{०} = १ + १ = २$, **१७० पृष्ठ पहा**

$$अ_{१} = क्ष_{।} + क्ष_{॥} = स$$

यामुळें वरचे समीकरणावरून

$अ_{२} = स\,अ_{१} - प\,अ_{०} = स^{२} - २प$

$अ_{३} = स\,अ_{२} - प\,अ_{१} = स\,(स^{२} - २प) - पस = स^{३} - ३पस$

$अ_{४} = स\,अ_{३} - प\,अ_{२} = स\,(स^{३} - ३पस) - प\,(स^{२} - २प) = स^{४} - ४पस^{२} + २प^{२}$

याप्रमाणें पुढें ही.

वरजी गोष्ट सिद्ध केली तिच्चे सहाय्यानें पुष्कळ समीकरणें उलगडलीं जातात; याचें कारण हेंच, कीं, अव्यक्तपदाविषयीं तीं समीकरणें जरी बरोबर दोन वर्णांचीं नाहींत, तथापि त्यांतील ज्या पद्धतींत अव्यक्तपद असतें तिजविषयीं तीं समीकरणें दोन वर्णांचीं असतात. उदाहरण,

$$क्ष^{२}-३क्ष+१=२-\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}$$

यास स्थापिल्ये अशी क्षची किंमत काढायास इच्छितों,

या समीकरणाचें मूळ चिन्ह घालवायासाठीं, पुढील प्रमाणें केलें पाहिजे.

$$\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}=१+३क्ष-क्ष^{२};$$ दोन्हीं बाजूंचा वर्ग कर,

$$क्ष^{२}-३क्ष+१=१+६क्ष+७क्ष^{२}-६क्ष^{३}+क्ष^{४}$$

अथवा $$क्ष^{४}-६क्ष^{३}+६क्ष^{२}+९क्ष=०$$

हें क्षविषयीं चार वर्णांचें समीकरण आहे, ज्याचा उलगड ग्याची रीति मागें कोठें ही आली नाहीं. परंतु मूळचें समीकरण पाहिलें असतां, तें $वि^{२}=२-वि$ या रूपाचें आहे असें दिसतें; कांकीं जर $\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}=वि$ आहे, तर $क्ष^{२}-३क्ष+१=वि^{२}$. आतां $वि=\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}$ असें घे, तर

$वि^{२}+वि-२=०,$ $वि=१$ अथवा -२

पहिल्यानें $वि=१$ असें घे, तर

$\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}=१$ अथवा $क्ष^{२}-३क्ष+१=१, \therefore क्ष=०$ अथवा ३

दुसऱ्यानें $वि=-२$ असें घे, तर

$\sqrt{क्ष^{२}-३क्ष+१}=-२$ अथवा $क्ष^{२}-३क्ष+१=४ \therefore क्ष=\frac{३\pm\sqrt{२१}}{२}$

ह्मणून क्षचा या पुढील किंमतीनें मूळचें समीकरण स्थापिलें जातें;

$$०,\quad ३,\quad \frac{३+\sqrt{२१}}{२},\ \text{आणि}\ \frac{३-\sqrt{२१}}{२}$$

पुनः, $२क्ष^{६}-३=क्ष^{३}$ असें समीकरण घे. एथें $क्ष^{६}=(क्ष^{३})^{२}$; $वि=क्ष^{३}$ घे, यावरून समीकरण याप्रमाणें होतें, ह्मणजे, $२वि^{२}-३=वि$; याचीं मूळें -१ आणि $\frac{३}{२}$ हीं आहेत. यावरून, $क्ष^{३}=-१$ अथवा $क्ष^{३}=\frac{३}{२}$;

म्हणजे $\pm\sqrt{-१}$ आणि $\pm\sqrt{\frac{३}{२}}$ यांच्या कोणत्याही खऱ्या किंवा केवळ चिन्हरूप किमती असतील, त्या $२.क्ष^४ - ३ = क्ष^२$ या समीकरणाचीं मूळें आहेत.

समीकरणांत करणी चिन्हें असतात; त्यांस घालवावयाच्या कृतींचीं कांहीं उदाहरणें सांगून ह्या अध्याय संपवितों.

$$\sqrt{क्ष} + \sqrt{क्ष+१} + \sqrt{क्ष+२} = २$$

$$\therefore \quad \sqrt{क्ष} + \sqrt{क्ष+१} = २ - \sqrt{क्ष+२}$$

दोन्हीं बाजूंच्या वर्ग कर.

$$क्ष + २\sqrt{क्ष}.\sqrt{क्ष+१} + क्ष + १ = ४ - ४\sqrt{क्ष+२} + क्ष + २$$

अथवा $$२\sqrt{क्ष(क्ष+१)} + ४\sqrt{क्ष+२} = ५ - क्ष$$

पुनः दोहों बाजूंच्या वर्ग कर.

$$४क्ष(क्ष+१) + १६\sqrt{क्ष(क्ष+१)}\sqrt{क्ष+२} + १६(क्ष+२) = २५ - १० क्ष + क्ष^२$$

अथवा $$१६\sqrt{क्ष(क्ष+१)(क्ष+२)} = -(७ + ३० क्ष + ३ क्ष^२)$$

पुनः दोहों बाजूंच्या वर्ग कर.

$$२५६ क्ष(क्ष+१)(क्ष+२) = (७ + ३० क्ष + ३ क्ष^२)^२$$

यांत कांहीं करणी चिन्ह नाहीं, म्हणून सहज उलगडलें जाईल.

पुढें कांहीं सोपीं उदाहरणें देतों. तीं शिकणारानें उलगडावीं.

समीकरण. $\sqrt{क्ष+५} + \sqrt{क्ष-३} = ४$

यापासून $क्ष - ४ = ०$ असें होतें.

समीकरण, $\sqrt{क्ष+अ} + \sqrt{क्ष+ब} = क$

यापासून $४ क^२ क्ष + ४ अब - (क^२ - अ - ब)^२ = ०$ असें होतें.

परंतु एथें मनांत आणिलें पाहिजे, कीं

$(क्ष+अ)^{\frac{१}{२}} + (क्ष+ब)^{\frac{१}{२}} = क$ २१९ आणि २२० पृष्ठें पहा.

याचें उत्तर वरच्या उत्तरासारिखेंच येतें, आणि त्याचीं या पुढील प्रमाणें चार रूपें आहेत.

$$\sqrt{क्ष+अ}+\sqrt{क्ष+ब}=क \qquad -\sqrt{क्ष+अ}+\sqrt{क्ष+अ}=क$$
$$\sqrt{क्ष+अ}-\sqrt{क्ष+ब}=क \qquad -\sqrt{क्ष+अ}-\sqrt{क्ष+अ}=क$$

जी क्षची किंमत वर निघाली, ह्मणजे

$$क्ष=\frac{(क^{२}-अ-ब)^{२}-४अब}{४क^{२}}$$

ही किंमत वरचे चार रूपांतून केवळ एकास मात्र स्थापित्ये. या मुळें, जेव्हां वरचे समीकरणांतून **एक** उत्तर निघतें, तेव्हां कल्प पुरतें प्रश्नीं समजांत आलें अशी खात्री होत नाहीं, यास्तव त्यांतून **दुसरें** एक समीकरण निघेल असें विस्तार रूप त्या कल्पास दिलें पाहिजे.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें देतों:

१. $अ+\frac{१}{अ}$ ही पद्धती **गणितरूपानें** २पेक्षां कमी होऊं शकत नाहीं, हें दाखीव. यास याप्रमाणें सिद्ध कर, ह्मणजे $अ+\frac{१}{अ}=२-प$ यांत जेव्हां ४ आणि ० यांचेमध्यें प असेल, तेव्हां या समीकरणाचीं मूळें केवळ चिन्हरूपाचीं आहेत हें दाखीव. $(अ-१)^{२}$ ही सर्वदां धन असल्ये त्यापासून ही वरची गोष्ट सिद्ध होईल:

२. $अ^{२}+ब^{२}$ ही २अब पेक्षां खचित अधिक असावी हें दाखीव.

३. जर $अ+\frac{१}{अ}=स$ आहे, तर पुढील समीकरणें सिद्ध कर,

$$अ^{२}+\frac{१}{अ^{२}}=स^{२}-२, \qquad अ^{३}+\frac{१}{अ^{३}}=स^{३}-३स, \qquad अ^{४}+\frac{१}{अ^{४}}=स^{४}-४स^{२}+२.$$

४. $अक्ष^{२}+बक्ष+क$ या पद्धतीचीं मूळें $क्ष_{।}$ आणि $क्ष_{॥}$ असतील, तर याप्रमाणें होईल; ह्मणजे,

$$क्ष_{।}-क्ष_{॥}=\pm\frac{१}{अ}\sqrt{ब^{२}-४अक}, \qquad \frac{क्ष_{।}}{क्ष_{॥}}=\frac{ब^{२}-२अक}{२अक}\pm\frac{ब}{२अक}\sqrt{ब^{२}-४अक}$$

$$\frac{क्ष_{।}}{क्ष_{॥}}+\frac{क्ष_{॥}}{क्ष_{।}}=\frac{ब^{२}-२अक}{अक}, \qquad \frac{१}{क्ष_{॥}}+\frac{१}{क्ष_{।}}=-\frac{ब}{क}$$

५. $अक्ष^{२}+बक्ष+क$ या पद्धतींत, एक मूळ दुसऱ्या मूळापेक्षां मनें अधिक आहे हें पूर्वीं ठाउक आहे अशी कल्पना कर, तर सारिणीचे सहाय्यावांचून या पद्धतीचीं मूळें काढ. त्या पद्धतीचें एक मूळ दुसऱ्या मूळाच्या न वेळा आहे अशा कल्पनेवरून तिचीं मूळें काढ.

सहावा अध्याय.

नियत आणि अनियत परिमाणांविषयीं.

कांहीं विशेष कल्पनांपासून जीं फळें उत्पन्न होतात, तीं यापूर्वी पहाण्यांत आलीं; जीं परिमाणें कांहीं पक्षीं समजायाजोगीं होतीं, तीं वर सांगीतल्ये विशेष कल्पनेचा योगानें $\frac{क}{०}$, $\frac{०}{०}$, $अ^{०}$, इत्यादि, अशा रूपाचीं झालीं. या रूपांशिवाय आतां नुसत्ये ० या रूपाचा विचार करितों, ह्मणजे जा प्रकारें करून त्यास कामांत आणावें लागेल त्याविषयीं कांहीं विचार करावा लागेल; पूर्वीं असें समजलें कीं सर्व समीकरणांस प = ० असें रूप दिल्यानें सोईवार पडलें, तर त्यावरून, कदाचित दृष्टी चुकून, या पुढील सारिखे सारांश मनांत येतील: जर अब = ० आणि अक = ०. तर अब = अक अथवा ब = क होईल. या गोष्टीविषयीं हें पुढील आश्चर्यकारक उदाहरण सांगतों: जर क्ष − २ = ०, तर त्यावरून $क्ष^{२} - ४ = ०$, आणि $क्ष^{२} - २क्ष = ०$ असें होतें. तर आतां या दोन पद्धती समीकरण रूपानें मांडिल्या जातील कीं काय, आणि पूर्वीं सांगीतल्या कोणत्याही रीतीनें तीं समीकरणें उलगडावीं कीं काय? असें केलें तर, $क्ष^{२} - ४ = (क्ष - २)(क्ष + २)$ आणि $क्ष^{२} - २क्ष = क्ष(क्ष - २)$ तर समीकरया याप्रमाणें होईल

$(क्ष-२)(क्ष+२) = (क्ष-२)क्ष \quad (\div)(क्ष-२) \quad क्ष+२ = क्ष$

परंतु $क्ष - २ = ०$ $\quad \therefore क्ष = २$ अथवा $४ = २$

हें उत्तर अयुक्तिक आहे, यावरून असें दिसतें, कीं कृतीमध्यें कांहीं अयुक्तिक गोष्ट झाली. क्ष − २ जाची किंमत शून्य आहे, त्याणें

समीकरणाचा दोन्ही बाजू भागिल्या यापासून खोटेपणाचा भास होतो, क्ष−२=० अशी कल्पना घेउन कृतीमध्यें ० येतें, तरतें तसेंच ठेउन वरची कृती केली, आणि नंतर ० याचेजागीं क्ष−२ कामांत आणिले, तर या पुढील प्रमाणें खोटेपणा सहज लक्षांत येईल:

अ×०=०, ब×०=०, ∴ अ×०=ब×०, (÷)०

तर अ=ब म्हणजे, एथे परिमाणा सारिखें ० कामांत आणलें आहे, आणि ०=० अशी प्रतिज्ञा केली आहे आणि ० न्याने भागाकारही केला आहे. आतां ८१ पृष्ठावर जें मूळकारण सांगीतलें त्याजकडे लक्ष्य देउन क्ष−२=०. अशा कल्पनेचे जागीं क्ष−२ = **अतिलहान परिमाण** कल्पितों, आणि दोन जवळ जवळचा उभ्या ओळींत दोन सारिख्या रूपांचा कृती चुक्यांसुद्धां करून दाखवितों.

क्ष−२=० असें घे	क्ष−२ हवे तेवढे लहान किंमतीचे घे
∴ क्ष²−४=०	∴ क्ष²−४ हवे तेवढे लहान किंमतीचे होतील
आणि क्ष²−२क्ष=०	आणि क्ष²−२क्ष हवे तेवढे लहान होतील
∴ क्ष²−२क्ष=क्ष²−४	∴ क्ष²−२क्ष आणि क्ष²−४ हवे तेवढे बरोबरीचे जवळ जवळ होउं शकतात
अथवा क्ष(क्ष−२)=(क्ष−२)(क्ष+२)	आणि क्ष(क्ष−२) आणि (क्ष−२)(क्ष+२) हे ही वरप्रमाणें होतील

(÷) (क्ष–२) क्ष=क्ष+२	(÷) (क्ष–२) तेव्हां क्ष आणि क्ष+२ हे हवे तेवढे जवळ जवळ बरोबर होऊं शकतात.
परंतु क्ष–२=० अथवा क्ष=२	परंतु इच्छेप्रमाणें क्ष हा २ चे जवळ जवळ होईल;
∴ २=४	याजकरितां २ आणि ४ हे इच्छेप्रमाणें हवे तेवढे जवळ जवळ बरोबर होऊं शकतात.

८५ आणि ८६ पृष्ठां वरून बरोबर हा शब्द कोणत्याही अर्थानें घेतला, तरी वरचा दुसऱ्ये उभ्ये ओळींत चूक आहे. जा परिमाणांचें अंतर लहान आहे तीं जवळ जवळ बरोबर असें म्हटलें, तथापि $क्ष^2$–२क्ष आणि $क्ष^2$–४ हे जवळ जवळ बरोबर आहेत, याकरितां त्यांस क्ष–२ यांणीं भागिल्यानंतर, त्यांचे भागाकार त्याप्रमाणें जवळ जवळ होतील हें समजत नाहीं. कांकीं जर क्ष–२ = $\frac{1}{1000}$ असें असेल, तर क्ष–२ यांणीं भागावें आणि १००० यांणीं गुणावें हीं दोन्हीं बरोबरच आहेत, अथवा क्ष आणि क्ष+२ या दोन भागाकारांचें अंतर, $क्ष^2$–४क्ष आणि $क्ष^2$–४ यांचे अंतराचे १००० पट आहे. आणि क्ष–२ जितके लहान केले जातील त्याप्रमाणें क्ष–२ यांणीं भागतांना जो गुणाकार उत्पन्न होतो, तो गुणाकार फार मोठा होईल. $क्ष^2$–२क्ष आणि $क्ष^2$–४ यांचे अंतरापेक्षां क्ष आणि क्ष+२ या दोन भागाकारांचें अंतर त्यांचेच कांहीं योग्ये प्रमाणानें अधिक नाहीं, आणि ८६ पृष्ठावरचा गोष्टीतील अर्थाप्रमाणें जेव्हां अ, ब, क, आणि ड हीं चार परिमाणें आहेत, त्यांतून अ ला जसा क प्रमाण, त्याच प्रमाणानें जेव्हां पहिल्या दोहोंचें अंतर दुसऱ्या दोहोंचा अंतरास होईल, तर क ज

नें ड चे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे त्या प्रमाणानें अ हा ब चे बरोबरीचे जवळ जवळ होईल असें ह्मटलें जाईल: तर यासउत्तर हें च, कीं क्ष^{२} – २क्ष आणि क्ष^{२} – ४ हे लहान आहेत, आणि यामुळें यांचीं अंतरें ही लहान आहेत ह्मणून, ते जवळ जवळ बरोबर आहेत असें ह्मणवत नाहीं; कांकीं ते दोन ही लहान असतील, तथापि एक दुसऱ्यापेक्षां पुष्कळ मोठा असेल. जर सर्व पृथ्वी दाखवायासाठीं १ घेतला, तर हत्ती आणि मच्छर हीं दोन्हीं त्या प्रमाणानें अतिशय लहान अपूर्णांक आहेत, परंतु ते कोणत्याही अर्थानें जवळ जवळ बरोबर नाहींत.

वरचे गोष्टीवरून हें समजतें, कीं अ आणि ब हे परस्परांचे केवळ अति लहान अंशानें भिन्न आहेत तेव्हां ते जवळ जवळ बरोबर आहेत असें ह्मटल्यानें, दोन लहान परिमाणें लहान आहेत ह्मणून तीं जवळ जवळ बरोबर आहेत असें ह्मणवत नाहीं.

अ आणि ब हे केवळ बरोबर आहेत, याच्या खरेपणा या पुढील दोन समीकरणांपासून स्पष्ट आहे, ह्मणजे

$$अ - ब = ० \quad आणि \quad \frac{अ}{ब} = १$$

आतां ही पुढील व्याख्या सांगतों. **बरोबरीचे जवळ जवळ येणें हें अंतराचे न्यूनतेनें मोजिलें जात नाहीं, परंतु भागाकार १ याचे जवळ येण्यानें मोजिलें जातें.** जसें, जरीं ३–२ यांचें अंतर २५–२० यांचे अंतरापेक्षां कमी आहे, तथापि २५ हे २० चे जवळ जवळ बरोबर होण्यापेक्षां ३ हे २ चे अधिक जवळ जवळ बरोबर नाहींत. परंतु २५ हे २० यांचे जवळ जवळ बरोबर होण्यास जितके जवळ आहेत तितके ३ हे २ चे जवळ ज- ... बर होत नाहीं, कांकीं $\frac{३}{२}$ हे १ पेक्षां $\frac{१}{२}$ नें अधिक आहेत आणि $\frac{२५}{२०}$ ... अधिक आहेत, ह्मणजे $\frac{१}{४}$ हा $\frac{१}{२}$ पेक्षां कमी आहे.

जवळ बरोबर असे शब्द कामांत घ्यावे लागतील, तर

याविषयीं जा गोष्टी **८५ आणि ८६ पृष्ठांत** आणि वरजें मोठ्ये अक्षरांनीं लिहिलें तें पहा.

सिद्धांत. अपूर्णांकाची किंमत त्याचे पदांचे **शुद्ध** किंमती वरून होत नाहीं, परंतु त्या पदांचे संबंधाचे किंमती वरून होत्ये. $\frac{मअ}{मब} = \frac{अ}{ब}$ या समीकरणांत या वरचे सिद्धांताची गोष्ट आहे, असें या पुढील उदाहरणापासून दाखविलें जाईल.

१. असा एक अपूर्णांक काढ कीं ज्याचे अंश ५८३ असून, तो $\frac{१}{१०००}$ शा इतका लहान होईल.

उत्तर $\frac{५८३}{५८३०००}$.

२. अ आणि ब असे दोन अपूर्णांक काढ, कीं ते प्रत्येक $\frac{१}{१०००}$ पेक्षां कमी असून, $\frac{अ}{ब}$ दहा लक्षां बरोबर होईल.

उत्तर $अ = \frac{१}{२०००}$, $ब = \frac{१}{२०००००००००}$

एथें $\frac{अ}{ब} = १००००००$ $\frac{ब}{अ} = \frac{१}{१००००००}$

३. अ आणि ब, असे दोन अपूर्णांक काढ, कीं ते प्रत्येक २ पेक्षां कमी असून $\frac{अ}{ब} =$ म होईल.

उत्तर. २ क पेक्षां प कमी होईल या संकेताने प आणि क असे भलते कांहीं दोन अंक घे, ते या प्रमाणें असावे

$$अ = \frac{प}{क}, \text{ आणि } ब = \frac{प}{मक}$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें. पहा या उदाहरणांत सगळीं अक्षरें धन आहेत. प + क + म यांचे जवळ जवळ होण्यास जितका प + म आहे, तितका प + क चे जवळ जवळ होण्यास प नाहीं. क जितका इ चे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, त्याहून जर ब अधिक अ चे बरोबरीचे जवळ जवळ असेल, तर अ जितका ब चे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे, तितका ब + इ चे जवळ जवळ बरोबर होण्यास अ + क नाहीं, परंतु क जितका इ चे बरोबरीचे जवळ जवळ आहे त्याहून अधिक बरोबरीचे जवळ जवळ आहे. पुनः नय

याचे जवळजवळ होण्यास जितका मय आहे, तितका नक्ष चे जवळ जवळ होण्यास मक्ष आहे.

नियमित आणि अनियमित या शब्दांचे अर्थाविषयीं कांहीं गोष्ट सांगीतली पाहिजे. कांहीं विशेष पक्ष सांगण्याचा असेल, त्यांतील एकादा शब्द कामांत आणण्यास योग्य आहे किंवा नाहीं याविषयीं कांहीं संशय नसला, तर त्या शब्दास **नियमित** ह्मणतात. कांहीं विशेष पक्षांत एकादा शब्द कामांत आणण्याविषयीं संशय असेल, तर त्या शब्दास **अनियमित** ह्मणतात. जसें **बरोबर** हा शब्द नियमित आहे. **४ + ४ हे ९ यांचे बरोबर आहेत कीं काय?** अशे प्रश्नाचे उत्तराविषयीं दोन मतें कधींही होणार नाहींत. परंतु **मोठा** हा शब्द अनियमित आहे. **१००० हा मोठा अंक आहे कीं काय?** यास उत्तर हेंच, कीं सर्व लोकांस मान्य, असें कोणत्याही पक्षीं या प्रश्नाचें उत्तर देववत नाहीं. नियमित आणि अनियमित या शब्दांचीं कांहीं उदाहरणें देतों.

नियमित शब्द. बरोबर, केवळ सारखा, अधिक जवळ, अधिक मोठा, अधिक लहान, अति मोठा, अति लहान, इत्यादि, इतका तितका, इतका मोठा, अगदि.

अनियमित शब्द. जवळ, लहान, मोठा, बहुत, जवळजवळ, दुःशक्य, पुरता मोठा, पुरता लहान, इत्यादि.

अनियमित शब्दांचा अर्थ वाढविल्यानें त्यांचा अर्थ असा व्हावा, कीं त्या अर्थानें ते कामांत घेतले असतां जा प्रतिज्ञांत मतभेद आहे, त्या जर गणितरूप सिद्धांत अशा दिसणार नाहींत, तर या शब्दांचा उपयोग केला जाईल, आणि असें नसल्यास त्या शब्दांची कांहीं गरज पडणार नाहीं. या गोष्टीचें उदाहरण दाखविण्यासाठीं **जवळ, लहान, आणि मोठा,** हे शब्द घेतों. १२५ पृष्ठावर **उणें** शब्दाचा अर्थ दाखविला, तशा रीतीनें **अधिक लहान** हा शब्द बदल केला आहे असें मनांत आणू नये. तो शब्द गणितरूपाचा अर्थ

तसाच दाखवितो. **जर क्ष लहान असेल, तर ७ + क्ष हे ७ यांचे जवळजवळ बरोबर आहेत कीं काय?** या प्रतिज्ञेविषयीं सर्व लोक एक मत होतील: आणि त्याचें कारण हेंच, कीं **लहान** या शब्दाचा अर्थ दाखविण्याविषयीं जो अपूर्णांक बोलणाराचे मनांत असेल, त्या अपूर्णांकाचे संबंधरहित **लहान** आणि **जवळ** या शब्दाचा संबंध आहे. **अब** एक रेघ असेल, तीस कोणी लहान ह्मणेल आणि दुसरा कोणी ती लहान नाहीं असें ह्मणेल, परंतु **लहान** आणि **जवळ** या शब्दाविषयीं सर्व लोक एक मत होतील, कीं त्यांत अर्थ हाच आहे, कीं **जर अब लहान असेल, तर अ हा बचे जवळ आहे.** परंतु $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, इत्यादि यांतून कोणता अपूर्णांक लहान आहे? असें विचारिलें तर याचें उत्तर प्रसंगानुरूप दिलें जाईल. यामुळें लहान आणि जवळ हे दोन शब्द त्यांचा व्यवहारिक अर्थानें कामांत घेत नाहीं. परंतु वरची प्रतिज्ञा अशा रूपानें मांडिली जाईल, कीं लहान आणि जवळ हें काय आहे, असा प्रश्न करण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं. **जर क्ष हवा तेवढा लहान असेल, तर इच्छे प्रमाणें ७ यांचे जवळ ७ + क्ष केले जातील;** अथवा **माझे इच्छे प्रमाणें क्ष हवा तेवढा लहान केला तर, तुझे इच्छे प्रमाणें ७ यांचे हवे तेवढे जवळ ७ + क्ष करीन;** अथवा **तुझे इच्छे प्रमाणें जो लहान अपूर्णांक असेल तो सांग; परंतु त्यास तूं लहान ह्मणतोस त्याचें कारण विचारीत नाहीं: तेव्हां, माझा इच्छे प्रमाणें जर मी क्ष हवा तेवढा लहान केला, तर जो तूं अपूर्णांक सांगीतलास त्यापेक्षां ७ + क्ष आणि ७ याचें अंतर लहान करीन;** आणि याप्रमाणें पुढेंही.

लहान, मोठा आणि जवळ या शब्दांस व्यवहारिक अर्थानें नकारून, बीजगणितांत आपले कामासाठीं **इच्छे प्रमाणें लहान, इच्छे प्रमाणें मोठा, हवा तेवढा जवळ, अथवा हवा तेवढा लहान, जि-**

तका जितका मोठा, इत्यादि अशी बोलण्याचे संक्षेप स्थानीं त्यांस पुनः घेतों. या अर्थानें नियमित आणि सिद्ध केल्या जातील अशा पुष्कळ प्रतिज्ञा आहेत. उदाहरण. जर क्ष लहान असेल, तर $\frac{१}{क्ष}$ मोठा आहे. ह्मणजे इच्छे प्रमाणें जर क्ष लहान केला, तर इच्छे प्रमाणें $\frac{१}{क्ष}$ मोठा केला जाईल.

जशा कल्पना बदल होत जातात, तशी ज्याची किंमत बदल होत जात्ये, असें कांहीं अ परिमाण आहे, आणि जशी कल्पना बदलत्ये तशी ज्याची किंमत बदलत नाहीं, असें कांहीं प नियत परिमाण आहे, तर जेव्हां कांहीं प्रसंगी किंवा कल्पनांनीं इच्छे प्रमाणें हवा तेवढा प चे जवळ अ केला जातो, तेव्हां प यास अ ची नियतता ह्मणतात. कांहीं परिमाण इच्छे प्रमाणें मोठें आहे अशी कल्पना केली, तर तें परिमाण अनियत वाढत जातें असें ह्मणतात; आणि कांहीं परिमाण इच्छे प्रमाणें लहान आहे, तर तें परिमाण अनियत घटत जातें असें ह्मणतात. ह्या पुढील सिद्धांताचा खरेपणा स्पष्ट दिसेल.

जर क्ष अनियत घटत जातो, तर अ + क्ष या पद्धतीची नियतता अ आहे; जर क्ष अनियत घटत जातो, तर $\frac{१}{क्ष}$ अनियत वाढत जातो; जर क्ष अनियत ब चे जवळ येतो, तर अ + क्ष ची नियतता अ + ब आहे.

ही पुढील गोष्ट अवघड करून सांगण्याची रीती वरच्या पहिल्या आणि तिसऱ्या कल्पनेंत आहे असें दिसेल, ह्मणजे, जर क्ष = ०, तर अ + क्ष = अ; आणि जर क्ष = ब, तर अ + क्ष = अ + ब, हीं दोन्हीं समजण्याजोगीं आहेत. परंतु, जर क्ष = ०, तर $\frac{१}{क्ष} = \frac{१}{०}$, यांत कांहीं समजायाजोगा अर्थ नाहीं; सारांश या गोष्टीविषयीं जो एथें अर्थ सांगीतला, त्याचें अनुमान पूर्वी ८६ आणि ८७ पृष्ठांवरील प्रतिज्ञांत झालें.

जीं पदांचीं रूपें अन्य कारणानें अवघड असतील, त्यांचा अर्थ दा-

खवावा हा या अध्यायाचा हेतू आहे; असें 0, $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, हीं आणि $अ^{0}$ याचा जर अन्य कारणानें अर्थ सांपडला नसता, तर तें पद अशी अवघड रूपांत गणलें जातें. परंतु वरचा रूपांशिवाय दुसरीं आहेत

$$0^{0} \qquad 0^{\frac{1}{0}} \qquad \left(\frac{1}{0}\right)^{0} \qquad \text{इत्यादि},$$

जर या पुढील पद्धतींत क्ष = अ असें असल्यानें काय होईल हें लक्षांत न आलें तर कदाचित वरचा सारखीं रूपें आढळतील,

$$(क्ष-अ)^{क्ष-अ}, \quad (क्ष-अ)^{\frac{1}{क्ष-अ}}, \quad \left(\frac{1}{क्ष-अ}\right)^{क्ष-अ} \quad \text{इत्यादि}.$$

या सर्व पक्षांत, जेव्हां एकाद्ये रूपापासून कांहीं परिमाणाचा सरळबोध होत नाहीं, तेव्हां **त्या रूपाची काय किंमत आहे?** असें विचारणार नाहीं, अथवा त्या रूपाला किंमत आहे कीं नाहीं हें सिद्ध होतें कीं नाहीं, याविषयीं ही कांहीं विचार करायाचा नाहीं. परंतु बहुत करून सर्वदा या प्रमाणें विचारलें जाईल: **जा कल्पनेनें असमजुतीचें रूप उत्पन्न होतें, ती कल्पना घेतल्यास जा पद्धतीपासून असमजुतीचें रूप होतें, ती पद्धती कोणकोणत्ये किमतीचे जवळ येईल?** उदाहरण

जेव्हां $\quad क्ष = अ \quad$ तेव्हां $\quad \frac{क्ष^{2}-अ^{2}}{क्ष-अ} = \frac{0}{0}$

परंतु जेव्हां क्ष हा अचे जवळजवळ होत जातो, असें आहे तेव्हां वरचे अपूर्णांकाचे किमतीमध्यें कोणकोणत्ये तऱ्हेचा फेर होतो याचा विचार केला, तर असें समजांत येतें, कीं ती किंमत २अचे जवळजवळ येत जात्ये, ही गोष्ट पुढें दाखविली जाईल. आणि ही पुढील प्रतिज्ञा आपल्ये नजरेस येईल: **जर इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा क्ष हा अचेजवळ केला जाईल, तर इच्छेप्रमाणें हवा तेवढा $\frac{क्ष^{2}-अ^{2}}{क्ष-अ}$ हा २ अचे हवा तेवढा जवळ करितां येईल, अथवा जर क्ष हा अचे अनियत जवळ येतो, तर $\frac{क्ष^{2}-अ^{2}}{क्ष-अ}$ हा २ अ याचे अनियत जवळ होईल.**

तर यावरून या पुढील प्रमाणें ह्मटलें जाईल कीं काय?

जेव्हां क्ष = अ, तर $\frac{क्ष^{2}-अ^{2}}{क्ष-अ} = \frac{0}{0} = २अ$ अथवा या पक्षांत $\frac{0}{0} = २अ$?

सर्व पदांचा सरळ अर्थानें, असें ह्मणणें योग्य आहे कीं नाहीं, याचा विचार करणें शिकणारावर सोंपितों. **मागील प्रतिज्ञांतून एकादे प्रतिज्ञेचा संक्षेप दाखविण्याशिवाय** अशा रूपाचा या ग्रंथांत उपयोग करणार नाहीं.

$\frac{1}{0}$ याचे जागीं ∞ असें चिन्ह करायाची चाल आहे; आणि यास **अनंतता** ह्मणतात. वर सांगीतल्ये गोष्टीवरून **८६ आणि ८७ पृष्ठांचे** गोष्टीप्रमाणें क्ष = ∞ हें या पुढील गोष्टीचें संक्षेप रूप आहे असें मनांत आणलें आईल: **क्ष यास अनियत वाढूं दे.**

पुनः **क्ष = ० असें असूं दे**, हें या पुढील गोष्टीचें संक्षेप रूप आहे असें मनांत आणायास योग्य आहे. ह्मणजे **क्ष यास अनियत घटूं दे**. या गोष्टीविषयीं पुनः विचार होईल. परंतु प − क = ० या रूपाचे समीकरणामध्यें, जांत प आणि क कांहीं सांत परिमाणें आहेत, त्या समीकरणांत वरचे सारिखे बदल करण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं.

१. सिद्धांत. जर **अ** आणि **ब** या दोन पद्धती सर्वदा बरोबर आहेत, त्यांचीं रूपें जोंपर्यंत समजायाजोगीं आहेत, तोंपर्यंत **अ** आणि **ब** यांच्या नियतता ही बरोबर आहेत.

उदाहरण, मनांत आण कीं क्ष अनियत वाढत जातो, तर **अ** ची नियतता **प** आहे, आणि **ब** ची नियतता **क** आहे; तेव्हां **प = क** असावा. ही गोष्ट सिद्ध करायासाठीं मनांत आण, कीं

अ = प + अ, आणि **ब = क** + ब

तेव्हां, क्ष अनियत वाढविल्यानें, अ आणि ब अनियत घटत जातात. कांकीं असें नसलें, आणि जर अची नियतता (ख) असती तेव्हां **अ** अथवा **प** + अची नियतता **प** + ख होती. परंतु ती नियतता **प** आहे; यामुळें अला नियतता नाहीं, परंतु तो अनियत घटत जातो.

परंतु **अ = ब** यामुळें **प** + अ = **क** + ब. जर **प = क** नसेल

तर तो अधिक मोठा किंवा अधिक लहान असावा. जर होऊं शकेल तर क पेक्षां प अधिक मोठा आहे असें मनांत आण. आणि प = क + र असें घे. आतां प आणि क या परिमाणामध्यें क्ष नाहीं, आणि त्यासारिखा र यामध्येंही नाहीं, आणि जेव्हां क्ष बदलतो तेव्हां प, क, आणि र हे बदलत नाहींत. तेव्हां याप्रमाणें होतें,

क + र + अ = क + ब अथवा र = ब − अ

यांत हा पुढील खोटेपणा आहे: र हें नियतपरिमाण सर्वदा ब − अ याचे बरोबर आहे, ह्मणजे क्ष वाढविल्यानें ब − अ इच्छेप्रमाणें लहान करितां येतो, कांकीं जसजसा क्ष अनियत वाढविला जातो तसे ब आणि अ हे अनियत घटत जातात. यामुळें प = क + र हें अयुक्तिक आहे. वरचे रीतीप्रमाणें प = क − र हेंही अयुक्तिक आहे. असें सिद्ध करितां येईल. यामुळें प = क.

२. **सिद्धांत.** जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो तेव्हां क्ष = ० असें केल्यानें जरी पहिल्यानें सगळीं उत्तरें समजायाजोगे रूपाचीं असतील, आणि दुसऱ्यानें कृतीची संख्या अनियत नसेल तर त्या पद्धतीची नियतता काढितां येत्ये.

उदाहरण, जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां १ + २क्ष + ३क्ष^{2} याची नियतता १ + ० + ० अथवा १ आहे हें स्पष्ट दिसतें. आणि, कदाचित, शिकणाराचे मनांत स्पष्ट येईल, कीं

१ + क्ष + क्ष^{2} + क्ष^{3} + क्ष^{4} इत्यादि अनंत पावेतों

याची नियतता १ + ० + ० + ० + ० इत्यादि अनंत पर्यंत आहे अथवा, जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां ती नियतता १ आहे. परंतु एथें त्याणें पहावें, कीं जेव्हां क्ष लहान घेतला, आणि जरी क्ष, क्ष^{2}, क्ष^{3}, क्ष^{4}, इत्यादिकांतून प्रत्येक पद लहान असेल, तथापि त्यांची संख्या अनंत आहे. आणि कांहीं पदें एकत्र मिळवून, त्या पदांतून प्रत्येक पद इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें

लहान केलें असतां, इच्छे प्रमाणें त्यांची बेरीज हवी तेवढी लहान केली जाईल, हें जरी ठाऊक आहे, तथापि पदांचे **अनंत संख्या** विषयीं ही गोष्ट खरी आहे असें अद्यापि माहीत नाहीं.

३. **सिद्धांत.** जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो. तेव्हां

अ + ब क्ष, अ + बक्ष + क क्ष², इत्यादि पद्धती अनियत वाढत जातात: आणि $अ + \frac{ब}{क्ष}$, $अ + \frac{ब}{क्ष} + \frac{क}{क्ष^२}$, इत्यादि पद्धतींची नियतता अ आहे, हें स्पष्ट आहे. परंतु सामान्यतः पद्धतींच्या शोधाविषयीं सोपी रीति हीच आहे, कीं जेव्हां क्ष अनियत वाढत वाढत जातो, तेव्हां $\frac{१}{क्ष}$ अनियत घटत घटत जातो.

तर $वि = \frac{१}{क्ष}$ असें घे, म्हणून $क्ष = \frac{१}{वि}$: ही क्षची किंमत क्षचे जागीं मांड, आणि, जेव्हां वि अनियत घटत जात्ये, म्हणजे, जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो. तर ज्या रूपापासून या पद्धतीची नियतता स्पष्ट होईल असें रूप देतां येईल तर दे.

उदाहरण, अशी पक्षांत $\frac{क्ष+१}{३क्ष-२}$ याची नियतता काय आहे?

$$क्ष = \frac{१}{वि} \text{ असें घे, तर } \frac{\frac{१}{वि}+१}{\frac{३}{वि}-२} = \frac{\left(\frac{१}{वि}+१\right)वि}{\left(\frac{३}{वि}-२\right)वि} = \frac{१+वि}{३-२वि}$$

जेव्हां वि अनियत घटत जात्ये, तेव्हां वरचे पद्धतीची नियतता $\frac{१}{३}$ आहे.

आतां हे पुढील पक्ष शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावे, ते एथें संक्षेप रूपानें मांडिले आहेत.

$$जर\ क्ष = \infty \quad तर\ \frac{अक्ष^२ + बक्ष + क}{पक्ष + क} = \infty,\ \frac{अक्ष^२ + बक्ष + क}{पक्ष^२ + कक्ष + र} = \frac{अ}{प},$$

$$\frac{अक्ष^२ + बक्ष + क}{पक्ष^३ + कक्ष + र} = ०$$

४. **सिद्धांत.** जर १ पेक्षां अ अधिक असेल, तर अ, $अ^{२}$, $अ^{३}$, $अ^{४}$, इत्यादि, या श्रेणीचीं पदें अनियत वाढत जातात; अथवा संक्षेप रूपानें मांडिलीं असतां, $अ^{\infty} = \infty$

कांकीं $अ^{२} = अ + अ^{२} - अ = अ + अ(अ-१)$

अथवा अ यास $अ(अ-१)$ हें मिळविलें असतां अ हा $अ^{२}$ होतो.

त्यासारिखें $अ^{२}$ यास $अ^{२}(अ-१)$ हें मिळविलें असतां $अ^{२}$ हा $अ^{३}$ होतो.

. . . .

साधारणरूपानें $अ^{न}$ यास $अ^{न}(अ-१)$ हें मिळविलें असतां $अ^{न}$ हा $अ^{न+१}$ होतो.

परंतु १ पेक्षां अ अधिक आहे, तर अ−१ धन आहे, यामुळें $अ(अ-१)$ हा गणित रूपाचा वाढवा आहे. आणि अ पेक्षां $अ^{२}$ अधिक आहे; यामुळें $अ(अ-१)$ यापेक्षां $अ^{२}(अ-१)$ अधिक आहे, अथवा अचे पहिल्ये आणि दुसऱ्ये घाताचे अंतराहून दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घातांचें अंतर अधिक आहे. तसेंच दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचे अंतराहून तिसऱ्या आणि चवथ्या घातांचें अंतर अधिक आहे; आणि याप्रमाणें पुढें ही. परंतु जर अला हवे तितके वेळा एकच परिमाण वारंवार मिळविलें असतां, इच्छे प्रमाणें उत्तर हवें तेवढें मोठें केलें जाईल; आणि प्रतिवेळीं पूर्वीपेक्षां मोठें असें परिमाण तितक्याच वेळा अशीं मिळविलें असतां, उत्तर वरपेक्षां अधिक मोठें येईल. यामुळें हा सांगीतला सिद्धांत खरा आहे.

५. **सिद्धांत.** जर १ पेक्षां ब कमी असेल, तर ब, $ब^{२}$, $ब^{३}$, $ब^{४}$, इत्यादि या श्रेणीचीं पदें अनियत घटत जातात, अथवा संक्षेप रूपानें मांडिलीं असतां $ब^{\infty}=०$

$ब=\frac{१}{अ}$ असें घे, तर $ब^{न} = \frac{१}{अ^{न}}$. परंतु १ पेक्षां ब कमी आहे, यामुळें १ पेक्षां अ अथवा $\frac{१}{ब}$ अधिक आहे; यामुळें, ४ **सिद्धांत** प्रमाणें, हवा तेवढा $अ^{न}$ मोठा केला जाईल. यावरून, $\frac{१}{अ^{न}}$ अथवा $ब^{न}$ हवा तेवढा लहान केला जाईल.

$\frac{९}{१००}$ याचे सर्व घातांतून जो पहिला घात $\frac{१}{१००००००}$ यापेक्षां कमी आहे तो सांग.

उत्तर, षड्घात.

६. **सिद्धांत.** जर क्ष धन असून तो १ पेक्षां कमी असेल, तर या पुढील पदांची श्रेणी वाढत जाते, परंतु ती श्रेणी अनियत वाढत नाहीं, ह्मणजे

$(१+क्ष) \qquad (१+क्ष+क्ष^२) \qquad (१+क्ष+क्ष^२+क्ष^३)$ इत्यादि

या श्रेणीची नियतता $\frac{१}{१-क्ष}$ आहे; ह्मणजे वरचे पदांतून कोणतेंही पद किती ही घाताचें असलें, तरी $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे इतकें मोठें होऊं शकत नाहीं, परंतु इच्छे प्रमाणें हवें तेवढें त्याचे जवळ येत जाईल. हा सिद्धांत संक्षेप रीतीनें या पुढील प्रमाणें मांडितात:

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + - - - - - - + क्ष^{\infty}$$

हें साधारण रीतीनें या प्रमाणें मांडितात

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ \text{ इत्यादि } \textbf{अनंत पावेतों.}$$

पुढें जें सर्व सांगायाचें आहे त्याचा मुख्य पाया ही वरची श्रेणी आहे, या श्रेणीचे उत्पत्तीचे रीतीपासून ती प्रतिज्ञा स्थापितों. जेव्हां क्ष धन आहे, तेव्हां १, १+क्ष, १+क्ष+क्ष^२, इत्यादि, हीं पदें वाढत जातात हें स्पष्ट आहे असें वर सांगीतलें; आणि असें दिसतें, कीं प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदास क्षनें गुणून; त्यांत १ मिळविल्यानें उत्पन्न होतें. जसें १+क्ष+क्ष^२, हें पद १+क्ष (१+क्ष) याचे बरोबर आहे, आणि १+क्ष+क्ष^२+क्ष^३ हें पद १+क्ष(१+क्ष+क्ष^२) याचे बरोबर आहे, आणि या प्रमाणें पुढें ही. जर कोणतेंही पद दाखविण्यासाठीं **अ** आणि त्याचे पुढचें पद दाखविण्यासाठीं **ब** घेतला; तर

$$ब = १ + अ क्ष$$

आतां अ पेक्षां ब मोठा आहे, आणि क्ष हा १ पेक्षां कमी आहे, यामुळें, **अ** हा क्षनें गुणिला असतां जी न्यूनता पावतो त्या न्यूनते पेक्षां १ मिळविल्यानें अधिक वाढतो. परंतु अ क्ष=अ+अक्ष−अ=अ−(१−क्ष)अ; अथवा **अ** हा क्षनें गुणिला असतां (१−क्ष) **अ** इतक्यानें कमी होतो: परंतु त्या न्यूनतेपेक्षां त्यांत १ मिळविल्यानें अधिक वाढतो; ह्मणजे (१−क्ष) **अ** यापेक्षां १ अधिक मोठा आहे. या दोहोंस १−क्ष यांणीं भाग; तर दिसण्यांत ये-

ईल कीं अ पेक्षां $\frac{१}{१-क्ष}$ अधिक मोठा आहे. परंतु १, १+क्ष, १+क्ष+$क्ष^२$, इत्यादि श्रेणीच्चें कोणतें ही पद अ आहे; यामुळें श्रेणीचीं पदें, किती ही घेतलीं तरी त्यांतून प्रत्येक पद $\frac{१}{१-क्ष}$ पेक्षां कमी आहे.

जरी $\frac{१}{१-क्ष}$ याच्चे बरोबर, अ असत नाहीं, तथापि त्याच्चे हवा तेवढा बरोबरीच्चे जवळ केला जाईल, हें सिद्ध करायाच्चें राहिलें. स्मरणांत ठेवावें, कीं प्रत्येक पुढील पद याप्रमाणें उत्पन्न होतें, ह्मणजे **त्याच्चें पूर्वींच्चें पद क्ष याणें गुण आणि त्यांत १ मिळिव.** अ आणि $\frac{१}{१-क्ष}$ यांचें अंतर दाखवायासाठीं प घे; असा कीं

अ $= \frac{१}{१-क्ष}$ $-$ प आहे, तेव्हां पुढील पद हें आहे

१+अक्ष $=$ १ $+ \frac{क्ष}{१-क्ष} -$ पक्ष $= \frac{१-क्ष+क्ष}{१-क्ष} -$ पक्ष $= \frac{१}{१-क्ष} -$ पक्ष;

याच्चे पुढच्चें पद १ $+ \frac{क्ष}{१-क्ष} -$ $पक्ष^२$ अथवा $\frac{१}{१-क्ष} -$ $पक्ष^२$; याच्चें पुढच्चें पद $\frac{१}{१-क्ष} -$ $पक्ष^३$; आणि याप्रमाणें पुढें ही.

यावरून असें एक पद काढितां येईल, कीं तें $\frac{१}{१-क्ष}$ याहून $पक्ष^न$ इतक्या अंतरानें भिन्न होईल, जांत न हवा तेवढा मोठा होईल. परंतु प दिलेलें परिमाण आहे, आणि **५. सिद्धांताप्रमाणें** जसजसा न अनियत वाढत जातो, तसतसा $क्ष^न$ अनियत घटत जातो; यामुळें $पक्ष^न$ हवा तेवढा लहान केला जाईल, अथवा $\frac{१}{१-क्ष} -$ $पक्ष^न$ ही पद्धती $\frac{१}{१-क्ष}$ याच्चे हवी तेवढी जवळ जवळ केली जाईल. परंतु अ पासून मागलीं सर्व पदें घेतलीं, तरी $\frac{१}{१-क्ष}$ $-$$पक्ष^न$ हेंच येईल. यामुळें पदें हवीं तितकीं घेतल्यानें, $\frac{१}{१-क्ष}$ याच्चे हवें तेवढें जवळ आतां येईल.

१ $-$ क्ष $+$ $क्ष^२$ $-$ $क्ष^३$ $+$ $क्ष^४$ इत्यादि **अनंत पावेतों,**

या श्रेणीमध्यें १ पेक्षां क्ष कमी असला, तर या श्रेणीस नियतता आहे कीं काय, अथवा १, १ $-$ क्ष, १ $-$ क्ष $+$ $क्ष^२$, इत्यादि यांची वाढ आणि घट कशा तऱ्हेची होत्ये हें शोधितो. या श्रेणींत एक एक पदाच्चे अंतरानें पदें अधिक आणि उणी होत जातात असें दिसतें; तथापि त्यांचा हा क्रम सरळ रीतीनें चालतो.

पुढचें पद काढणें तर, त्याचे पूर्वीचें पद क्ष नें गुणून तो गुणाकार १ तून वजा कर. जसें,

$$१ - क्ष + क्ष^२ = १ - क्ष (१ - क्ष)$$

$$१ - क्ष + क्ष^२ - क्ष^३ = १ - क्ष (१ - क्ष + क्ष^२)$$ आणि याप्रमाणें पुढेंही.

अथवा जर, **अ** आणि **ब** हीं पदें एका पुढें एक असतील, तर

$$ब = १ - अ क्ष \text{ अथवा } १ + अ - अ (१ + क्ष)$$

ह्मणजे, $ब = अ + १ - अ (१ + क्ष)$

तेव्हां त्याचे पुढचें पद $क = ब + १ - ब (१ + क्ष)$ इत्यादि.

परंतु वरचीं तीन पदें एक एक पदाचे अंतरानें अधिक आणि उणीं होत जातात; ह्मणजे, **अ** पेक्षां **ब** मोठा आहे अशी कल्पना कर, तर **ब** पेक्षां **क** लहान आहे. अथवा **अ** (१ + क्ष) यापेक्षां १ मोठा आहे अशी कल्पना कर, तर **ब** (१ + क्ष) पेक्षां १ कमी आहे: अथवा **अ** पेक्षां $\frac{१}{१+क्ष}$ मोठा आहे, आणि **ब** पेक्षां $\frac{१}{१+क्ष}$ कमी आहे. अशा तऱ्हेनें श्रेणीचीं पदें उत्तरोत्तर $\frac{१}{१+क्ष}$ याहून उणीं आणि अधिक होत जातात.

तर याप्रमाणें होतें, १ हा $\frac{१}{१+क्ष}$ पेक्षां मोठा आहे

$१ - क्ष$ ही पद्धती $\frac{१}{१+क्ष}$ पेक्षां कमी आहे

$१ - क्ष + क्ष^२$ ही $\frac{१}{१+क्ष}$ पेक्षां मोठी आहे

इत्यादि.

आतां जसजसा न वाढवावा, तसतसा $क्ष^न$ अनियत घटत जातो, तर न एवढा मोठा घेतला जाईल, कीं एकापुढील एक अशीं दोन पदें, ह्मणजे

$$१ - क्ष + क्ष^२ - \text{ इत्यादि } \cdots\cdots\cdots\cdots \pm क्ष^{न-१}$$

$$\text{आणि } १ - क्ष + क्ष^२ - \text{ इत्यादि } \cdots\cdots\cdots\cdots \pm क्ष^{न-१} \mp क्ष^न$$

इच्छेप्रमाणें हवे तेवढे लहान परिमाणानें हीं सांगीतलीं दोन पदें भिन्न होतील, कांकीं **त्यांचें अंतर $\mp क्ष^न$ इतकें आहे.** परंतु आतां वर सिद्ध केलें, कीं या दोन पदांतून एक पद $\frac{१}{१+क्ष}$ यापेक्षां मोठें आहे आणि दुसरें $\frac{१}{१+क्ष}$

हवें तेवढें जवळ करितां येईल.

तर अशानें जा दोन श्रेणी उत्पन्न होतात, त्या याप्रमाणें आहेत:

$\frac{१}{१-क्ष} = १+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+$ इत्यादि **अनंत पावेतों.**

$\frac{१}{१+क्ष} = १-क्ष+क्ष^{२}-क्ष^{३}+$ इत्यादि **अनंत पावेतों.**

आणि $\frac{१}{१-क्ष}$ यास वरच्या पहिल्या अनंत श्रेणीचें **सर्वधन** ह्मणतात, ह्मणजे त्याचा अर्थ हाच, कीं १, क्ष, $क्ष^{२}$, $क्ष^{३}$, इत्यादि पदांची मेळवणी पाहिजे तेथपर्यंत करित गेलें असतां $\frac{१}{१-क्ष}$ ही नियतता आहे.

हा विषय पुढें आठव्या अध्यायामध्यें सांगितला जाईल.

७. **सिद्धांत.** जर अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद अनियत घटत जातात, तर त्या अपूर्णांकाची नियतता शून्य असेल, किंवा सांत, किंवा अनंत असेल: ह्मणजे, तो अपूर्णांक अनियत घटत असेल, किंवा त्याला सांत नियतता असेल, किंवा अनियत वाढत असेल. अंश आणि छेद हे दोन्ही अनियत घटत गेले, तरीं वरच्या तीन कल्पनांतून कोणती ही विरुद्ध नाहीं.

हे पुढील तीन अपूर्णांक घे

$$\frac{क्ष^{२}-अ^{२}}{(क्ष-अ)^{२}} \qquad \frac{क्ष^{२}-अ^{२}}{क्ष-अ} \qquad \frac{(क्ष-अ)^{२}}{क्ष^{२}-अ^{२}}$$

क्ष=अ आहे, अशा कल्पनेनें वरचे तीन अपूर्णांकांचें रूप $\frac{0}{0}$ आहे. अ इच्छा तेवढा क्षचे जवळ येतो, या कल्पनेनें अंश आणि छेद अनियत घटतील असें करितां येईल. याचें कारण हेंच आहे, कीं क्ष−अ ही प्रत्येक अंश आणि छेदांचे गुण्य किंवा गुणक आहे, आणि जसजसा अचे जवळ क्ष येत जातो, तसतशी क्ष−अ ही पद्धती अनियत घटत जात्ये. कांकीं वरचे तीन अपूर्णांक या पुढील प्रमाणें आहेत,

$$\frac{(क्ष-अ)(क्ष+अ)}{(क्ष-अ)(क्ष-अ)} \qquad \frac{(क्ष-अ)(क्ष+अ)}{क्ष-अ} \qquad \frac{(क्ष-अ)(क्ष-अ)}{(क्ष-अ)(क्ष+अ)}$$

प्रत्येक अपूर्णांकांचे अंश आणि छेद क्ष−अ यांणीं भाग, तर ते याप्रमाणें होतील

$$\frac{क्ष+अ}{क्ष-अ} \qquad क्ष+अ \qquad \frac{क्ष-अ}{क्ष+अ}$$

क्ष=अ असेल, याखेरीज हे प्रत्येक पूर्वींचे अपूर्णांकां बरोबर आहेत. याविषयीं **२६५ पृष्ठाप्रमाणें** सद्यः कांहीं गोष्ट सांगत नाहीं. परंतु जेव्हां अ-चेजवळ क्ष येतजातो, तेव्हां पहिल्ये अपूर्णांकाचें रूप याप्रमाणें होईल

$$\frac{\text{कोणतेंही परिमाण ज्याची नियतता २अ आहे}}{\text{कोणतेंही परिमाण जें अनियत घटत जातें,}}$$

आणि यामुळें तो अपूर्णांक अनियत वाढत जातो. दुसऱ्ये अपूर्णांकाचें रूप याप्रमाणें आहे,

कोणतेंही परिमाण ज्याची नियतता २अ आहे,

आणि यामुळें तो दुसरा अपूर्णांक २अचे जवळ अनियत येतजातो. तिसरा अपूर्णांक याप्रमाणें आहे,

$$\frac{\text{कोणतेंही परिमाण जें अनियत घटतजातें}}{\text{कोणतेंही परिमाण ज्याची नियतता २अ आहे,}}$$

आणि यामुळें तो तिसरा अपूर्णांक अनियत घटतजातो. यामुळें जेव्हां कोणत्येही अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद अनियत घटतजातात अशा पक्षीं पाहिलें, तर, त्या अपूर्णांकाची किंमत कोणीकडे कोठपर्यंत जाईल, याविषयीं अनुमान करवत नाहीं; परंतु तो अपूर्णांक अनियत घटत किंवा वाढत जातो, किंवा तो सांत नियततेकडे जातो, किंवा जात नाहीं, हें पहाण्यासाठीं तो अपूर्णांक तपासला पाहिजे.

८. सिद्धांत. ज्या अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद अनियत वाढतजातात; अथवा जो $\frac{\infty}{\infty}$ या रूपाजवळ येतजातो, त्यास वर सांगीतल्याप्रमाणें तपास-

$$ब = \frac{१}{अ}$$

आणि जर **अ** आणि **ब** अनियत वाढत जातात, तर $\frac{१}{अ}$ आणि $\frac{१}{ब}$ अनियत घटत जातात हें ही ठाऊक आहे. यामुळें ज्या गोष्टीनें $\frac{\infty}{\infty}$ या रूपाजवळ $\frac{अ}{ब}$ येत जातो, तशानेंच, परंतु दुसऱ्ये रूपानें. तोच अपूर्णांक $\frac{०}{०}$ या रूपाजवळ येतो. यावरून पूर्वींचा सिद्धांत एथें ही लागू होतो

९ **सिद्धांत.** कांहीं गुणाकार असेल, ज्याचें एक पद अनियत घटत जातें आणि दुसरें पद अनियत वाढत जातें, तर त्या गुणाकाराचे किमतीविषयीं वर सांगीतल्याप्रमाणें तपासून पाहिलें पाहिजे. $० \times \infty$ या रूपाजवळ येत जातो, असा **अब** एक गुणाकार असो: म्हणजे, ज्यांत **अ** अनियत घटत जातो, आणि **ब** अनियत वाढत जातो.

$$अब = \frac{अ}{\frac{१}{ब}}$$

हें आणि जर **ब** अनियत वाढत जातो, तर $\frac{१}{ब}$ अनियत घटत जातो हें ही ठाऊक आहे. यावरून, वरचे पक्षाप्रमाणें, **अब**, निराळ्ये रूपानें, $\frac{०}{०}$ या रूपाजवळ येत जातो.

यावरून दिसतें, कीं हीं पुढील तीन रूपें, म्हणजे

$$\frac{०}{०} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad ० \times \infty.$$

हीं परस्पर असा संबंध ठेवितात. कीं ज्या पद्धती पासून त्यांतील एक रूप निघतें त्याच पद्धतीपासून बाकीचीं दुसरीं रूपें निघतील.

आतां $अ^{०}$ हें रूप घेतों, यास **१६९ पृष्ठावर** केवळ निश्चितार्थ दाखविला आहे त्याप्रमाणें एथें घेत नाहीं, परंतु या पुढिलाचा दर्शक दाखविण्या विषयीं

घेतों ह्मणजे

जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो तेव्हां $अ^{क्ष}$ याचे नियततेचा दर्शक तेंरूपघेतें.

जर $क्ष = \frac{१}{य}$, तर जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां य अनियत वाढत जातो. य पूर्णांक असो, तर

$$अ^{क्ष} = अ^{\frac{१}{य}} = \sqrt[य]{अ}$$

पहिल्यानें, १ पेक्षां कमी अंकांचे सगळे घात १ पेक्षां कमी आहेत, यावरून जर १ पेक्षां अ मोठा असेल, तर त्याचीं सगळीं मूळें १ पेक्षां मोठीं आहेत. यापुढील प्रमाणें घे,

$$\sqrt[य]{अ} = १+वि \quad अथवा \quad अ = (१+वि)^{य}$$

आतां य इतका मोठा घेतला जाईल, कीं कसा ही लहान अपूर्णांक मनांत आणिला तरी त्यापेक्षां वि लहान होईल. जर असें नाहीं, तर क यापेक्षां वि लहान होण्याकरितां य एवढा मोठा होण्यास अशक्य आहे, असें ह्मण. तर यची कशी ही किंमत असेल, तरी क पेक्षां वि सर्वदां मोठी आहे, यामुळें १+क यापेक्षां १+वि सर्वदा मोठी आहे. परंतु ४ **सिद्धांताप्रमाणें**, य एवढा मोठा घेतला जाईल, कीं $(१+क)^{य}$ ही, कसें ही मोठें परिमाण मनांत घेतल्यापेक्षां मोठी होईल, आणि यामुळें ती अ पेक्षां मोठी होईल. वर समजलें, **कीं क पेक्षां वि मोठी आहे**, तर अ पेक्षां ही $(१+वि)^{य}$ मोठी आहे. परंतु $(१+वि)^{य}$ ही अचे **बरोबर** आहे: तर ही एथें विरुद्ध गोष्ट आहे. यामुळें, कोणत्याही सांगितले क अपूर्णांकापेक्षां वि लहान केली जात नाहीं, अशी कल्पना खरी नाहीं: ह्मणजे, कोणत्याही सांगीतल्या अपूर्णांकापेक्षां वि लहान केली जाईल, अथवा १+वि हवी तेवढी १ याजवळ केली जाईल. परंतु $१+वि = \sqrt[य]{अ}$, यामुळें, जर य अनियत वाढत जातो, तर असें दिसतें, कीं

$\sqrt[य]{अ}$ अथवा $अ^{\frac{१}{य}}$ अथवा $अ^{क्ष}$ याची नियतता १ आहे.

अथवा $अ^{०} = १$. एथे ० हे **२६५ वे पृष्ठावरचे** अर्थाचें आहे.

दुसऱ्यानें, १ पेक्षां अ लहान असो, यावरून १ पेक्षां $\frac{१}{अ}$ मोठा आहे, तरी

[illegible]

जर क्ष अनियत वाढत जाईल, तर जा पदांमध्यें क्षचा अतिमोठा घात आहे, त्या पदांत सर्व दुसऱ्या पदांची बेरीज अनियत वेळा जाईल. ह्मणजे,

$$\text{अक्ष}^3+\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ}$$

या पद्धतीमध्यें जर अ हें कसेंही लहान दिलेलें परिमाण असेल, आणि ब, क, आणि इ, हीं कशींही मोठीं दिलेलीं परिमाणें असतील, तथापि क्ष एवढा मोठा घेतला जाईल, कीं अक्ष^3 यामध्यें $\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ}$ ही सर्व पद्धती हव्या तितक्या वेळा जाईल.

अक्ष^3 यामध्यें $\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ}$ ही जितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग जात्ये, तें या पुढील अपूर्णांक रूपानें दाखविलें जातें,

$$\frac{\text{अक्ष}^3}{\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ}}\ \text{अथवा}\ \frac{\text{अक्ष}^3\div\text{क्ष}^2}{(\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ})\div\text{क्ष}^2}\ \text{अथवा}\ \frac{\text{अक्ष}}{\text{ब}+\frac{\text{क}}{\text{क्ष}}+\frac{\text{इ}}{\text{क्ष}^2}}$$

$\frac{\text{क}}{\text{क्ष}}+\frac{\text{इ}}{\text{क्ष}^2}=\text{प}$ घे. तेव्हां, क्ष अनियत वाढविल्यानें प अनियत घटत जातो, आणि क्ष हवा तेवढा मोठा घेतला, तर १ पेक्षां प लहान होईल. ह्मणजे, अक्ष^3 यामध्यें $\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ}$ ही $\frac{\text{अक्ष}}{\text{ब}+\text{प}}$ इतक्या वेळा किंवा $\frac{\text{अ}}{\text{ब}+1}$ यापेक्षां अधिक वेळा जात्ये: परंतु, जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो, तेव्हां $\frac{\text{अक्ष}}{\text{ब}+1}$ अथवा $\frac{\text{अ}}{\text{ब}+1}\times\text{क्ष}$ हा गुणाकार अनियत वाढत जातो. तर, अक्ष^3 यामध्यें $\text{बक्ष}^2+\text{कक्ष}+\text{इ}$ त्या पद्धतीच्या जाण्याच्या वेळा वरच्या सारिख्याच अनियत वाढत जातात.

उदाहरण. क्ष^3 याच्या दशलक्षांशामध्यें, $1000\text{क्ष}^2+500\text{क्ष}+1000$ ही

---

* या शब्दाचे अर्थाविषयीं पुढील अध्यायाचा आरंभ पहा. या शब्दास इंग्रेजी भाषेत इन्‌टिग्राल ह्मणतात.

एक लक्ष वेळा पेक्षां अधिक वेळा जावी असा संकेत असेल, तर क्ष केवढा मोठा असावा ?

$$\frac{\text{क्ष}^{३}\ \text{याचा दशलक्षांश}}{१०००\,\text{क्ष}^{२}+५००\,\text{क्ष}+१०००}=\frac{\text{क्षचा दशलक्षांश}}{१०००+\frac{५००}{\text{क्ष}}+\frac{१०००}{\text{क्ष}^{२}}}$$

आतां, जर क्ष हा १००० याचे बरोबर किंवा यापेक्षां अधिक असेल, तर $\frac{५००}{\text{क्ष}}+\frac{१०००}{\text{क्ष}^{२}}$ ही बेरीज १ पेक्षां लहान आहे. यामुळें, या पक्षांत वरचा अपूर्णांक क्ष÷१००१ याचा दशलक्षांशापेक्षां अधिक आहे, अथवा या पुढील पेक्षां

$$\frac{\text{क्ष}}{१००१०००००००}$$

जर क्ष=१००१००००००० × १००००० अथवा १००१०००००००००००० असा घेतला, तर वरचा अपूर्णांक १००००० याचे बरोबर होईल. यावरून, $(१०००\,\text{क्ष}^{२}+५००\,\text{क्ष}+१०००)$ यांचा १००००० वेळा पेक्षां $\text{क्ष}^{३}$ याचा दशलक्षांश मोठा आहे. ही क्षची अति लहान किंमत आहे, जिणें करून कृत्याचे संकेत स्थापिले जातील, हें निश्चित सांगत नाहीं, परंतु असें म्हणवेल, कीं ही किंवा यापेक्षां कांहीं मोठी किंमत कृत्याचे संकेत स्थापील.

११ **सिद्धांत.** क्षविषयींचा कोणत्याही अकरणी पूर्णरूप पद्धतीमध्यें, जर क्ष अनियत घटत जाईल, तर जा पदामध्यें क्षचा अति लहान घात आहे, त्या पदांत पद्धतीचीं सर्व दुसरीं पदें हव्या तितक्या वेळा जातील. उदाहरण, $\frac{१}{१०००}\,\text{क्ष}+१०००\,\text{क्ष}^{२}+१००\,\text{क्ष}^{३}$ यांत क्ष इतका लहान घेतला जाईल, कीं $\frac{१}{१०००}\,\text{क्ष}$ यांत $१०००\,\text{क्ष}^{२}+१००\,\text{क्ष}^{३}$ ही पद्धती इच्छेप्रमाणें हव्या तेवढ्या वेळा जाईल: अथवा $\text{अ}\text{क्ष}^{३}+\text{ब}\text{क्ष}^{२}+\text{क}\text{क्ष}+\text{इ}$, यांत क्ष एवढा लहान घेतला जाईल, कीं इ अथवा $\text{इ}\text{क्ष}^{०}$, हें पद जामध्यें क्षचा अति लहान घात* आहे, यांत

---

* क्ष याचे पूर्ण घाताविषयीं बीजगणित श्रेणीचीं पदें याप्रमाणें आहेत

$$\cdots\ \text{क्ष}^{-३},\ \text{क्ष}^{-२},\ \text{क्ष}^{-१},\ \text{क्ष}^{०},\ \text{क्ष}^{१},\ \text{क्ष}^{२},\ \text{क्ष}^{३},\ \cdots$$

वरचे बरोबरीचीं पदें हींच आहेत

$$\frac{१}{\text{क्ष}^{३}},\ \frac{१}{\text{क्ष}^{२}},\ \frac{१}{\text{क्ष}},\ १,\ \text{क्ष},\ \text{क्ष}^{२},\ \text{क्ष}^{३}\ \cdots\cdots$$ १७० आणि १७१ पृष्ठ पहा.

अक्ष^{३}+बक्ष^{२}+कक्ष ही हव्या तेवढ्या वेळा जाईल. या विशेष पक्षांत ही गोष्ट स्पष्ट आहे, कांकीं क्ष कसाही अनियत घटत जातो, आणि अक्ष^{३}+बक्ष^{२}+कक्ष ही पद्धती अनियत घटत जात्ये, तेव्हां ड, तशीच रहात्ये. यामुळें ड चा कसाही अपूर्णांक दिला असेल, तरी अक्ष^{३}+बक्ष^{२}+कक्ष त्यापेक्षां कमी होऊं शकेल. आतां क्ष^{२} यापेक्षां क्षच्या लहान घात नसेल अशी पद्धती घे, जसें अक्ष^{३}+बक्ष^{२}+कक्ष. यांत क्ष एवढा लहान घेतला जाईल, कीं कक्ष यांत अक्ष^{३}+बक्ष^{२} ही इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा जाईल. कांकीं कक्ष यांत अक्ष^{३}+बक्ष^{२} ही इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा किंवा वेळेचे भाग जाईल तें या पुढील प्रमाणें दाखविलें जाईल

$$\frac{\text{कक्ष}}{\text{अक्ष}^{३}+\text{बक्ष}^{२}} \text{ अथवा } \frac{\text{क}}{\text{अक्ष}^{२}+\text{बक्ष}} = \frac{\text{कोणतेंही नियत परिमाण}}{\text{परिमाण जें अनियत घटत जातें}}$$

जेव्हां क्ष अनियत कमी करावा, तेव्हां ही पद्धती अनियत वाढत जात्ये.

यावरून हें निघतें, कीं जेव्हां क्ष अनियत वाढत जातो, तेव्हां क्ष^{२}, क्ष^{३}, क्ष^{४}, इत्यादि ही अनियत वाढत जातात इतकेंच नाहीं, परंतु **प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाहून अनियत वाढत जातें**; ह्मणजे अर्थ हाच, कीं क्ष^{२}, पेक्षां क्ष^{३} हा इतका अधिक लौकर वाढत जातो, कीं शेवटीं क्ष^{३} यांत क्ष^{२} हा इच्छेप्रमाणें हव्या तितक्या वेळा जाईल. तसेंच, जेव्हां क्ष अनियत घटत जातो, तेव्हां असें दिसतें, कीं क्ष^{२}, क्ष^{३}, क्ष^{४}, इत्यादि ही अनियत घटत जातात इतकेंच नाहीं; परंतु **प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाहून अनियत घटत जातें**; ह्मणजे अर्थ हाच, कीं क्ष^{२} पेक्षां क्ष^{३} हा इतका अधिक लौकर घटत जातो, कीं शेवटीं क्ष^{३} हा इच्छेप्रमाणें क्ष^{२} याचे हवे तेवढे लहान अपूर्णांकाचे बरोबर होईल. वरच्या कल्पना या पुढील प्रमाणें संक्षेपरूपानें सांगितल्या जातात, त्या **संक्षेपरूपानें** मात्र समजतात परंतु केवळ सरळ रीतीनें समजांत येण्याजोग्या नाहींत.

संक्षेप बोलणें.	**खरा अर्थ.**
१. दोन अनंत मोठे परिमाणांतून,	१ दोन अनियत वाढणाऱ्ये परि-

एक परिमाण दुसऱ्याहून अनंत मोठें असेल.

२. दोन अनंत लहान परिमाणांतून एक परिमाण दुसऱ्याहून अनंत लहान असेल.

माणांतून, एक दुसऱ्याहून इतकें लौकर वाढत जाईल, कीं केवळ बोलण्याप्रमाणें तें अनियत वाढत जातें इतकेंच नाहीं, परंतु त्यांत जितके वेळा दुसरें परिमाण जाईल, त्या वेळांची संख्या ही अनियत वाढत जाते.

२. अनियत घटत जातात अशीं दोन परिमाणें असतील, तर त्यांतून एक दुसऱ्याहून इतकें लवकर घटत जाईल, कीं केवळ बोलण्या प्रमाणें तें अनियत घटत जातें इतकेंच नाहीं, परंतु दुसऱ्या परिमाणाच्या अपूर्णांकाविषयीं ही तें अनियत घटत जातें.

आतां हें पुढील कृत्य शिकणारानें समजावून दाखवावें

क

ब अ क

ड

जर अ आणि ब हे कड रेषेकडे गमन करितात, आणि जर अ असा चालतो कीं जेव्हां बक हा $\frac{१}{२}$ इंच आहे, तेव्हां अक हा $\frac{१}{४}$ इंच असतो; आणि जेव्हां बक हा $\frac{१}{३}$ इंच आहे, तेव्हां अक हा $\frac{१}{९}$ इंच असतो; अथवा क्ष इंच आहेत तेव्हां अक हा क्ष^{२} इंच असतो.

आणि क कडे अ जात असतां जर या आकृतीवर स्थूलदर्शक यंत्र मांडलें, जा-
णी स्थूल करण्याची शक्ति वाढत जाल्ये, ती अशा रीतीनें कीं स्थूल करण्याचे
शक्तीची वाढ. आणि अक रेघचें खरें कमी होणें हीं दोन्हीं बरोबर असतील;
ह्मणजे अक रेघ नेहेमी सारिख्येच लांबीची दृष्टीस पडेल; तेव्हां ब हा क कडे
गमन करितो असें दृष्टीस पडणार नाहीं परंतु क पासून दूर दूर होत जातो अ-
सें दृष्टीस पडेल.

सातवा अध्याय.

बीजगणितानुरूप पद्धती आणि त्यांचीं निष्पन्नें यांचे प्रतवार रचनेविषयीं.भागाकाराची रीति.

या विषयाचा विचार करण्याचे पूर्वीं, जा पद्धती आल्या त्यांची प्रतवार रचना करितों. जे शब्द कामांत आणितात ते बहुत करून कांहीं एक विशेष अक्षराचे संबंधाचे असतात; आणि जें पुढें येईल त्यांत तें विशेष अक्षर क्ष घेतलें आहे. या पुढील कोष्टकाचा अर्थ आतां दाखवितों.

फङ्शनें.

- साधारण बीजगणितानुरूप
  - अकरणी.
    - पूर्णरूप.
      - एकाकी,
      - द्वियुक्,
      - त्रियुक्,
      - चतुर्युक्,
      - इत्यादि.
    - अपूर्णरूप.
  - करणी.
    - पूर्णरूप.
      - एकाकी,
      - द्वियुक्,
      - त्रियुक्,
      - चतुर्युक्,
      - इत्यादि.
    - अपूर्णरूप.
- असाधारण बीजगणितानुरूप.
  - घातमूळप्रकाशकरूप,
  - लाग्रतमिक्,
  - सुलटवर्तूळिरूप,
  - उलटवर्तूळिरूप,
  - इत्यादि.

जा पद्धतीमध्यें कशीही तऱ्हेनें क्ष युक्त असतो, त्या पद्धतीस क्षचें **फङ्शन** ह्मणतात: असें, अ+क्ष, अ+बक्ष^{२}, इत्यादि त्या पद्धती क्षचीं फङ्शनें आहेत, त्या पद्धती अ आणि ब या अक्षरांचीं ही फङ्शनें आहेत, परंतु त्या पद्धती क्षविषयींचीं मात्र फङ्शनें आहेत असा विचार केला जाईल. या पुस्तकाचे पूर्वील भागांत जा पद्धतींचा विचार झाला, तशी जातीचा पद्धतींची संख्या जा पद्धतींत **सांत** आहे, अशा सर्व पद्धतींस **साधारण बीजगणितानुरूप** फङ्शनें ह्मणतात, परंतु जांत क्ष घातमूळप्रकाशकरूप असतो त्यांस ह्मणत नाहीं. ह्मणजे, असें $\sqrt{अ+क्ष^{२}}$, अक्ष^{३}+ब, इत्यादि हीं साधारण बीजगणितानुरूप फङ्शनें आहेत. परंतु अ$^{क्ष}$ हें बीजानुरूप फङ्शन नाहीं. आणि **२७० पृष्ठा** प्रमाणें, १+क्ष+क्ष^{२}+ इत्यादि **अनंत पावेतों** ही श्रेणी आणि १÷(१−क्ष) हा भागाकार हीं दोन्हीं एकच आहेत हें सिद्ध होई पावेतों हीवरची श्रेणी क्षचें साधारण बीजगणितानुरूप फङ्शन आहे किं नाहीं हें जाणवत नाहीं. क्षचे दुसऱ्ये सगळे फङ्शनास **असाधारण बीजगणितानुरूप** फङ्शनें ह्मणतात. असें अ$^{क्ष}$ आणि जांत असें पद येतें तीं सगळीं फङ्शनें त्यासारिखीं होतील; पुढें जेव्हां सांगण्याचा समय येईल, तेव्हां क्षचे लाग्रतम, आणि त्रिकोणमितीमध्यें क्षची सैन आणि कोसैन, आणि अनेक अशीं दुसरीं तऱ्हेचीं फङ्शनें येतील, त्यांस ही असाधारण बीजगणितानुरूप फङ्शनें ह्मणतात. जा फङ्शनामध्यें अ$^{क्ष}$ येतो, त्यास क्षचें **घातमूळप्रकाशकरूप** फङ्शन ह्मणतात. जा फङ्शनामध्यें लाग्रतम येतें त्यास लाग्रतमिक फङ्शन ह्मणतात इत्यादि.

साधारण बीजगणितानुरूप फङ्शनामध्यें दोन जाती आहेत, त्यांतून एकास **अकरणी** ह्मणतात, ह्मणजे त्यांत क्षचे केवळ पूर्णघात येतात, असें अ+क्ष^{२}, अक्ष$^{-२}$+ब, इत्यादि; आणि दुसऱ्यास **करणी** ह्मणतात, ह्मणजे त्यांत क्षचीं मूळें किंवा क्षचे अपूर्णघात येतात, असें अक्ष$^{\frac{१}{२}}$+ब, $\sqrt{अ+क्ष^{२}}$, इत्यादि.

दुसरें **अपूर्णरूप**, जांत क्ष छेदांचे स्थळीं येतो, जसें

$$\frac{\text{अ+क्ष}}{\text{बक्ष+क्ष}^{3}} \text{ आणि } \frac{\sqrt{\text{क्ष}}-\sqrt{\text{य}}}{\text{क}+\sqrt[3]{\text{क्ष}}}$$

पूर्णरूप फङ्शनामध्यें हे पुढील भाग आहेत; पहिला, **एकाकी पदें**, जांत क्षचा केवळ एक घात येतो, जसें क्ष^{3}, अक्ष^{3}, $\sqrt{\text{बक्ष}}$, $(\text{अ+ब})\text{क्ष}^{4}$; दुसरा, **द्वियुक्पदें**, यांत क्षचे दोन निरनिराळे घात येतात. आणि त्यांत क्ष^{0} ही येतो, जसें अ+बक्ष अथवा अक्ष^{0}+बक्ष, $\text{कक्ष}^{3}+\sqrt{\text{क्ष}}$, $\text{मक्ष}^{3}+\text{नक्ष}^{3}$, इत्यादि; तिसरा, **त्रियुक्पदें**, जांत क्षचे तीन निरनिराळे घात येतात; **चतुर्युक्पदें**, जांत क्षचे चार निरनिराळे घात येतात, इत्यादि. त्रियुक् आणि चतुर्युक् पदें हे शब्द फार थोडके कामांत आणितात: एकाकी पदाचे पुढल्या सगळ्या पदांस बहुतकरून **बहुयुक्पदें** ह्मणतात.

पूर्णरूप आणि अकरणी फङ्शनांत जसा अतिमोठा घात असेल, त्या प्रमाणें त्यांचे पहिल्या, दुसऱ्या, तिसऱ्या, इत्यादि वर्गांचीं फङ्शनें असे विभाग केले असतात. जसें

अ+बक्ष, ही पद्धती क्षची पहिल्ये वर्गाची अकरणी पूर्णरूप फङ्शन आहे.

अ+बक्ष+कक्ष^{3}, ही क्षची दुसऱ्या वर्गाची अकरणी पूर्णरूप फङ्शन आहे.

इत्यादि

अ हें पद, जर अक्ष^{0} या प्रमाणें मांडिलें, तर तें क्षविषयीं कांहीं **वर्गाचें नाहीं**.

पुढील पद्धती, $\frac{\text{अ}+\sqrt{\text{ब}}\text{ लाग· क+अेक}^{\text{क्ष}}}{\text{म}+\sqrt{\text{न}}}$

अ विषयीं अकरणी पूर्णरूप त्रियुग्मद फड्शान आहे.

म विषयीं अकरणी अपूर्णरूप फड्शान आहे.

ब विषयीं करणी पूर्णरूपाचें फड्शान आहे.

न विषयीं करणी अपूर्णरूपाचें फड्शान आहे.

क्ष विषयीं घात मूळ प्रकाशक रूपाचें फड्शान आहे.

क विषयीं लाग्रतमिक फड्शान आहे

अकरणी आणि पूर्णरूपाचीं फड्शानें यांची रचना बहुत करून अशी करितात, कीं क्षचे घात डाव्येकडून उजवेकडे चढत जातील किंवा उतरत जातील. असें. अक्ष + ब − कक्षे ही पद्धती या रीतीनें कधींही मांडीत नाहीं, परंतु या पुढील दोन रीतींतून एकी प्रमाणें मांडितात

− कक्षे + अक्ष + ब अथवा ब + अक्ष − कक्षे

पहिल्ये पक्षांत क्षचे उतरत्ये घातानें रचली, आणि दुसऱ्ये पक्षीं क्षचे चढत्ये घातानें रचली असें ह्मणतात.

तर अ − बक्षे + कक्ष − क्षौ − क्षे ही

याप्रमाणें रचिली पाहिजे अ + कक्ष − (ब + १) क्षे − क्षौ

अथवा − क्षौ − (ब + १) क्षे + कक्ष + अ

अकरणी आणि पूर्णरूपाचे फड्शानात दुसरी तशीं फड्शानें येतात, परंतु त्यांमध्यें पदांची संख्या अनंत असल्ये यावरून तीं बीजगणितानुरूप किंवा असाधारण फड्शानें आहेत असें आणवत नाहीं, ह्मणून अशीं फड्शानें दुसऱ्या सर्व फड्शानांपेक्षां फार उपयोगी आहेत. तीं फड्शानें या पुढील रूपाचीं असतात

अ + बक्ष + कक्षे + ... + $पक्ष^{न-१}$ + $कक्ष^{न}$

यांत अ, ब, आणि क. हीं क्षचीं फड्शानें नाहींत. आणि न पूर्णांक आहे;

अ + बक्ष + कक्षे + इक्षे + ... + इत्यादि अनंत पावेतों.

पद्धतींस अशा जातीचें रूप देणें हा या विषयाचा एक मुख्य प्रकार आहे.

वरचे दोन पद्धतींतून पहिलीला **बहुयुक्पद** असें नाव दिलें जाईल, दुसरीला **अनंत श्रेणी** असें नाव दिलें जाईल.

व्याख्यानें. बहुयुक्पदांचे गुणाकारांस, कृती करितानां जे वेगळाले गुणाकार उत्पन्न होतात, त्यांस **पोटचे गुणाकार** असें नाव दिलें जाईल. असें $अ+क्ष$ यास $ब+क्ष$ याणें गुणिलें, तर अब, अक्ष, बक्ष, आणि $क्ष^{२}$, हे पोटचे गुणाकार आहेत. जांत क्षचा कोणताही घात येतो, तें सर्व मिळून बहुयुक्पदाचें **पद** आहे; जसें, वरचा $अ + अक्ष + बक्ष + क्ष^{२}$ हा गुणाकार चार पदांचा आहे असें ह्मणत नाहीं, परंतु तो तीन पदांचा आहे. ह्मणजे अब, $(अ+ब)क्ष$ आणि $क्ष^{२}$.

सिद्धांत. दोन बहुयुक्पदांचे गुणाकारामध्यें, खरे पोटचे गुणाकार अशीं कनिष्टपक्षीं दोन पदें तरी असलीं पाहिजेत, परंतु तीं दोन किंवा अधिक अशा पोटच्या गुणाकारानीं झालेलीं अशीं नसावीं.

मनांत आणकीं $अक्ष+बक्ष^{२}+कक्ष^{३}$ आणि $पक्ष^{२}+क्कक्ष^{३}$ या दोहोंचा परस्पर गुणाकार करायाचा आहे. तर स्पष्ट आहे कीं $कक्ष^{३}\times क्कक्ष^{३}$, अथवा $कक्कक्ष^{६}$ यांत जो क्षचा घात येतो, त्याचे बरोबर मोठा घात दुसऱ्ये कोणत्याही पोटचे गुणाकारांत येत नाहीं, आणि $अक्ष\times पक्ष^{२}$, अथवा $अपक्ष^{३}$ यांत जो क्षचा घात येतो, त्याचे बरोबर लहान घात दुसऱ्ये कोणत्येही पोटचे गुणाकारांत येत नाहीं, कांकीं, या पदांमध्यें घातप्रकाशक चिन्हें अधिक मोठीं किंवा अति लहान आहेत. यामुळें हीं दोन पदें पोटचे गुणाकारांत असावीं, खरें ह्मटलें तर गुणाकार याप्रमाणें आहे,

$$अपक्ष^{३}+(अक्क+बप)क्ष^{४}+(बक्क+कप)क्ष^{५}+कक्कक्ष^{६}$$

यांत चार पदें आहेत, त्यांतून दोन पदें वर सांगीतलें केवळ पोटचे गुणाकार आहेत.

बीजगणितांतील आणि अंकगणितांतील भागाकारामध्यें भेद हाच आहे, कीं अंकगणितांतील भागाकारामध्यें कोणताही पूर्णांक क्क भलत्या

कांहीं वेळा घेतला असतां, भलता कांहीं पूर्णांक प होईल कीं काय, हा निर्णय करायाचा आहे; बीजगणितामध्यें कोणतेंही बहुयुक्पद क दुसऱ्या कोणत्याही बहुयुक्पदानें गुणिल्यानें, क्षचें बहुयुक् फङ्क्शन, प केलें जाईल कीं काय, हा शोध करायाचा आहे. उदाहरण, $८क्ष^{३}+१$ यास $२क्ष+१$ यानें भागायाचें, या पुढील प्रमाणें आहे: ह्मणजे, शक्य असेल तर $\frac{८क्ष^{३}+१}{२क्ष+१}$ यास सरळ बहुयुक्पदाचें रूप द्यावें. हा प्रश्न करण्याची रीति दुसऱ्ये सर्व प्रश्नांस लागू पडेल.

$२क्ष+१$ यांस $अ+बक्ष+कक्ष^{२}+ड्क्ष^{३}+$ इत्यादि यांणीं गुणून, शक्य असेल तर $८क्ष^{३}+१$ ही पद्धती उत्पन्न होत्ये असें मनांत आण. आतां, पहिल्यानें, $अ+बक्ष+कक्ष^{२}+ड्क्ष^{३}+$ इत्यादि ही पद्धती $कक्ष^{२}$ याचे वर जाऊं शकत नाहीं; कांकीं, जर ती त्या पदाचे वर जात्ये, तर $ड्क्ष^{३}$ पावेतों जाईल असें मनांत आण. ह्मणून मागल्ये सिद्धांता प्रमाणें, $ड्क्ष^{३}\times२क्ष$ अथवा $२ड्क्ष^{४}$ असें पद गुणाकारांत असावें. परंतु सांगीतला गुणाकार $८क्ष^{३}+१$ आहे, यांत $क्ष^{४}$ दिसत नाहीं; यामुळें, $ड्क्ष^{३}$ आणि त्यापेक्षां मोठा घात इच्छिल्ये बहुयुक् पदांमध्यें नाहीं यामुळें, इच्छिलें बहुयुक्पद या रूपाचें आहे.

$अ+बक्ष+कक्ष^{२}$. जर वर सांगीतला प्रश्न शक्य असेल, तर याप्रमाणें होईल

$$८क्ष^{३}+१ = (२क्ष+१)(कक्ष^{२}+बक्ष+अ)$$

$२क्ष\times कक्ष^{२}$ हें वरचा गुणाकाराचें पद असावें असें सिद्ध केलें; परंतु तें पद $८क्ष^{३}$च असावें, यामुळें $२क्ष\times कक्ष^{२}=८क्ष^{३}$, अथवा $कक्ष^{२}=८क्ष^{३}\div२क्ष=४क्ष^{२}$.

यामुळें, $$८क्ष^{३}+१ = (२क्ष+१)(४क्ष^{२}+बक्ष+अ)$$
$$= (२क्ष+१)४क्ष^{२}+(२क्ष+१)(बक्ष+अ)$$

$$८क्ष^{३}+१-(२क्ष+१)४क्ष^{२} \text{ अथवा } -४क्ष^{२}+१ = (२क्ष+१)(बक्ष+अ)$$

$२क्ष\times बक्ष$ हें वरचा दुसऱ्या गुणाकाराचें पद असावें; परंतु तें $-४क्ष^{२}$ मात्र येतें,

यामुळें $$बक्ष = -४क्ष^{२}\div२क्ष = -२क्ष \text{ अथवा}$$

$$-४क्ष^{२}+१=(२क्ष+१)(-२क्ष+अ)$$

$$=-२क्ष(२क्ष+१)+(२क्ष+१)अ$$

$$-४क्ष^{२}+१+२क्ष(२क्ष+१)\text{ अथवा }(२क्ष+१)=(२क्ष+१)अ$$

अ=१ असें केलें असतां वरचें समीकरण एकरूप केलें जातें; यामुळें, $४क्ष^{२}-२क्ष+१$ हें इच्छिलें बहुयुक्पद आहे, जाणें $२क्ष+१$ गुणिलें असतां, गुणाकार $८क्ष^{३}+१$ होतो: हें खरें आहे असें कृती केल्यानें दिसेल.

वरचा कृतीची रचना अंकगणितांतील भागाकाराप्रमाणें केली जाईल; परंतु त्यांत इतका मात्र भेद आहे, कीं भाज्य आणि भाजकाचे डाव्येकडील अंक तपासून, भागाकारांत नवें पद काढायाचें याचे जागीं, याप्रमाणें काढिलें जातें, ह्मणजे, भाज्याचे किंवा वजाबाकीचे डाव्येकडील पद भाजकानें भागून. भागाकारांत नवें पद होतें. जसें या पुढील प्रमाणें, जांत एकच प्रश्न दोन निरनिराळ्ये रचनेनें उलगडला आहे.

$२क्ष+१)\ ८क्ष^{३}+१\ (४क्ष^{२}-२क्ष+१$

$८क्ष^{३}+४क्ष^{२}$

$-४क्ष^{२}+१$

$-४क्ष^{२}-२क्ष$

$+२क्ष+१$

$२क्ष+१$

०

$१+२क्ष)\ १+८क्ष^{३}\ (१-२क्ष+४क्ष^{२}$

$१+२क्ष$

$-२क्ष+८क्ष^{३}$

$-२क्ष-४क्ष^{२}$

$४क्ष^{२}+८क्ष^{३}$

$४क्ष^{२}+८क्ष^{३}$

०

क्ष चे चढते किंवा उतरते घातांप्रमाणें पदांची रचना संभाळून मांडिली पाहिजे. या कृतीची साधारण रीति या पुढील प्रमाणें आहे:

पहिल्यानें, स्पष्ट आहे कीं अकरणी बहुयुक्पदांची बेरीज, वजाबाकी, आणि गुणाकार हीं अकरणी बहुयुक्पदें आहेत. दोन अकरणी बहुयुक्पदें दाखवायासाठीं प आणि क घे, यांपासून वि काढायाची इच्छा आहे अशा तऱ्हेनें, कीं प = कवि असें होईल. यांत प भाज्य आहे, क भाजक

आहे, आणि जो भागाकार काढायाचा आहे तो वि आहे. सोयीप्रमाणें कोणतेंही बहुयुक् किंवा एकाकी पद दाखविण्यासाठीं अ घे, त्यास क नें गुण, आणि तो गुणाकार प तून वजा कर, ह्मणजे असें करून प−अक होईल. या पद्धतीस र ह्मण, यावरून

$$\text{प} - \text{अ}\text{क} = \text{र} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (१)$$

कोणतेंही दुसरें बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं अ′ घे; नंतर प च्या जागीं र मांडून त्याशीं आणि क शीं वरची कृती पुनः कर. त्याचें उत्तर दाखविण्यासाठीं र′ घे. तर

$$\text{र} - \text{अ}'\text{क} = \text{र}' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

कोणतेंही तिसरें बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं अ″ घे, तर

$$\text{र}' - \text{अ}''\text{क} = \text{र}'' \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (३)$$

कृतीचे प्रत्येक क्रमांत वजाबाकीला सोपें रूप द्यावें, असें कीं शेवटीं त्या वजाबाकीचें असें रूप व्हावें, कीं त्यावरून या पुढील दोन गोष्टींतून एक तरी लक्षांत यावी; ह्मणजे पुढील बाकी ० होण्यास नवें बहुयुक्पद कसें काढावें, अथवा असें बहुयुक्पद काढण्यास अशक्य आहे. ज्याचा योगानें वजाबाकी ० होईल, असें अ‴ नवें बहुयुक्पद किंवा एकाकी पद काढितां येतें, अशी पहिल्यानें कल्पना कर. तर

$$\text{र}'' - \text{अ}'''\text{क} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (४)$$

तर, वरचे वेगळाले समीकरणांपासून, याप्रमाणें होतें

$$\text{प} = \text{अ}\text{क} + \text{र} = \text{अ}\text{क} + \text{अ}'\text{क} + \text{र}' = \text{अ}\text{क} + \text{अ}'\text{क} + \text{अ}''\text{क} + \text{र}''$$
$$= \text{अ}\text{क} + \text{अ}'\text{क} + \text{अ}''\text{क} + \text{अ}'''\text{क} = \text{क}\,(\text{अ} + \text{अ}' + \text{अ}'' + \text{अ}''')$$

तर $\text{अ} + \text{अ}' + \text{अ}'' + \text{अ}'''$ हें इच्छिलें बहुयुक्पद आहे. (४) या अंकाचे समीकरणाचे जागीं हें पुढील समीकरण होतें

$$\text{र}'' - \text{अ}'''\text{क} = \text{र}'''$$

आणि मनांत आण कीं कृती पुढें चालविणें अनुपयोगी आहे हें स्पष्ट दिसतें.

तर याप्रमाणें होईल

$$प = अक + अ'क + अ''क + अ'''क + र'''$$

$$(\div) क \quad \frac{प}{क} = अ + अ' + अ'' + अ''' + \frac{र'''}{क}$$

= अकरणी बहुयुक्पद + {एक अपूर्णांक ज्याचें रूप $\frac{प}{क}$ यापेक्षां अतिसरळ.

उदाहरण. $\frac{क्ष^{४}+१}{क्ष^{२}+२क्ष}$ यास अधिक सरळ रूप द्या.

$प = क्ष^{४}+१$ $\qquad$ $क = क्ष^{२}+२क्ष$

$$क्ष^{२}+२क्ष)\ क्ष^{४}+१\ (अ = \frac{क्ष^{४}}{क्ष^{२}} = क्ष^{२}$$

$$क्ष^{४}+२क्ष^{३} = अक$$

$$-२क्ष^{३}+१ = र, \quad अ' = \frac{-२क्ष^{३}}{क्ष^{२}} = -२क्ष$$

$$-२क्ष^{३}-४क्ष^{२} = अ'क$$

$$४क्ष^{२}+१ = र', \quad अ'' = \frac{४क्ष^{२}}{क्ष^{२}} = ४$$

$$४क्ष^{२}+८क्ष = अ''क$$

$$-८क्ष+१ = र'', \quad अ''' = -\frac{८क्ष}{क्ष^{२}} = -८$$

$$-८क्ष-१६क्ष = अ'''क$$

$$१६क्ष+१ = र'''$$

ही कृती पुढें चालविणें उपयोगी नाहीं, तर याप्रमाणें आहे

$$\frac{क्ष^{४}+१}{क्ष^{२}+२क्ष} = क्ष^{२}-२क्ष+४क्ष-८+\frac{१६क्ष+१}{क्ष^{२}+२क्ष}$$

वरचे गोष्टीवरून, हा पुढील सिद्धांत निघतो, आणि बहुत करून तो गणितांमध्यें फार उपयोगी पडतो.

जर प आणि क हीं दोन अकरणी बहुयुक्पदें असतील, आणि जर त्यांतून प चा घात मोठा असेल, तर $\frac{प}{क}$ यास ग+$\frac{ह}{क}$ हें रूप दिलें जाईल, यांत ग आणि ह अकरणी बहुयुक्पदें आहेत, आणि क पेक्षां ह एक

किमतीने तरी कमी आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरण. वरच्या कृतींत, वजाबाक्या कामांत आणण्याचे पूर्वी जर त्या $\text{ब}, \text{ब}', \text{ब}''$, इत्यादि यांणीं वेगवेगळ्या गुणिल्या, तर या प्रमाणें होईल

$$\frac{\text{प}}{\text{क}} = \text{अ} + \frac{\text{अ}'}{\text{ब}} + \frac{\text{अ}''}{\text{ब}\text{ब}'} + \frac{\text{अ}'''}{\text{ब}\text{ब}'\text{ब}''} + \frac{\text{र}'''}{\text{ब}\text{ब}'\text{ब}''\text{क}}$$

वरची कृती अनंत वेगवेगळ्या तऱ्हेनें कामांत आणिली जाईल; कांकीं जरी केवळ वरचे उदाहरणाप्रमाणें ती रीति कामांत आणायास सोईवार पडते, तथापि तर्कामध्यें $\text{प}, \text{क}, \text{अ}, \text{अ}'$, इत्यादिहीं कोणतीं ही परिमाणें असतील, असें मानिलें जाईल. जसें या पुढील उदाहरणांत,

$\text{प} = १$ $\qquad\qquad$ $\text{क} = १ + \text{क्ष}$ असें घे,

$१ + \text{क्ष}\,)\; १\; ($ $\text{अ} = \text{क्ष}$ असें मनांत आण

$$\frac{\text{क्ष} + \text{क्ष}^{२}}{१ - \text{क्ष} - \text{क्ष}^{२}} = \text{र}, \qquad \text{अ}' = \text{क्ष}^{२}\text{ घे,}$$

$$\frac{\text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३}}{१ - \text{क्ष} - २\text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{३}}$$

$$\frac{\text{प}}{\text{क}} = \frac{१}{१ + \text{क्ष}} = \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \frac{१ - \text{क्ष} - २\text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{३}}{१ + \text{क्ष}}$$

परंतु बहुतेक पक्षांत ही कृती अपूर्णांकाची मेळवणी आणि वजाबाकी करण्याची मनःकल्पित रीति मात्र आहे. जेव्हां भाज्याचे डाव्येकडचें पद भाजकाचे डाव्येकडचे पदानें भागून, भागाकाराचीं पदें काढितात अशी चाल आहे, तेव्हां अशा उलगडण्याचे रीतीपासून उत्तर बहुतकरून प्रमाणरूप आणि उपयोगी असतें. ह्मणजे, या पुढील प्रमाणें उत्तरें निघतात,

$$\frac{१}{१+क्ष} = १ - क्ष + क्ष^२ - क्ष^३ + क्ष^४ - \frac{क्ष^५}{१+क्ष}$$

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + \frac{क्ष^४}{१-क्ष}$$

$$\frac{१}{क्ष+१} = \frac{१}{क्ष} - \frac{१}{क्ष^२} + \frac{१}{क्ष^३} - \frac{१}{क्ष^४} + \frac{१}{क्ष^५} \cdot \frac{१}{क्ष+१}$$

$$\frac{१}{१-२क्ष+क्ष^२} = १ + २क्ष + ३क्ष^२ + ४क्ष^३ + \frac{५क्ष^४ - ४क्ष^५}{१-२क्ष+क्ष^२}$$

वरच्या कोणत्याही श्रेणीचीं पदें अनियत वाढविलीं असतां नियत ते जवळ पोंचतील कीं नाहीं हें वरच्या रीतीपासून कळेल. ह्मणजे, हें पहाण्यांत येतें कीं

$$१ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + \cdots\cdots + क्ष^न \cdots\cdots \quad (छ)$$

यास $\frac{क्ष^{न+१}}{१-क्ष}$ हें मिळविल्यानें $\frac{१}{१-क्ष}$ होतो. **२७० पृष्ठाप्रमाणें** जेव्हां १ पेक्षां क्ष लहान आहे, आणि जसा न अनियत वाढत जातो, तसा $क्ष^{न+१}$ अनियत घटत जातो, तेव्हां (छ) चें सर्वधन **२७१ पृष्ठाप्रमाणें** $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे जवळ जवळ निरंतर येत जातें.

सद्यः प अकरणी बहुयुक्पद दाखविण्यासाठीं (प) घे; आणि (प)+(क)=(प+क), यापासून असें समजावें, कीं प आणि क अकरणी बहुयुक्पदें आहेत, यावरून त्यांची बेरीज अकरणी बहुयुक्पद आहे. तर, **सर्वदां** याप्रमाणें होतें

$$(प)+(क)=(प+क), \qquad (प)-(क)=(प-क),$$

$(प)\times(क)=(पक)$; आणि कांहीं विशेष पक्षांत $\frac{(प)}{(क)} = \left(\frac{प}{क}\right)$

(प) यास जें प्रत्येक बहुयुक्पद निःशेष भागितें त्यास प चा **गुण्य किंवा गुणक** ह्मणतात; ह्मणजे, $क्ष^२ - १ = (क्ष+१)(क्ष-१)$, असून क्ष+१ आणि क्ष−१ या पद्धती $क्ष^२-१$ हिचे गुण्य आणि गुणक आहेत. **२८६ पृष्ठावरून** स्पष्ट आहे.

१. जा बहुयुक्पदांमध्यें मोठा घात आहे, त्या घातापेक्षां त्या पदांचे गुण्य गुणकांमध्यें त्याहून मोठा घात होऊं शकत नाहीं.

२. जर बहुयुक्पदाचा घात म असेल, आणि जर त्याचा गुण्य किंवा गुणक यांतून एकाचा घात **प** असेल, तर बाकी राहिल्ये पदाचा घात म−प असावा.

असें या पुढील उदाहरणांत

$$\text{क्ष}^{४} - १ = (\text{क्ष} - १)(\text{क्ष}^{३} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष} + १)$$
$$= (\text{क्ष}^{२} - १)(\text{क्ष}^{२} + १)$$

वरचें बहुयुक्पद चवथ्ये वर्गाचें आहे, एकपक्षीं त्याचे गुण्यगुणक **पहिल्ये वर्गाचे** आणि **तिसज्ये वर्गाचे** आहेत, (१+३=४), आणि दुसऱ्या पक्षीं त्याचे गुण्यगुणक **दुसज्या** आणि **दुसज्या वर्गाचे** आहेत, (२+२=४).

आतां जी गोष्ट पुढें सांगतों ती केवळ अकरणी बहुयुक्पदांविषयीं आहे, आणि **निःशेष** भागाकार या शब्दापासून असें समजावें, कीं भागाकार केल्यानें कांहीं शेष रहात नाहीं. पूर्वीं सांगीतल्ये गोष्टीवरून हे पुढील सिद्धांत स्पष्ट निघतात.

१. भाज्याचा वर्ग निकृष्ट भाजकाचे वर्गाबरोबरही नसला, तर निःशेष भागाकार होणें अशक्य आहे.

२. जेव्हां भाज्याचा वर्ग भाजकाचे वर्गापेक्षां मोठा आहे, आणि जर निःशेष भागाकार होण्यास अशक्य आहे, तर बाकीचा वर्ग भाज्य आणि भाजकाचे वर्गाहून लहान असेल.

३. जर भाज्याचा वर्ग म असेल, आणि भाजकाचा वर्ग न असेल, तर भागाकाराचा वर्ग (म−न) होईल, बाकीचा वर्ग (न−१) यापेक्षां मोठा असणार नाहीं. कांकीं जोंपर्यंत बाकीचा वर्ग भाजकाचे वर्गाचे बरोबर किंवा त्यापेक्षां मोठा आहे, तोंपर्यंत कृती पुढें चालेल.

४. भाज्य **प**, भाजक **क**, भागाकार **अ** आणि बाकी **र** असे असतील, तर

$$प = अक + र \text{ अथवा } \frac{प}{क} = अ + \frac{र}{क}$$

५. म आणि न यांस जें परिमाण निःशेष भागितें, तें परिमाण त्यांची बेरीज, वजाबाकी, आणि गुणाकार यांस ही पूर्ण भागितें. भाजक दाखविण्यासाठीं ज्ञ घे; तर

$$\frac{म}{ज्ञ} = (अ) \qquad \frac{न}{ज्ञ} = (ब) \qquad \frac{म+न}{ज्ञ} = (अ+ब)$$

$$\frac{म-न}{ज्ञ} = (अ-ब) \qquad \frac{मन}{ज्ञ} = अबज्ञ = (अबज्ञ)$$

६. चवथ्या सिद्धांतामध्यें जें परिमाण प आणि क यांस निःशेष भागितें, तें परिमाण र यास ही पूर्ण भागितें, आणि क आणि र यांचा प्रत्येक भाजक प, इत्यादि यासही निःशेष भागितो, ह्मणजे त्या तिहींतून दोहोंस निःशेष भागून तिसऱ्यास निःशेष भागित नाहीं, असा कोणताही भाजक नाहीं.

उदाहरण, प आणि क यांस ज्ञ निःशेष भागितो असें मनांत आण; तर

$$\frac{प}{ज्ञ} \text{ हा भागाकार निःशेष आहे, अथवा } = \left(\frac{प}{ज्ञ}\right) \qquad \frac{क}{ज्ञ} = \left(\frac{क}{ज्ञ}\right)$$

$$अ \times \left(\frac{क}{ज्ञ}\right) = \left(\frac{अक}{ज्ञ}\right) \text{ यामुळें } \left(\frac{प}{ज्ञ}\right) - \left(\frac{अक}{ज्ञ}\right) = \left(\frac{प}{ज्ञ} - \frac{अक}{ज्ञ}\right)$$

$= \left(\frac{प-अक}{ज्ञ}\right)$; परंतु ही पद्धती $\frac{र}{ज्ञ}$ चे बरोबर आहे, यामुळें ही ही निःशेष आहे, ह्मणजे र हा ज्ञ याणें निःशेष भागिला जातो. तशाच तर्कानें बाकीचे दुसरे दोन पक्षही सिद्ध होतात.

७. प आणि क यांचा जो अति मोठा साधारण भाजक आहे, तो क आणि र यांचाही अति मोठा साधारण भाजक आहे.

८. जर कोणत्याही गुणाकाराचे गुण्य आणि गुणक यांतून एक पद क्ष नें भागिलें जात नाहीं, तर क्ष चे जे घात दुसऱ्या पदास निःशेष भागितात,

ते घात मात्र त्या पदांचे गुणाकारास निःशेष भागितील. उदाहरण, (क्षे+अ) (क्षे+६क्षे), यांचे गुणाकारांत ६अक्षे हें अतिलहान पद आहे, आणि जापेक्षां कोणत्याही पद्धतींतील अतिलहान पदांत जो क्षचा घात असतो, त्याहून क्षचा मोठा घात त्या पद्धतीस निःशेष भागित नाहीं, यामुळें या उदाहरणांत क्षे हा क्षचा अति मोठा घात आहे, जाणें वरचा गुणाकार निःशेष भागिला जातो. परंतु क्षे+६क्षे यास निःशेष भागायासाठीं क्षे हा अति मोठा घात आहे.

९. जर कोणतीही पद्धती क्षचा कोणत्याही घातानें निःशेष भागिली जाल्ये, तर त्या पद्धतीचा कोणताही दुसरा भाजक जो, क्षचा कोणत्याही घातानें निःशेष भागिला जात नाहीं, अशा भाजकानें, त्या पद्धतीस क्षचा कोणत्येही घातानें भागून आलेला भागाकार निःशेष भागिला जाईल. उदाहरण, क्षे−क्ष यास क्ष याणें भागिलें. तर क्षे−१ होतो; क्ष−१ त्या पद्धतीचा निःशेष भाजक आहे, आणि, यामुळें, जरी ठाऊक नसलें, तरी तो क्षे−१ या भागाकाराचाही निःशेष भाजक आहे.

हा सिद्धांत सिद्ध करण्यासाठीं क्षे प ही पद्धती घे, आणि जी क्ष+१ याणें भागिली जाल्ये; ह्मणजे पुढील प्रमाणें होतें असें मनांत आण,

$$\frac{(\text{क्षे प})}{\text{क्ष}+\text{१}} = (\text{अ}) \qquad \text{क्षे}(\text{प}) = (\text{अ})(\text{क्ष}+\text{१})$$

यामुळें (८) प्रमाणें क्षे याणें (अ) निःशेष भागिला जातो;

$$\text{अथवा } \frac{\text{अ}}{\text{क्षे}} = (\text{ब}) \quad \text{ह्मणजे } (\text{अ}) = \text{क्षे}(\text{ब})$$

$$\text{यामुळें } \text{क्षे}(\text{प}) = \text{क्षे}(\text{ब})(\text{क्ष}+\text{१})$$

$$(\text{प}) = (\text{ब})(\text{क्ष}+\text{१}) \text{ अथवा } \frac{\text{प}}{\text{क्ष}+\text{१}} = (\text{ब})$$

ह्मणजे, प आणि क्षे प हीं दोन्हीं क्ष+१ याणीं निःशेष भागिलीं जातात, आणि क्षे प याचे दुसऱ्ये कोणत्येही भाजकाविषयीं तसेंच दाखविलें जाईल.

आतां दोन अकरणी बहुयुक्पदांचा अति मोठा साधारण भाजक काढण्याची रीति, अंकगणितामध्यें दोन पूर्णांकांचा दृढभाजक काढण्याचा रीतिप्रमाणेंच आहे. उदाहरण, $क्ष^{६}-क्ष$ आणि $३क्ष^{७}-३क्ष^{३}$ यांचा अतिमोठा साधारण भाजक काढ. पहिल्यानें त्या दोन पद्धतींतून एकाकी पदांचा गुण्य किंवा गुणक निराळा कर; म्हणजे त्यास हें पुढील रूप दे,

$$क्ष(क्ष^{५}-१) \quad आणि \quad ३क्ष^{३}(क्ष^{४}-१)$$

सद्यः एकाकी पदांचा गुणक सोडून, या पुढील पदांचा अति मोठा साधारण भाजक काढ

$$क्ष^{५}-१ = प \quad आणि \quad क्ष^{४}-१ = क \quad असें घे,$$

$$क्ष^{४}-१)\ क्ष^{५}-१\ (क्ष$$
$$क्ष^{५}-क्ष$$
$$र\ बाकी = \quad क्ष-१)\ क्ष^{४}-१\ (क्ष^{३}+क्ष^{२}+क्ष+१$$
$$र\ बाकी = \quad 0$$

७ वे सिद्धांताप्रमाणें $क्ष^{५}-१$ आणि $क्ष^{४}-१$ यांचा जो अति मोठा साधारण भाजक, तोच $क्ष^{४}-१$ आणि $क्ष-१$ यांचा ही अति मोठा साधारण भाजक आहे; $क्ष-१$ ह्या पद्धतीचा अति मोठा साधारण भाजक तीच पद्धती आहे, आणि ती $क्ष^{४}-१$ हिला ही निःशेष भागिते, तर त्या दोन शेवटील पद्धतींचा अति मोठा साधारण भाजक आहे, यामुळें $क्ष-१$ ही $क्ष^{५}-१$ आणि $क्ष^{४}-१$ यांचा अति मोठा साधारण भाजक आहे. वर सांगीतल्या दोन मूळ पद्धतींचा भाजक क्ष आहे; यामुळें, $क्ष(क्ष-१)$ ही त्यांचा अति मोठा साधारण भाजक आहे.

९ वे सिद्धांताप्रमाणें वजाबाकींतून भागाकारानें क्षचा कोणता ही घात सोडिला जाईल. उदाहरण, $१-क्ष^{३}$ आणि $१-क्ष^{५}$ यांचा अति मोठा साधारण भाजक काढितानां, $क्ष^{३}-क्ष^{५}$ अथवा $क्ष^{३}(१-क्ष^{२})$ ही पहिली वजाबाकी आहे; परंतु ज्या भाजकामध्यें क्षचे घात आहेत, त्याखेरीज $क्ष^{३}-क्ष^{५}$

यांचे जे सगळे निःशेष भाजक आहेत, त्यांणीं १−क्ष^{३} निःशेष भागिला जाईल. परंतु १−क्ष^{५} आणि १−क्ष^{३} या दोन्ही क्षचे कोणत्येही घातानें भागिल्या जात नाहीं; यामुळें त्यांचे सगळे साधारण भाजक १−क्ष^{२} यामध्यें आहेत, आणि क्ष^{३}−क्ष^{५} यामध्येंही ते सर्व आहेत, तर कोणत्याही भागाकारांत क्ष^{३}−क्ष^{५} हिचेजागीं १−क्ष^{२} ही पद्धती कामांत घेतली जाईल.

भाजकास नव्या भाज्याचे स्थळीं घेतल्याचे पूर्वी, सोईस पडेल तितक्या वेळा घेतला जाईल. उदाहरण, क्ष^{२}−२क्ष+१ आणि क्ष^{३}−१ यांचा अतिमोठा साधारण भाजक काढिल्यानें, २क्ष^{२}−क्ष−१ ही पहिली वजाबाकी आहे. हिणें भागिल्याचे पूर्वी, क्ष^{२}−२क्ष+१ यास २ नी गुणायास सोईस पडेल, ह्मणजे तेणें करून कांहीं नवा **साधारण** भाजक कृतीमध्यें येत नाहीं. अशी पक्षांमध्यें सगळी कृती या पुढील प्रमाणें केली जाईल, ही तरी अति संक्षेप कृती नाहीं. परंतु कनीय पक्षांस जा रीती लागू होतील, त्या या उदाहरणापासून उघड समजतील.

क्ष^{२}−२क्ष+१) क्ष^{३}−१ (क्ष
　　　　क्ष^{३}−२क्ष^{२}+क्ष
　　　　२क्ष^{२}−क्ष−१) २क्ष^{२}−४क्ष+२ (१
　　　　　　　　२क्ष^{२}−क्ष−१
　　　　　　　　−३क्ष+३
(÷) −३　　　　क्ष−१) २क्ष^{२}−क्ष−१ (२क्ष+१
　　　　　　　　　　२क्ष^{२}−२क्ष
　　　　　　　　　　क्ष−१
　　　　　　　　　　क्ष−१
　　　　　　　　　　०

यामुळें क्ष−१ अतिमोठा साधारण भाजक आहे.

आठवा अध्याय.

श्रेणी आणि अनियमित गुणकां विषयीं.

१ पेक्षां क्ष कमी असेल, तर

$$१ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + क्ष^{४} + \text{ इत्यादि}$$

ही श्रेणी कितीही पुढें चालविली, तरी पदांची बेरीज १÷(१−क्ष) यापेक्षां अधिक किंवा याचे बरोबर कधींही होणार नाहीं. असें **२७१ पृष्ठावर** पाहिलें. या पद्धतीस अनंत श्रेणी ह्मणतात, **२७१ वे पृष्ठाप्रमाणें,** १÷(१−क्ष) त्या अपूर्णांकास बेरिजेची **नियतता** ह्मटली आहे, परंतु एथे त्यास **सर्वधन** असें नांव दिलें आहे.

व्याख्यान. श्रेणीचीं पदें एका पुढें एक निरंतर मिळविलीं असतां जा नियततेचे जवळ जवळ जातात, त्या नियततेस **अनंत श्रेणीचें सर्वधन** ह्मणतात.

जा श्रेणींत वर सांगीतल्याप्रमाणें नियतता असत्ये, ह्मणजे जींत तिचीं पदें मिळविल्यानें इच्छेप्रमाणें मोठी संख्या सांपडूं शकत नाहीं, तीस **उतरती** श्रेणी ह्मणतात: श्रेणीचीं पदें मिळविल्यानें जें परिमाण होतें, त्याला जेव्हां कांहीं नियतता नसत्ये, त्या श्रेणीस **चढती** श्रेणी ह्मणतात. या पुढील श्रेण्यांतून शेवटील श्रेणी शिवाय बाकीच्या चढत्या आहेत, असें स्पष्ट दिसतें.

१+१+१+१+ इत्यादि. १+२+३+४+ इत्यादि.

१+२+४+८+ इत्यादि. $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि..

अनंत श्रेणीमध्यें, प्रत्येक पदाचा त्याचे पुढल्ये पदाशीं जो संबंध असतो, तो ठाऊक असला पाहिजे, नाहीं तर त्या श्रेणीविषयीं कांहीं तर्क करितां ये-

णार नाहीं. श्रेणीचीं सर्व पदें मांडितां येत नाहीं, कांकीं जी श्रेणी मनांत असेल तिचा जवळजवळचे पदांचा संबंध कळल्यानें मात्र ती श्रेणी कोणत्या तऱ्हेची आहे, हें माहीत होतें. ह्मणजे पदांमधल्या **संबंधाचा कांहीं नियम** नाहीं अशी श्रेणी तर्क करण्यांत येत नाहीं.

जेव्हां पहिलीं चार किंवा पांच पदें दिलीं असतात, आणि त्यांमधला संबंध स्पष्ट असतो, तेव्हां पदांचा नेम प्रत्यक्ष कळतो, असें कदाचित शिकणाराचे मनांत येईल. उदाहरण.

१ + १ + १ + १ + १ + १ + १ + १ + १ + इत्यादि.

या श्रेणीचा दिलेल्या पदांमध्यें जो नियम आहे, त्या प्रमाणें ती श्रेणी पुढें चालविली असतां तींत अनुक्रमानें एक मिळवायाचे आहेत, असें त्याचे मनांत येईल. परंतु ही कल्पना खरी नाहीं; कांकीं वरची श्रेणी अनंत वेगळाल्या तऱ्हेनें पुढें चालेल. आणि दिलेलीं पदें जशीं आहेत त्यांमध्यें जो संबंध आहे, तो संबंध त्या प्रत्येक तऱ्हांमध्यें असतो. ह्मणजे, वरची श्रेणी या पुढील प्रमाणें चालेल:

९ वें पद.	१० वें.	११ वें.	१२ वें.	१३ वें.	१४ वें.	१५ वें.	१६ वें.	
१	१	२	३	४	५	७	१०	इत्यादि.

हिचा नेम हाच आहे, कीं पहिल्या न पदांचे बेरिजेचा **दशमस्थळीं जो अंक** येतो, तितक्यानें न पदापेक्षां $(न+१)$ हें पद अधिक असतें, ह्मणजे जों पर्यंत पदांचा बेरिजेचे दशमस्थळीं एक अंक वाढे तों पर्यंत तीं सर्व पदें एकसारिखींच असावीं. या पुढील श्रेणीचे पदांतले नेम शिकणारानें काढून दाखवावे.

७ १६ २२ २६ ३२ ३६ ४२ अनंत पावेतों

५ १० ९ १० ९ १० ९ अनंत पावेतों.

५ १० ११ १५ २१ ३० ३९ ४२ ५२ ६१ ७०

७९ ८५ ९४ १०३ १०९ १०९ १०९ अनंत पावेतों.

कांहीं विशेष पक्षांपासून साधारण प्रतिज्ञांचें अनुमान काढायास जर यत्न केला, ह्मणजे, कांहीं थोड्या पदांपासून श्रेणीचे नेमाचें अनुमान करण्यास यत्न केला, तर कदाचित चुक होईल. जो नेम दिसण्यांत येतो तो नेहेमी खरा आहे किंवा नाहीं, हें कांहीं थोडे पक्ष पहाण्याने मात्र काढितां येतें. परंतु जो नियम श्रेणीचे पदांमध्यें असावा असें वाटतें, तो नेम तपासल्यानंतर खरा नाहीं असें दृष्टीस येतें: असें या पुढील प्रमाणें. या पुढील अंकांची श्रेणी घे, ह्मणजे, १, २, ३, ४, ५, इत्यादि. प्रत्येक अंक त्याचे जवळच्या मोठ्या अंकानें गुण, आणि त्या गुणाकारास ४१ मिळीव, पुढील प्रमाणें:

१×२+४१ = ४३	५×६+४१ = ७१
२×३+४१ = ४७	६×७+४१ = ८३
३×४+४१ = ५३	७×८+४१ = ९७
४×५+४१ = ६१	८×९+४१ = ११३, इत्यादि.

असें करून या प्रमाणें वेगळालीं पदें निघतात, असें दिसतें

४३, ४७, ५३, ६१, ७१, ८३, ९७, ११३, इत्यादि.

यांत असें दिसतें, कीं सगळीं पदें प्रेम* ह्मणजे अविभाज्य अंक आहेत, आणि श्रेणीचीं पदें पुढें या नेमानेंच चालतील, अशी कल्पना करायास वरचे गोष्टीवरून संभावना होते; ह्मणजे ही पुढील गोष्ट खरी आहे अशी कल्पना करितां येते: जर क्ष कोणताही पूर्णांक असेल, तर क्ष(क्ष+१) +४१ हा प्रेम अंक असावा. आणि श्रेणीचीं पुढचीं पदें ३९×४०+४१ अथवा १६०१, या पावेतों चालविलीं असतां तीं सर्व पदें प्रेम अंकांशिवाय दुसरीं कांहीं नाहींत. तथापि, याचे पुढचें पद, अथवा ४०×४१+४१ हा प्रेम अंक नाहीं असें स्पष्ट दिसतें; कांकीं तो अंक या प्रमाणें आहे, (४०+१)४१, अथवा ४१×४१.

* प्रेम अंक ह्मणजे तोच आहे, जो त्यानेंच किंवा १ यानें मात्र निःशेष भागिला जातो, याशिवाय दुसरे कोणत्याही अंकानें निःशेष भागिला जात नाहीं. प्रेम अंकांची श्रेणी या पुढील प्रमाणें आहे,

१, २, ३, ५, ७, ११, १३, १७, १९, इत्यादि.

एकादे श्रेणीचा नियम सांगण्याची गरज वारंवार पडत्ये, ती अडचण चुकविण्या बदल, यापुढें असें समजावें. कीं जीं कांहीं श्रेणीचीं पहिलीं पदें येतील, त्या पदांविषयीं जर दुसरा कांहीं नियम सांगीतला नसेल, तर त्या पदांत जो साधारण नियम दृष्टीस पडतो, तो त्या श्रेणीचा नियम आहे. असें $१+क्ष+क्ष^{२}+$ इत्यादि यांपासून असें समजतें, कीं या श्रेणीचीं पुढील पदें $क्ष^{३}+क्ष^{४}+क्ष^{५}+$ इत्यादि आहेत.

व्याख्यान. श्रेणीचें साधारण पद ह्मणजे त्या श्रेणीचे न पदाची बीजगणितरूप पद्धती आहे, असें पुढील उदाहरणांवरून समजेल.

श्रेणीचीं पहिलीं कांहीं थोडीं पदें.	न पद, अथवा साधारण पद.
$१+१+१+१+$ इत्यादि.	१
$१+२+३+४+$ इत्यादि.	$न$
$२+३+४+५+$ इत्यादि.	$न+१$
$०+१+२+३+$ इत्यादि.	$न-१$
$१+४+९+१६+$ इत्यादि.	$न^{२}$
$४+९+१६+२५+$ इत्यादि.	$(न+१)^{२}$
$क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+क्ष^{४}+$ इत्यादि.	$क्ष^{न}$
$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+$ इत्यादि.	$क्ष^{न-१}$
$क्ष^{म}+क्ष^{म+१}+क्ष^{म+२}+क्ष^{म+३}+$ इत्यादि.	$क्ष^{म+न-१}$
$१+\frac{क्ष}{२}+\frac{क्ष^{२}}{३}+\frac{क्ष^{३}}{४}+$ इत्यादि.	$\frac{क्ष^{न-१}}{न}$
$१+क्ष+\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{२\cdot३}+$ इत्यादि.	$\frac{क्ष^{न-१}}{१\cdot२\cdot३\cdots(न-१)}$

या शेवटील श्रेणींत पहिलें पद दिलें आहे, असें साधारण पदांमध्यें येत नाहीं. कांकीं जर $न=१$, तर साधारण पदाचें रूप या प्रमाणें होतें, $\frac{क्ष^{१-१}}{०}$ अथवा $\frac{१}{०}$, परंतु हें रूप खरें नाहीं. खरें ह्मटलें असतां, साधारण पद या पुढील गुणाकारांतील. न गुण्य किंवा गुणक यांचा गुणाकार आहे:

$$१\times\frac{क्ष}{१}\times\frac{क्ष}{२}\times\frac{क्ष}{३}\times\frac{क्ष}{४}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

सिद्धांत. अ+ब+क+ड+फ+ इत्यादि ही श्रेणी या पुढील सारिखी आहे:

$$अ\left\{१+\frac{ब}{अ}+\frac{कब}{बअ}+\frac{डकब}{कबअ}+\frac{फडकब}{डकबअ}+ इत्यादि\right\}.$$

ही गोष्ट सिद्ध करायास शिकणारास अवघड पडणार नाहीं. प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाशीं जें प्रमाण* ठेविलें तें दाखविण्यासाठीं, अंशस्थळीं जें अक्षर असतें तें मोठ्ये रूपानें लिही.

$$\frac{ब}{अ}=\mathbf{ब},\quad \frac{क}{ब}=\mathbf{क},\quad \frac{ड}{क}=\mathbf{ड},\quad \frac{फ}{ड}=\mathbf{फ}\ इत्यादि.$$

तर अ+ब+क+ड+फ+ इत्यादि या पुढील प्रमाणें होईल.

$$अ\{१+\mathbf{ब}+\mathbf{कब}+\mathbf{डकब}+\mathbf{फडकब}+ इत्यादि \quad \cdots\cdots(१)$$

ब, क, ड, फ, जर हीं प्रत्येक प्रमाणें कांहीं **प** या सांगीतल्या परिमाणापेक्षां लहान असतील, तर

अ(१+**ब**) ही अ (१+**प**) यापेक्षां लहान होईल

अ (१+**ब**+**कब**) ही अ(१+**प**+**पप**) यापेक्षां लहान होईल

इत्यादि

अथवा १ या श्रेणीचे कितीही पदांचें सर्वधन, या पुढील श्रेणीचे तितक्येच पदांचे सर्वधनापेक्षां कमी होईल

$$अ(१+\mathbf{प}+\mathbf{प}^२+\mathbf{प}^३+ इत्यादि)\cdots\cdots\cdots(२)$$

तेव्हां, जर **प** एकापेक्षां लहान असेल, तर(१) ही उतरती श्रेणी असावी; कांकीं $१+\mathbf{प}+\mathbf{प}^२+$ इत्यादि कितीही पदें घेतलीं, तरी १÷(१−**प**) यापेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहीं; यामुळें, (२) या श्रेणीचीं कितीही पदें घेतलीं, तरी अ÷(१−**प**) यापेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहीं; (२) या श्रेणीचे वेगवेगळ्ये पदांपेक्षां (१) या श्रेणीचीं वेगवेगळीं पदें लहान आहेत, यामुळें हिचीं कितीही पदें घेतलीं, तरी अ÷(१−प) हिजपेक्षां मोठीं होऊं शकत नाहींत.

---

* जें प्रमाण अ हा बशीं ठेवितो, तें दाखविण्यासाठीं $\frac{अ}{ब}$ असें बीजरूपानें मांडितात.

यामुळें कोणतेंही पद त्याचे पूर्वींचे पदाशीं जें प्रमाण ठेवितें, तें प्रमाण जर एकापेक्षां लहान अशा परिमाणाहून लहान असेल, तेव्हां ती श्रेणी उतरती असत्ये. श्रेणीचीं कांहीं पदें टाकून त्यांचे पुढल्ये पदांत वरची गोष्ट घडत्ये, इतकें मात्र एथें सुचवितों: कांकीं, एकाद्ये श्रेणीचीं पहिलीं शंभर पदें वाढत जातात असें मनांत आण, तथापि शंभराव्या पदानंतरचे कितीही पदांचे सर्वधनापासून, असें मनांत आण, कीं ५० यापेक्षां मोठें उत्तर येत नाहीं, आणि पहिल्ये शंभर पदांचें सर्वधन १००० आहे असें ह्मण, तर १०५० यापेक्षां मोठें उत्तर कोणत्येही सर्वधनापासून निघणार नाहीं, ह्मणून अशी श्रेणी साधारणरूपानें पाहिली असतां उतरती आहे, अथवा खरें ह्मटलें असतां ती श्रेणी शंभराव्या पदानंतर उतरूं लागत्ये.

उदाहरण. $१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२.३}+\frac{१}{२.३.४}+$ इत्यादि

ही श्रेणी उतरती आहे. कांकीं यांत

$$\frac{ब}{अ}=१,\ \frac{क}{ब}=\frac{१}{२},\ \ \frac{इ}{क}=\frac{१}{३},\ \ \frac{फ}{इ}=\frac{१}{४},\ \text{इत्यादि}$$

ह्मणून दुसऱ्या गुणोत्तरा पुढील सगळीं गुणोत्तरें $\frac{१}{२}$ पेक्षां लहान आहेत, आणि तें दुसरें गुणोत्तर एकापेक्षां लहान आहे.

या श्रेणीची नियतता बीजगणितांत बहुत उपयोगी अंक आहेत, याजकरितां दशांशाचे दाहा स्थळां पावेतों त्यांस काढितों, आणि दशांशाचे दाहाव्ये स्थळीं खरा अंक होण्यासाठीं अकरास्थळें पावेतों घेतों. वेगळालीं पदें दाखविण्यासाठीं $अ_१$, $अ_२$ इत्यादि घे, तर या प्रमाणें होतें,

$अ_{१} = १,\ अ_{२} = १,\ अ_{३} = \frac{१}{२}अ_{२},\ अ_{४} = \frac{१}{३}अ_{३},\ अ_{५} = \frac{१}{४}अ_{४}$ इत्यादि तर.

$अ_{१} = १$	१·०००००००००००
$अ_{२} = १$	१·०००००००००००
$अ_{३} = \frac{१}{२}\ अ_{२}$	०·५००००००००००
$अ_{४} = \frac{१}{३}\ अ_{३}$	·१६६६६६६६६६७
$अ_{५} = \frac{१}{४}\ अ_{४}$	·०४१६६६६६६६७
$अ_{६} = \frac{१}{५}\ अ_{५}$	·००८३३३३३३३३
$अ_{७} = \frac{१}{६}\ अ_{६}$	·००१३८८८८८८९
$अ_{८} = \frac{१}{७}\ अ_{७}$	·०००१९८४१२७०
$अ_{९} = \frac{१}{८}\ अ_{८}$	·००००२४८०१५९
$अ_{१०} = \frac{१}{९}\ अ_{९}$	·०००००२७५५७३
$अ_{११} = \frac{१}{१०}\ अ_{१०}$	·००००००२७५५७
$अ_{१२} = \frac{१}{११}\ अ_{११}$	·०००००००२५०५
$अ_{१३} = \frac{१}{१२}\ अ_{१२}$	·००००००००२०९
$अ_{१४} = \frac{१}{१३}\ अ_{१३}$	·०००००००००१६
$अ_{१५} = \frac{१}{१४}\ अ_{१४}$	·००००००००००१
	२·७१८२८१८२८४६

हें सर्वधन शेवटील अंकापावेतों खरें आहे; सारांश, श्रेणीचें सर्वधन या पुढील दोन अंकांचे मध्यें आहे

२·७१८२८१८२८४५

आणि २·७१८२८१८२८४६

परंतु तें सर्वधन या दोहोंतून पहिल्यापेक्षां दुसरे अंकांचे अधिक जवळ आहे. या सर्वधनाची नियतता दाखविण्यासाठीं e हें अक्षर कामांत घेतात; अथवा याप्रमाणें मांडिलें जातें

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} +$ इत्यादि. (=२.७१८२८१८२८४६ जवळजवळ)

७ आणि ८ वें पृष्ठ पहा.

वरची श्रेणी खरेनें उतरत जात्ये असें ह्मणतात.

सिद्धांत. अ + ब + क + इत्यादि, जेव्हां या श्रेणीचीं पदें परस्पर असा संबंध ठेवितात, कीं $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि हीं सर्व एकापेक्षां मोठीं असतात, अथवा कोणत्याही सांगितल्ये पदानंतर अशीं वाढत जातात, तेव्हां ही श्रेणी नेहमी चढती आहे.

हा सिद्धांत वरचे सिद्धांता सारिखा आहे, यामुळें याचा खरेपणा दाखवायास शिकणारावर सोंपितो.

सिद्धांत. अ − ब + क − ड + इत्यादि, जेव्हां या श्रेणीचीं पदें अनियत घटत जातात, तेव्हां ती उतरती आहे; ह्मणजे, जेव्हां ब पेक्षां अ, आणि क पेक्षां ब इत्यादि मोठीं आहेत, आणि जेव्हां श्रेणीचें कांहीं पद कोणता कसाही लहान अपूर्णांक मनांत कल्पून घेतला त्यापेक्षां लहान आहे, तेव्हां ती उतरती आहे.

सिद्धांताचे संकेताप्रमाणें अ, ब, क, ड, इत्यादि कोणतेही श्रेणीचीं पदें उतरत जातात, अशीं असोत, तर

(अ − ब) + (ब − क) + (क − ड) + इत्यादि

ही उतरती श्रेणी असावी, कांकीं, पहिल्ये दोन पदांची बेरीज अ − क आहे, पहिल्ये तीन पदांची बेरीज अ − ड आहे, आणि याप्रमाणें पुढें ही. आतां अ, ब, क, ड, इत्यादि पदें अनियत घटत जातात, तर अ − क, अ − ड, इत्यादि या श्रेणीचीं पदें वाढत वाढत जातात अशीं आहेत, आणि त्या श्रेणीची नियतता अ आहे. यामुळें वरचे श्रेणीचीं एकाआड एक पदें घेऊन जी श्रेणी होत्ये, तिची नियतता अ पेक्षां लहान असावी. परंतु ती श्रेणी पुढीलप्रमाणें आहे

अ − ब + क − ड + इत्यादि.

या वरून सिद्धांत खरा आहे.

यावरून

$$१ - \frac{१}{२} + \frac{१}{३} - \frac{१}{४} + \text{इत्यादि}.$$

ही उतरती श्रेणी आहे हें कळतें, जिची नियतता १ पेक्षां लहान आहे.

सिद्धांत. जर कोणतें ही दिलेलें परिमाण प, या पुढील प्रमाणाचे कोणत्येही श्रेणीपेक्षां मोठें असेल,

ह्मणजे

$$\frac{ब}{अ} \quad \frac{क}{ब} \quad \frac{इ}{क} \quad \frac{फ}{इ} \quad \frac{ग}{फ} \quad \text{इत्यादि}.$$

तर

$$अ + बक्ष + कक्ष^{२} + इक्ष^{३} + फक्ष^{४} + गक्ष^{५} + \text{इत्यादि} \; \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (अ)$$

जेव्हां $\frac{१}{प}$ यापेक्षां क्ष लहान आहे, तेव्हां ही वरची श्रेणी उतरती आहे.

कांकीं वरची श्रेणी या पुढील प्रमाणें आहे

$$अ\left\{१ + \frac{ब}{अ}क्ष + \frac{क}{ब}\cdot\frac{ब}{अ}\cdot क्ष^{२} + \frac{इ}{क}\cdot\frac{क}{ब}\cdot\frac{ब}{अ}\cdot क्ष^{३} + \text{इत्यादि}.\right\}$$

आतां $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि यापेक्षां प मोठा आहे, यामुळें $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि यांचेजागीं प मांडिला असतां वरचे श्रेणीची किंमत अधिक होत्ये. ह्मणून असें केल्यानें ती श्रेणी याप्रमाणें होत्ये

$$अ\left\{१ + पक्ष + प^{२}क्ष^{२} + प^{३}क्ष^{३} + \text{इत्यादि}.\right\}$$

अथवा $$अ\left\{१ + (पक्ष) + (पक्ष)^{२} + (पक्ष)^{३} + \text{इत्यादि}.\right.$$

यांत जर १ पेक्षां पक्ष लहान असेल, अथवा, $\frac{१}{प}$ यापेक्षां क्ष लहान असेल, तर २७० पृष्ठाप्रमाणें ही वरची उतरती श्रेणी आहे. आणि त्याच कल्पनेवरून मूळची पद्धती अधिक उतरती असावी, कांकीं तिचीं पदें या वरचे श्रेणीचे पदांपेक्षां उत्तरोत्तर लहान आहेत.

कोणत्याही श्रेणीचे पदांचे प्रमाणांतून कांहीं दिलेल्या प्रमाणानंतरचा प्रमाणाहून जर प मोठा असेल, तर जा पदांपासून तें प्रमाण होतें,

त्यापुढें जेव्हां १ पेक्षां प क्ष लहान आहे, तेव्हां ती श्रेणी उतरती होत्ये. म्ह-णून मनांत आण, कीं (अ) श्रेणीचें हजारावें पद आणि त्याचे पुढलीं पदें हीं पुढील आहेत,

$$अक्ष^{९९९} + बक्ष^{१०००} + कक्ष^{१००१} + इत्यादि.$$

अथवा $$अक्ष^{९९९} \left\{ १ + \frac{ब}{अ} क्ष + \frac{क}{ब}\,\frac{ब}{अ} क्ष^{२} + इत्यादि \right\}$$

तर, वरचे तर्करचने प्रमाणें जर $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि प्रमाणापेक्षां जर प मोठा असेल, आणि जर $\frac{१}{प}$ पेक्षां क्ष लहान असेल, तर वरची श्रेणी उत-रती आहे.

उदाहरण, ही पुढील श्रेणी घे

$$१ + २क्ष + ३क्ष^{२} + ४क्ष^{३} + इत्यादि.$$

हिचीं प्रमाणें $\frac{२}{१}$ $\frac{३}{२}$ $\frac{४}{३}$ $\frac{५}{४}$ इत्यादि.

यांत पहिल्ये प्रमाणानंतरचे सर्व दुसऱ्ये प्रमाणापेक्षां २ मोठे आहेत; यामु-ळें जर $\frac{१}{२}$ पेक्षां क्ष लहान असेल, तर ही श्रेणी दुसऱ्ये पदापासून उतरत जात्ये. शंभरावें पद आणि त्याचें पुढलीं पदें याप्रमाणें आहेत

$$१००क्ष^{९९} + १०१क्ष^{१००} + १०२क्ष^{१०१} + इत्यादि.$$

हिचीं प्रमाणें $\frac{१०१}{१००}$ $\frac{१०२}{१०१}$ $\frac{१०३}{१०२}$ इत्यादि.

यांत पहिल्ये प्रमाणाशिवाय सर्व दुसऱ्ये प्रमाणापेक्षां $\frac{१०१}{१००}$ हें प्रमाण मो-ठें आहे. यामुळें, जर $१ \div \frac{१०१}{१००}$ अथवा $\frac{१००}{१०१}$ पेक्षां क्ष लहान असेल, तर शंभराव्ये पदापासून ही श्रेणी उतरत जात्ये. याच प्रमाणें दाखविलें जाईल, कीं ज्या पदापासून १ पेक्षां क्ष लहान आहे, त्या पदापासून ही श्रेणी उतरत जा-त्ये, आणि ज्या पदापासून उतरण्याचा आरंभ होतो तें पद, क्ष पुरतेपणीं १ या-चे जवळ केल्यानें, हवे तेवढे लांब नेतां येईल.

पुढील प्रमाणें दुसरें उदाहरण घे,

$$१+क्ष+\frac{क्ष^२}{२}+\frac{क्ष^३}{२\cdot३}+\frac{क्ष^४}{२\cdot३\cdot४}+ इत्यादि.$$

हिचीं प्रमाणें $१ \quad \frac{१}{२} \quad \frac{१}{३} \quad \frac{१}{४}$ इत्यादि.

हीं प्रमाणें उत्तरोत्तर अनियत घटत जातात, ह्मणून या श्रेणींत असें एक पद येईल, कीं त्या पदापुढचीं सर्व पदें कोणत्याही सांगीतल्या अतिलहान म अपूर्णांकापेक्षां लहान होतील. परंतु जर म हवा तेवढा लहान केला, तर $\frac{१}{म}$ हवा तेवढा मोठा केला जाईल. यामुळें क्षची प्रत्येक किंमत कशीही मोठी असली, तरी त्याचे किमतीविषयीं ही श्रेणी उतरती आहे; परंतु क्ष जेवढा जेवढा अधिक मोठा घेतला जाईल, त्याप्रमाणें जा पदापासून श्रेणीचा उतरण्याचा आरंभ होतो, तें पद लांब जाईल.

पुढील प्रमाणें तिसरें उदाहरण घे,

$$१+२क्ष+२\cdot३क्ष^२+२\cdot३\cdot४क्ष^३+ इत्यादि.$$

हिचीं प्रमाणें $२ \quad ३ \quad ४ \quad ५$ इत्यादि.

हीं प्रमाणें उत्तरोत्तर अनियत वाढत जातात, ह्मणून या सर्व पदांपेक्षां मोठें असें कोणतेंही परिमाण नाहीं. यामुळें, क्षला कोणतीही किंमत देतां येत नाहीं, जिणेंकरून ही श्रेणी उतरती होईल. हा पुढील सिद्धांत वरप्रमाणेंसोप्ये रीतीनें स्थापिला जाईल.

सिद्धांत. $\frac{ब}{अ}$, $\frac{क}{ब}$, इत्यादि कोणत्याही प्रमाणाहून प लहान असेल, तर

$$अ+बक्ष+कक्ष^२+ इत्यादि.$$

ही श्रेणी $\frac{१}{प}$ यापेक्षां क्षचे प्रत्येक मोठ्ये किंमतींविषयीं चढती आहे.

याच रीतीनें जी श्रेणी पुर्वील उदाहरणांत दाखविली, ती $\frac{१}{३}$ पेक्षां मोठ्या अशा क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं, दुसऱ्ये पदापासून चढत्ये, आणि तीच $\frac{१}{४}$ पेक्षां मोठ्या अशा क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं, तिसऱ्ये पदापासून चढत्ये, आणि याप्रमाणें पुढेंही, यावरून क्षला कोणत्याही लहान अपूर्णांकाची

किंमत दिल्यानें ही श्रेणी कोणत्याही पदापासून चढती होणार नाहीं असा लहान अपूर्णांक नाहीं.

अशा तऱ्हेची चढती श्रेणी व्यवहार कामांत येत नाहीं : जी श्रेणी उतरती केली जात्ये, तिज पासून जीं साधारण अनुमानें निघतात, तीं अनुमानें सर्व श्रेण्यास लाऊं नये, हें सुचवायासाठीं मात्र या वरच्या श्रेण्या घेतल्या आहेत.

या पुढें अ+बक्ष+कक्ष²+ इत्यादि या श्रेणी विषयीं बोलणें, तर अर्थ हाच समजावा, कीं जा श्रेण्या चढत्या केल्या जातील. त्यांविषयीं मात्र बोलणें आहे : परंतु जर याचें उलटें सांगीतलें असलें तर हा सांगीतला अर्थ घेऊं नये. सगळीं पदें धन आहेत असें मानितों.

सिद्धांत. अ+बक्ष+कक्ष² या जातीचे सर्व श्रेण्यांत हा गुण आहे, ह्मणजे क्ष एवढा लहान घेतला जाईल, कीं त्या श्रेणींतील कोणत्याही पदामध्यें त्या पदाचे पुढील सर्व पदांची बेरीज इच्छेप्रमाणें हव्या तेवढ्या वेळा जाईल.

उदाहरण, क्ष पुरतेपणीं लहान घेतला, तर कक्ष² हें पद इक्ष³+फक्ष⁴+ इत्यादि यांपेक्षां दहा हजार पट अधिक मोठें केलें जाईल. क्ष ची अति मोठी किंमत दाखविण्यासाठीं क्ष₁ असें चिन्ह घे, जेणें करून इ+फक्ष+ इत्यादि ही उतरती श्रेणी होत्ये, आणि अशी पक्षांत त्या पदांची बेरीज दाखविण्यासाठीं स घे. तर क्ष₁ पेक्षां क्षचा जा प्रत्येक किंमती लहान आहेत, त्या प्रत्येकी विषयीं इ+फक्ष+ इत्यादि ही पद्धती स पेक्षां लहान आहे. आतां कक्ष² यामध्यें इक्ष³+फक्ष⁴+ इत्यादि पदें कित्येक वेळां किंवा वेळेचे भाग जातात, ह्मणजे

$$\frac{कक्ष^2}{इक्ष^3+फक्ष^4+इत्यादि} \text{ अथवा } \frac{क}{इक्ष+फक्ष^2+इत्यादि} \text{ अथवा } \frac{क}{क्ष(इ+फक्ष+इत्यादि)}$$

क्ष₁ पेक्षां क्ष लहान घे, ह्मणून, यावरून इ+फक्ष+ इत्यादिपेक्षां स मोठा आहे, अथवा

$$\frac{क}{क्ष(इ+फक्ष+इत्यादि)} \text{ अथवा } \frac{कक्ष^2}{इक्ष^3+फक्ष^4+इत्यादि} \text{ यापेक्षां } \frac{क}{क्षस} \text{ लहान आहे}$$

आतां क आणि स हीं दोन नियमित परिमाणें आहेत, म्हणून क्ष एवढा लहान घेतला जाईल, कीं इच्छे प्रमाणें क ÷ क्ष स हवा तेवढा मोठा केला जाईल; परंतु क ÷ क्ष स पेक्षां $\text{कक्ष}^{२} \div (\text{इक्ष}^{२} + \text{फक्ष}^{३} + \text{इत्यादि})$ अधिक मोठी आहे, तर ही इच्छे प्रमाणें हवी तेवढी मोठी केली जाईल. यावरून हा सिद्धांत स्थापिला जातो.

उदाहरण.

$$१ + २\text{क्ष} + ३\text{क्ष}^{२} + ४\text{क्ष}^{३} + ५\text{क्ष}^{४} + \text{इत्यादि}$$

या श्रेणींत क्ष किती लहान असावा, असा कीं तिचे चवथ्ये पदामध्यें त्याचे पुढील सगळ्ये पदांची बेरीज थोडक्या तरी १००० वेळा आईल.

या श्रेणींतील चवथ्ये पदाचे पुढलीं सर्व पदें या प्रमाणें मांडिलीं जातील:

$$५\text{क्ष}^{४}\left\{१ + \frac{६}{५}\text{क्ष} + \frac{७}{६}\cdot\frac{६}{५}\text{क्ष}^{२} + \text{इत्यादि}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{अ})$$

आणि $\frac{६}{५}$ हें प्रमाण त्याचे पुढील कोणत्येही प्रमाणापेक्षां मोठें आहे; यामुळें ही वरची श्रेणी फेर करून पुढील प्रमाणें मांडिली असतां वाढत जात्ये.

$$५\text{क्ष}^{४}\left\{१ + \frac{६}{५}\text{क्ष} + \frac{६}{५}\cdot\frac{६}{५}\text{क्ष}^{२} + \text{इत्यादि}\right\} \text{ अथवा } \frac{५\text{क्ष}^{४}}{१ - \frac{६}{५}\text{क्ष}} \cdots (\text{घ})$$

३०२ पृष्ठ पहा. आतां क्ष असा घेतला पाहिजे, कीं

$$१०००\,\frac{५\text{क्ष}^{४}}{१ - \frac{६}{५}\text{क्ष}} \text{ यापेक्षां } ४\text{क्ष}^{३} \text{ हें पद मोठें आहे}$$

$$(\times)\quad \left(\frac{१ - \frac{६}{५}\text{क्ष}}{४\text{क्ष}^{३}}\right);\ २५०\times५\text{क्ष अथवा } १२५०\text{ क्ष यापेक्षां } १ - \frac{६}{५}\text{क्ष}$$

खचित मोठे असावे, जर १२५० क्ष पेक्षां १−२क्ष मोठे आहेत, अथवा जर १२५२ क्ष पेक्षां १ मोठा आहे, अथवा जर क्ष पेक्षां $\frac{१}{१२५२}$ मोठे आहेत. तर वरची गोष्ट निश्चयें खरी आहे. या पक्षांत १००० वेळा (घ) पेक्षां $४\text{क्ष}^{३}$ मोठे आहेत; तर १००० वेळा (अ) पेक्षां अधिक मोठे आहेत.

सिद्धांत.

$$\text{अ}_{०} + \text{अ}_{१}\text{क्ष} + \text{अ}_{२}\text{क्ष}^{२} + \text{इत्यादि} \quad \text{आणि} \quad \text{ब}_{०} + \text{ब}_{१}\text{क्ष} + \text{ब}_{२}\text{क्ष}^{२} + \text{इत्यादि}$$

या दोन श्रेण्या जर क्ष-चा प्रत्येक नियमित किमतीविषयीं सर्वदा बरोबर असतील, तर अ० = ब०, अ१ = ब१, अ२ = ब२, इत्यादि असें होईल, अथवा या दोन श्रेण्या सर्वांशीं एकरूप होतील.

या दोन श्रेण्या अ० + **अ** आणि ब० + **ब** या रूपाच्या आहेत अशी कल्पना कर, आतांच जें वर दाखविलें त्यावरून **अ** आणि **ब**, हे अ० आणि ब० यांचे कोणत्येही म भागापेक्षां लहान केले जातील. शक्य असेल, तर अ० आणि ब० हे दोन निरनिराळे अंक आहेत, अथवा अ० = ब० + त आहे अशी कल्पना कर. आतां सिद्धांताचे संकेताप्रमाणें दोन श्रेण्या सर्वदां बरोबर आहेत, तर यावरून अ० + **अ** = ब० + **ब**, अथवा ब० + त + **अ** = ब० + **ब**; ह्मणजे त = **ब** − **अ**. परंतु अ० आणि ब० हीं दोन्हीं नियमित परिमाणें आहेत, यामुळें त्यांची वजाबाकी ही नियमित परिमाण आहे; आणि जीं प्रत्येक परिमाणें हवीं तेवढीं लहान केलीं जातील, त्या दोन परिमाणाचा वजाबाकी बरोबर त हें नियमित परिमाण वरचा कल्पनेवरून आहे ही गोष्ट खोटी. यावरून अ० = ब० + त असें होण्यास अशक्य; आणि तशीच तर्करीतीनें दाखविलें जातें, कीं अ० = ब० − त हें ही होण्यास अशक्य; यामुळें अ० = ब०. हीं दोन बरोबरीचीं पदें वरचे दोन्ही श्रेण्यांतून वजा करून बरोबरीचा वजाबाक्या क्षनें भाग, तर याप्रमाणें होईल.

'अ१ + अ२ क्ष + अ३ क्ष² + इत्यादि आणि ब१ + ब२ क्ष + ब३ क्ष² + इत्यादि सर्वदा बरोबर आहेत,

वरची गोष्ट सिद्ध केल्याप्रमाणें अ१ = ब१ असें निघतें; बरोबरीचीं पदें पुनः वरप्रमाणें वजा करून बाक्यांस क्षनें भागून अ२ = ब२ असें निघेल; आणि याप्रमाणें पुढेंही. यावरून वरचा दोन श्रेण्यांतून एकीमध्यें एक किंवा अधिक पदें कमी असतील, तर दुसऱ्या श्रेणीमध्यें तितकींच कमी असावीं; ह्मणजे, जर अ − क्ष ही अ० + अ१ क्ष + अ२ क्ष² यांचे सर्वदा बरोबर आहे, तर अ = अ०, −१ = अ१, ० = अ२, ० = अ३ इत्यादि.

श्रेणीमध्यें $क्ष=०$ केलें जाईल, आणि ती श्रेणी तिचे पदांचे संख्येविषयीं नियत आहे असें कल्पून त्याच रीतीनें साधारण चालीचीं बीजगणितरूपाचीं उत्तरें घेतलीं जातील, हें मात्र वरची कृती दाखविते. ह्मणजे, जर $अ_० + अ_१ क्ष +$ इत्यादि $= ब_० + ब_१ क्ष +$ इत्यादि, असें नेहमी असेल, तर $क्ष=०$ असें करण्याचा परिणाम ह्मणजे, $अ_० = ब_०$ हें खरें आहे असें वर सिद्ध झालें. परंतु पूर्वीं पहाण्यांत आलें, कीं जेव्हां $क्ष=०$ तेव्हां $प=क$ असें ह्मणण्यास योग्य नाहीं, परंतु जेथें क्ष पुरतेपणीं लहान केला जाईल, अथवा ० चे जवळ केला जाईल अशा पक्षांत मात्र असें ह्मटलें जाईल, कीं इच्छेप्रमाणें प चे हवा तितका जवळ क आणिला जाईल. जी अडचण नाहींशी केली ती या पुढील प्रमाणें आहे: $१+२क्ष+२\cdot३क्ष^२+$ इत्यादि या श्रेणींत असें पाहिलें, कीं क्ष कितीही लहान केला, तरी पदांचें सर्वधन इच्छेप्रमाणें हवें तेवढें मोठें केलें जाईल. यावरून या पुढील प्रमाणें जेव्हां $क्ष=०$, तेव्हां वरची श्रेणी $१+०+०+$ इत्यादि अथवा १ असें ह्मणण्यास योग्य आहे कीं काय? जर पदांची संख्या सांत असली, तर योग्य रीतीनें होय असें ह्मणण्यास कांहीं भ्रम नाहीं; परंतु जेव्हां पदांची संख्या अनंत आहे, तेव्हां जें पूर्वीं सर्व सांगितलें त्यावरून कांहीं उत्तर देववत नाहीं. जी श्रेणी उतरती केली जाईल, तिजवर मात्र वरची सिद्धता लागू होते, ही गोष्ट शिकणारानें मनांत धरावी.

वरची गोष्ट सिद्ध करायास या प्रमाणें ह्मणण्याची चाल आहे, कीं जेव्हां वरच्या दोन श्रेण्या बरोबर आहेत, आणि जेव्हां $क्ष=०$ तेव्हां ही त्या बरोबर आहेत, आणि यामुळें $अ_० = ब_०$. आणि या प्रमाणें पुढेंही. या पक्षांत असें ह्मणण्याची गरज नाहीं,

आणि हा सिद्धांत स्थापिला गेला असें ह्मणतां येईल. जेव्हां क्ष नियमित असून जा श्रेण्या उतरत्या केल्या जातील, त्यास र नेहमी बरोबर आहेत. तर जेव्हां क्ष=० असेल, तरीही त्या नेहमी बरोबर असतील.

बहुतेक श्रेण्यांचे सर्वधनाची नियतता काढण्याची रीति या पुढील कित्येक उदाहरणापासून समजांत येईल. पहिल्यानें, याप्रमाणें घे,

$$\text{प} = १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} + \text{क्ष}^{४} + \text{इत्यादि}$$

यांत प विषयीं एक नियमित बीजगणितानुरूप पद्धती काढण्याची इच्छा आहे. स्पष्ट आहे, कीं

$$१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{इत्यादि अनंत पावेतों} = १+\text{क्ष}\left\{१+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{इत्यादि अनंत पावेतों}\right\}$$

$$\text{ह्मणजे } \text{प} = १+\text{क्ष}\,\text{प} \quad \text{अथवा } \text{प} = \frac{१}{१-\text{क्ष}}$$

असें उत्तर पूर्वीं निघालें. आतां, याप्रमाणें घे,

$$\text{प} = १+२\text{क्ष}+३\text{क्ष}^{२}+४\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}$$

$$\frac{\text{प}-१}{\text{क्ष}} = २+३\text{क्ष}+४\text{क्ष}^{२}+५\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}$$

$$\frac{\text{प}-१}{\text{क्ष}} - \text{प} = १+\text{क्ष}+\text{क्ष}^{२}+\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि} = \frac{१}{१-\text{क्ष}}$$

यावरून, $$\text{प}\left\{\frac{१}{\text{क्ष}}-१\right\} = \frac{१}{१-\text{क्ष}} + \frac{१}{\text{क्ष}} = \frac{१}{\text{क्ष}}\cdot\frac{१}{१-\text{क्ष}}$$

अथवा $$\text{प} = \frac{१}{(१-\text{क्ष})^{२}}$$

आतां याप्रमाणें घे, $\text{प} = १+३\text{क्ष}+५\text{क्ष}^{२}+७\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}$

$$\frac{\text{प}-१}{\text{क्ष}} = ३+५\text{क्ष}+७\text{क्ष}^{२}+९\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}$$

$$\frac{\text{प}-१}{\text{क्ष}} - \text{प} = २+२\text{क्ष}+२\text{क्ष}^{२}+२\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि} = \frac{२}{१-\text{क्ष}}$$

यावरून $$\text{प} = \frac{१+\text{क्ष}}{(१-\text{क्ष})^{२}}.$$

आतां या प्रमाणें घे, $प = १+४क्ष+९क्ष^२+१६क्ष^३+$ इत्यादि

$$\frac{प-१}{क्ष} = ४+९क्ष+१६क्ष^२+२५क्ष^३+ \text{इत्यादि}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} - प = ३+५क्ष+७क्ष^२+९क्ष^३+ \text{इत्यादि}$$

$$\therefore \left(\frac{प-१}{क्ष} - प\right)क्ष+१ = १+३क्ष+५क्ष^२+७क्ष^३+९क्ष^४+ \text{इत्यादि} = \frac{१+क्ष}{(१-क्ष)^२}$$

यावरून $$प = \frac{१+क्ष}{(१-क्ष)^३}$$

वर लिहिलेल्ये श्रेण्याचे पदांचे नियमित संख्यांचे सर्वधनाविषयीं अधिक सरळ बीजगणितरूप पद्धती काढण्याकरितां वरचे साखिचीच रीति लावली जाईल. ह्मणजे या पुढील प्रमाणें घे,

$$प = १+२क्ष+३क्ष^२+ \cdots\cdots + (न-१)क्ष^{न-२} + नक्ष^{न-१}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} = २+३क्ष+४क्ष^२+ \cdots\cdots + नक्ष^{न-२}$$

$$\frac{प-१}{क्ष} - प = १+क्ष+क्ष^२ + \cdots\cdots + क्ष^{न-२} - नक्ष^{न-१}$$

१९३ पृष्ठाप्रमाणें $$= \frac{१-क्ष^{न-१}}{१-क्ष} - नक्ष^{न-१} = \frac{१-(न+१)क्ष^{न-१}+नक्ष^{न}}{१-क्ष}$$

$$प = \frac{नक्ष^{न+१} - (न+१)क्ष^{न} + १}{(१-क्ष)^२}$$

हें पुढील उदाहरण शिकणारानें सिद्ध करून दाखवावें:

$$१+३क्ष+५क्ष^२+ \cdots + (२न-१)क्ष^{न-१} = \frac{\overline{२न-१}क्ष^{न+१} - \overline{२न+१}क्ष^{न} + क्ष+१}{(१-क्ष)^२}$$

जी गोष्ट बहुत करून तपासावी लागत्ये, ती वरचे गोष्टीचे उलटी आहे; ह्मणजे श्रेणीचे पदांपासून सर्वधन काढावें असें नाहीं, परंतु, पद्धती सांगितली असतां, जा श्रेणीचें सर्वधन ती पद्धती आहे, त्या श्रेणीस काढण्याचें अथवा त्यांतल्ये कोणत्येही एक अक्षराचे घाताप्रमाणें त्या श्रेणीचा विस्तार करावयाचा आहे. मनांत आण कीं क्षचे घाताविषयीं त्याचे गु-

णक इत्यादि सुद्धां श्रेणीचीं पदें काढण्याची इच्छा आहे, जी श्रेणी उतरतीअसून सर्व पक्षांत $(१+क्ष) \div (१-क्ष)^२$ याचे बरोबर होईल. मनांत आण, कीं इच्छिली श्रेणी या प्रमाणें आहे, $अ_० + अ_१ क्ष + अ_२ क्ष^२ +$ इत्यादि, तर या प्रमाणें होईल

$$\frac{१+क्ष}{(१-क्ष)^२} = अ_० + अ_१ क्ष + अ_२ क्ष^२ + अ_३ क्ष^३ + \text{इत्यादि}$$

वरचे समीकरणाचे दोन बाजूस $(१-क्ष)^२$ अथवा $१-२क्ष+क्ष^२$ यानीं गुण, तर

$$१+क्ष = \left\{ \begin{array}{r} अ_० + अ_१ क्ष + अ_२ क्ष^२ + अ_३ क्ष^३ + \text{इत्यादि} \\ -२अ_० क्ष - २अ_१ क्ष^२ - २अ_२ क्ष^३ - \text{इत्यादि} \\ + अ_० क्ष^२ + अ_१ क्ष^३ + \text{इत्यादि} \end{array} \right\}$$

$$= अ_० + (अ_१ - २अ_०) क्ष + (अ_२ - २अ_१ + अ_०) क्ष^२ + \text{इत्यादि}$$

या समीकरणांत क्षचे प्रत्येक किमतीविषयीं दोन्ही बाजू बरोबर आहेत, म्हणून ३११ पृष्ठावरच्या सिद्धांता प्रमाणें हें पुढील होतें

$$अ_० = १ \qquad अ_१ - २अ_० = १ \quad \text{अथवा } अ_१ = ३$$

$$अ_२ - २अ_१ + अ_० = ० \qquad \text{अथवा } अ_२ = ५$$

$$अ_३ - २अ_२ + अ_१ = ० \qquad \text{अथवा } अ_३ = ७$$

इत्यादि इत्यादि

म्हणून श्रेणी या प्रमाणें होईल, $१+३क्ष+५क्ष^२+७क्ष^३+$ इत्यादि हें पूर्वीं सांगीतल्या प्रमाणें आहे.

या श्रेणीचें पहिलें पद लागलेंच काढतां येतें: कां कीं $क्ष=०$, याचीं उत्तरें कामांत आणिलीं जातात असें पूर्वीं सिद्ध झालें, आणि जेव्हां $क्ष=०$ होतें तेव्हां $(१+क्ष) \div (१-क्ष)^२$ अशानें १ उत्पन्न होतो, आणि श्रेणीचें रूप $अ_०$ होतें, तर $अ_० = १$.

$(१-क्ष^२) \div (१-क्ष)$ यास क्षचे घातांविषयीं श्रेणीचें रूप विस्तार

करून मांडिलें असतां काय होईल असा प्रश्न करितों ? वरप्रमाणें या श्रेणी-च्चें पहिलें पद १ आहे; तर या प्रमाणें कल्पना कर, कीं

$$\frac{१-क्ष^{४}}{१-क्ष}=१+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+अ_{४}क्ष^{४}+ \text{ इत्यादि}$$

$$१-क्ष^{४}=१+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+अ_{४}क्ष^{४}+अ_{५}क्ष^{५}+ \text{ इत्यादि}$$
$$-क्ष-अ_{१}क्ष^{२}-अ_{२}क्ष^{३}-अ_{३}क्ष^{४}-अ_{४}क्ष^{५}+ \text{ इत्यादि}$$

पहिल्ये बाजूस क्षच्चा पहिला घात नाहीं, तर $अ_{१}-१=०$, अथवा $अ_{१}=१$ असें होईल. यासारिखेंच $अ_{२}-अ_{१}=०$, अथवा $अ_{२}=अ_{१}=१$; $अ_{३}-अ_{२}=०$, अथवा $अ_{३}=१$. परंतु पहिल्ये बाजूस $क्ष^{४}$ याच्चा गुणक -१ आहे, यामुळें $अ_{४}-अ_{३}=-१$ अथवा $अ_{४}-१=-१$, म्हणजे $अ_{४}=०$; पुनः, $अ_{५}-अ_{४}=०$ अथवा $अ_{५}=०$, $अ_{६}-अ_{५}=०$, अथवा $अ_{६}=०$ आणि या प्रमाणें पुढेंही. यावरून श्रेणी यापुढील प्रमाणें आहे

$$१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+०\times क्ष^{४}+०\times क्ष^{५}+ \text{ इत्यादि}$$

अथवा $१+क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}$

असें उत्तर केवळ सरळ भागाकारानें, अथवा **१९३ पृष्ठावरच्चे** रीती प्रमाणें निघतें. म्हणजे, असें दिसतें, कीं जें परिमाण नियमित आहे तें दाखविण्यासाठीं जेव्हां एकादि अनंत श्रेणी घेतों, तेव्हां जें पद नियमित परिमाणांत नसलें त्या प्रत्येक पदाच्चा गुणक ० आहे असें श्रेणीच्चा गुणक काढण्याच्चा रीतीनें दाखविलें जाईल

पुनः, $१\div १+क्ष^{२}$ याच्चा विस्तार करून दाखविण्यासाठीं पुढील प्रमाणें घे,

$$\frac{१}{१+क्ष^{२}}=अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+ \text{ इत्यादि}.$$

वरच्चे कृतीवरून या पुढील प्रमाणें होईल

$अ_{०}=१$ $\quad$ $अ_{२}+अ_{०}=०$ अथवा $अ_{२}=-१$ $\quad$ $अ_{४}+अ_{२}=०$ अथवा $अ_{४}=१$

$अ_{१}=०$ $\quad$ $अ_{३}+अ_{१}=०$ अथवा $अ_{३}=०$ $\quad$ $अ_{५}+अ_{३}=०$ अथवा $अ_{५}=०$

ह्मणून श्रेणी याप्रमाणें होईल

$$१+०\times क्ष-क्ष^{२}+०\times क्ष^{३}+क्ष^{४}+०\times क्ष^{५}$$ इत्यादि.

अथवा $१-क्ष^{२}+क्ष^{४}-क्ष^{६}+$ इत्यादि.

आतां दोन बाजू गुणकांचे किमतीविषयीं कोणत्येही कल्पनेनें एकरूप करवत नाहीं, असें एक समीकरण जर वरचे कृतीवरून निघतें, तर त्यावरून असें कळतें, कीं दिलेल्या पद्धतीस सांगीतल्या श्रेणीचें रूप देतां येत नाहीं. जर $१\div(१+क्ष)क्ष$ यास श्रेणीचें रूप देण्यास या पुढीलप्रमाणें घेतलें ह्मणजे

$$\frac{१}{क्ष(१+क्ष)}=अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+ इत्यादि$$

तर या पुढील प्रमाणें निघेल

$$१=अ_{०}क्ष+(अ_{१}+अ_{०})क्ष^{२}+(अ_{२}+अ_{१})क्ष^{३}+ इत्यादि$$

कशीही कल्पना केली तरी या दोन बाजू सारिख्या करितां येत नाहीं; कांकीं १ याचे बरोबर केलें आहे असे दुसऱ्या बाजूस क्ष चे संबंधावांचून कोणतेंही पद नाहीं. सारांश याप्रमाणें निघेल

$$\frac{१}{१+क्ष}=१-क्ष+क्ष^{२}-क्ष^{३}+ इत्यादि$$

$$(\div)क्ष,\ \frac{१}{क्ष(१+क्ष)}=\frac{१}{क्ष}-१+क्ष-क्ष^{२}+ इत्यादि$$

ह्मणून असें या पक्षांत $क्ष^{-१}$, असें ऋण घातप्रकाशक चिन्ह आणिल्याशिवाय, या अपूर्ण पद्धतीस क्षचे **धन** आणि पूर्ण घातांचे सारिणीचें रूप देतां येत नाहीं.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें दिलीं आहेत:

१. जर $प=अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+$ इत्यादि तर

$$\frac{प}{१-क्ष}=अ_{०}+(अ_{०}+अ_{१})क्ष+(अ_{०}+अ_{१}+अ_{२})क्ष^{२}+ इत्यादि$$ असें होईल.

आणि $$\frac{प}{१+क्ष}=अ_{०}+(अ_{१}-अ_{०})क्ष+(अ_{२}-अ_{१}+अ_{०})क्ष^{२}+ इत्यादि$$ असें होईल.

२. $\frac{१}{१+क्ष+क्ष^{२}} = १ - क्ष + क्ष^{३} - क्ष^{४} + क्ष^{६} - क्ष^{७} +$ इत्यादि.

३. $\frac{१+कक्ष}{क+क्ष} = \frac{१}{क} - \left(\frac{१}{क^{२}} - १\right) क्ष + \left(\frac{१}{क^{३}} - \frac{१}{क}\right) क्ष^{२} -$ इत्यादि.

४. $\frac{म+नक्ष}{प+कक्ष} = \frac{म}{प} - \left(\frac{मक}{प^{२}} - \frac{न}{प}\right) क्ष + \left(\frac{मक^{२}}{प^{३}} - \frac{नक}{प^{२}}\right) क्ष^{२} -$ इत्यादि

नववा अध्याय.

अंकगणितांतील बरोबरी शब्दार्थाहून भिन्न, अशा बीजगणितांतील बरोबरीशब्दाचे अर्थाविषयीं.

१३९ पृष्ठावर, शब्दांचे विस्तारामध्यें, असें सांगीतलें, कीं कोणत्याही दोन पद्धतींतून एक दुसरीचे आगीं चुकीवांचून मांडलीजाईल, त्या ठिकाणीं बरोबर हा शब्द लावायाजोगा आहे असें मानलें गेलें. यापूर्वी धन किंवा ऋण अशा नियमित बीजगणितरूप परिमाणास मात्र हा विस्तार लागू केला: पद्धतीचे परिमितीचा निश्चय अंकगणितरूप किंमतीवरून होतो, आणि समोरासमोरचे संबंधांतून कोणता सांगायाचा मनांत योजिला आहे हें मात्र बरोबरीचें चिन्ह दर्शवितें. आतां बरोबर हा शब्द, अथवा त्याचें चिन्ह = याचा विचार करितों, आणि त्याचा व्याख्यानापासून जो अर्थ होईल त्या अर्थाहून अधिक विस्तीर्ण अर्थानें त्याचाविचार करीत नाहीं, परंतु जा अर्थानें पूर्वी त्या शब्दास कामांत घेतला त्याहून विस्तीर्ण अर्थानें त्याचा विचार करितों.

जेव्हां दोन परिमाणांतून एक परिमाण दुसऱ्याचे आगीं चुकीवांचून मांडिलें जाईल, तेव्हां तीं दोन परिमाणें बरोबर आहेत असें ह्मणतात. या व्याख्यानाचा अभिप्राय या पुढील प्रश्नाचे उत्तरांत आहे, चूक ह्मणजे काय? उत्तर हेंच आहे, कीं जेणेंकरून विरुद्ध उत्तरें निघतात, अथवा जेणेंकरून शुद्धरीतीनें कृती करीत असतां विरुद्ध उत्तरें निघतात, तिचें नाव चूक.

जेव्हां दोन उत्तरें समजायाजोगीं आहेत अथवा त्यांपासून अर्थनि-

घण्यास योग्य आहे, असें असतां ही जर तीं दोन्हीं परस्पर मिळत नाहीं, तर तीं उत्तरें विरुद्ध आहेत; परंतु त्यांतून एक किंवा दोन ही समजायाजोगीं नसतील, या कारणावरूनच केवळ तीं उत्तरें विरुद्ध आहेत असें ह्मणवत नाहीं. कांकीं जेव्हां प्रतिज्ञेचा कोणत्याही भागाचा अर्थ ठाऊक नसतो, तेव्हां ती खरी किंवा खोटी आहे हें सांगवत नाहीं. उदाहरण, ८४ पृष्ठावरील $क्ष = \frac{क}{०}$ ही पद्धती तिचे मागील विषयाशीं कांहीं विरुद्ध नवती, कांकीं $\frac{क}{०}$ यास कांहीं पूर्वी अर्थ नवता. असा निश्चय झाल्यानंतर त्याचे पूर्वीचे मूळ कारणापासून जें कांहीं निघण्यास शक्य होतें त्याशीं विरुद्ध नहोई असा अर्थ यावा हा अभिप्राय होता.

वर दाखविलें गेलें, कीं जर एकमापेक्षां क्ष कमी असेल, तर $१ + क्ष + क्ष^२ +$ इत्यादि याचे पदांचे बेरिजेपासून उत्तरोत्तर $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे अधिक जवळ उत्तरें निघतील, तथापि अशा कृतीपासून तीं उत्तरें अगदीं त्याचे बरोबर होणार नाहीं. यावरून या पुढील समीकरणांत = हें चिन्ह कामांत घेतलें

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

या समीकरणाचे दुसऱ्ये बाजूचीं पुरतेपणीं पदें घेतलीं, तर **अंकगणितानुरूप** बोलण्याप्रमाणें, त्याचा दोन बाजू हव्या तेवढ्या जवळ जवळ बरोबर केल्या जातील. बीजगणितानुरूप बोलण्याप्रमाणें, वरचा दोन बाजू अगदी खऱ्या आहेत असें मानलें जाईल; परंतु दुसऱ्या बाजूचीं सर्व पदें **मांडिलेलीं** असलीं किंवा **तीं तेथें आहेत अशीं कल्पिलेलीं असलीं**, तरी तीं त्यांत आहेत असें मानलें जाईल. या कल्पनेवरून मात्र वरचें समीकरण खरें आहे, परंतु ही कल्पना अंकगणितरूपानें अशक्य आहे, हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे. उदाहरण, समीकरणाची पहिली बाजू $१-क्ष$ यानीं गुणून त्याचा गुणाकार $१+क्ष$ होतो; त्याच परिमाणानें दुसरी बाजू गुणिली असतां गुणाकार या पुढील प्रमाणें होतो,

$$\left\{\begin{array}{l} १ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + क्ष^{४} + क्ष^{५} + \text{इत्यादि अनंत पावेतों} \\ \qquad\qquad - क्ष^{२} - क्ष^{३} - क्ष^{४} - क्ष^{५} + \text{इत्यादि अनंत पावेतों} \end{array}\right.$$

अथवा $१ + क्ष + ० + ० + ० + ० +$ इत्यादि अनंत पावेतों

यांत पाहिजे तर प्रत्येक पुढलें पद ० होईल, असें सिद्ध केलें जाईल: श्रेणीचें प्रत्येक पद प्रत्यक्ष तपासून पहाण्यास अशक्य, म्हणून अशानें सिद्ध होत नाही, परंतु श्रेणीचे जे नेम ठाऊक आहेत, त्यांचे अनुमानावरून सिद्ध होतें. या सारिखें हें ही दाखविलें जातें. कीं $क्ष^{म} \times क्ष^{न} = क्ष^{म+न}$; याचे प्रत्येक पक्ष पहाण्यास अशक्य, म्हणून अशानें दाखविलें जात नाहीं, परंतु $क्ष^{न}$ याचा अर्थ ठाऊक आहे म्हणून त्यावरून दाखविलें जातें.

जर अंकगणितरूपानें चालून, हवीं तितकीं पुष्कळ पदें घेतलीं, म्हणजे $क्ष^{न}$ पर्यंत घेतलीं, तर या पुढील प्रमाणें होईल

$$(१ + क्ष + क्ष^{२} + \cdots\cdots + क्ष^{न-१} + क्ष^{न}) \times (१ - क्ष)^{२}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} १ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + \cdots + क्ष^{न-१} + क्ष^{न} \\ \qquad - क्ष^{२} - क्ष^{३} - \cdots - क्ष^{न-१} - क्ष^{न} - क्ष^{न+१} - क्ष^{न+२} \end{array}\right.$$

$$= १ + क्ष - क्ष^{न+१} - क्ष^{न+२}$$

यांत १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर न इतका मोठा घेतला जाईल, कीं इच्छे प्रमाणें $क्ष^{न+१}$ आणि $क्ष^{न+२}$ हवे तेवढे लहान केले जातील. या ठिकाणीं बीजगणितरूपाची बरोबरी आहे, म्हणून ती अंकगणितरूपाचे बरोबरीचे हवी तेवढी जवळ जवळ केली जाईल.

आतां अशी कल्पना कर, कीं १ पेक्षां क्ष मोठा आहे; म्हणजे क्ष = २, असें घे, तर

$$१ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + \text{इत्यादि अनंत पावेतों}$$

ही श्रेणी, गणितानुरूप भाषे प्रमाणें अनंत आहे, कां कीं $१ + २ + ४ + ८ +$ इत्यादि यांची बेरीज केल्यानें जी परिमिती येईल, तीस नियतता नाहीं. तर याची श्रेणी आणि $\frac{१}{१-क्ष}$ या दोहोंमध्यें बीजगणितरूप बरोबरी आहे असें स-

चित ह्मणतां येईल कीं काय? ८१ इत्यादि एष्ठाचे गोष्टीवरून असें ह्मणण्यास योग्य नाहीं, कांकीं $\frac{अ}{०}$ याची अंकगणित रूपानें गणना होत नाहीं, ही गोष्ट कशी स्पष्ट करावी हें जरीं तेथें दाखविलें, तथापि त्यापासून त्याचे उलटे विषयाचा बोध होत नाहीं, ह्मणजे जें कांहीं अंकगणित रूपानें गणलें जातें, त्यास $\frac{अ}{०}$ याणें दर्शवायास योग्य आहे. तर वरचे श्रेणीचा योग्य बीजगणितरूप दर्शक काय आहे? कांहीं दर्शक असेल, तर त्यास दाखविण्यासाठीं प घे; आतां वरचे श्रेणीचें रूप या पुढील प्रमाणें आहे,

$$१+क्ष\ \{१+क्ष+क्ष^{२}+ \text{ इत्यादि अनंत पावेतों}\}$$

जर प याचेजागीं १+क्ष प मांडितां येत नाहीं, तर वरची पहली दाखविण्यासाठीं प कामांत घेउं शकत नाहीं. ह्मणून या पुढील प्रमाणें असलें पाहिजे

$$प=१+क्षप \text{ यापासून } प=\frac{१}{१-क्ष}$$

जेव्हां १ पेक्षां क्ष कमी होता तेव्हां हेंच उत्तर निघालें होतें. आणि मागल्ये एष्ठाचे रीतीप्रमाणें हें ही दाखवितां येईल, कीं $\frac{१}{१-क्ष}$ याशीं किंवा १+क्ष+क्ष^{२}+ इत्यादि यांशीं कशीही बीजगणित रूप कृती केली, तरी दोहोंपासून सारखेंच उत्तर निघतें: खरें ह्मटलें असतां, बीजगणितरूप गुणाकार कृतींत, जीं परिमाणें कामांत आणितात तीं धन असावीं असा कांहीं संकेत नाहीं, ह्मणून ज्या पक्षांत १ पेक्षां क्ष मोठा आहे, त्या पक्षास मागील एष्ठांत जी कृती कामांत आणिली ती बरोबर लागू होत्ये. परंतु मागील एष्ठाप्रमाणें या पक्षीं अंकगणित रूपाची बरोबरी होत नाहीं, परंतु त्याचे केवळ उलटें घडतें; कांकीं जसजसा न वाढत जातो, तसे क्ष$^{न+१}$ आणि क्ष$^{न+२}$ हे घटण्याचेजागीं अधिक अधिक वाढत जातात.

३१४ इत्यादि एष्ठांवर बीजगणितरूप परिमाणांच्या विस्तार करण्याची रीति सांगितली, त्यांत क्ष उतरत्ये श्रेणीचे नियततेंत असावा असें अगत्य नाहीं: परंतु ती कृती सर्व पक्षांस ही निश्चित लागू होत्ये. उदाहरण, जर $\frac{१}{१+क्ष}$ याचा विस्तार करायाचा असेल, तर हें विचारितों, कीं अ$_{०}$+अ$_{१}$क्ष+इत्यादि

या रूपाचा कोणकोणत्या पद्धती $\frac{१}{१+क्ष}$ याचे सारिख्या होतील. $\frac{१}{१+क्ष}$ यास १+क्ष यानीं गुणिलें असतां, १ होतो, इतकें मात्र या पद्धतीविषयीं ठाउक आहे. क्षचे किमतीचे संबंधरहित, १ − क्ष + क्ष² − क्ष³ + इत्यादि या श्रेणींसही तसाच गुण आहे.

आतां या पुढील दोन गोष्टींचा विचार करितों; ह्मणजे, पहिल्यानें, कीं = हें चिन्ह साधारण रीतीनें कामांत घेतलें असतां, कांहीं विरुद्ध उत्तरें निघणार नाहींत असें जोंपर्यंत उदाहरणावरून दाखविलें जाईल हें सिद्ध करतों: दुसऱ्यानें, अशी आतीचे सिद्धतेवर आश्रय ठेवण्याची गरज पडत नाहीं, परंतु जें उत्तर निघतें तें मूळ कल्पनांचे गुणांपासून अवश्य होतें.

वरची पहिली गोष्ट तपासण्यासाठीं, सर्व पक्षांत, **ही पुढील कल्पना खरी आहे असें मनांत घे,**

$\frac{१}{१+क्ष}$ = १ − क्ष + क्ष² − क्ष³ + क्ष⁴ − इत्यादि अनंत पावेतों

जर क्ष = १, तर वरची पद्धती या प्रमाणें होईल,

$\frac{१}{२}$ = १ − १ + १ − १ + १ − इत्यादि अनंत पावेतों

असें उत्तर कोणत्याही अर्थानें, अंकगणितरूपाचे बरोबरीची पद्धती नाहीं; कांकीं ती श्रेणी विस्तार करून पदांची समसंख्या घेतली असतां अवश्य ० होईल, आणि पदांची विषमसंख्या घेतली असतां, १ होईल. कोणत्येही परिमाणाशीं त्याच परिमाणाची प्रथम मिळवणी आणि नंतर लागलीच वजाबाकी, असा क्रम अनंत पावेतों करून त्याशीं बीजगणितरूप कृती केली असतां, उत्तर त्या परिमाणाचे अर्धा बरोबर होईल कीं नाहीं याचा आतां विचार करितों. मनांत आण, कीं

$$\left.\begin{array}{rcl} प &=& १ + क्ष + क्ष^२ + क्ष^३ + \text{ इत्यादि} \\ -प &=& -१ - क्ष - क्ष^२ - \text{ इत्यादि} \\ +प &=& +१ + क्ष + \text{ इत्यादि} \\ -प &=& -१ - \text{ इत्यादि} \end{array}\right\} \quad (अ)$$

$\therefore$ प − प + प − इत्यादि = १ + (क्ष − १) + (क्ष^{२} − क्ष + १) + इत्यादि

१९३ पृष्ठावरून (×) $\frac{क्ष+१}{क्ष+१} = \frac{क्ष+१}{क्ष+१} + \frac{क्ष^{२}-१}{क्ष+१} + \frac{क्ष^{२}+१}{क्ष+१}$ + इत्यादि

$$= \frac{क्ष+क्ष^{२}+क्ष^{३}+\text{इत्यादि}}{क्ष+१} + \frac{१-१+१-\text{इत्यादि}}{क्ष+१}$$

परंतु प $= \frac{१}{१-क्ष}$ आणि क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + इत्यादि = क्ष(१ + क्ष + क्ष^{२} + इत्यादि) $= \frac{क्ष}{१-क्ष}$; यामुळें, जर वरची कृती $\frac{१}{१-क्ष}$ याचे अर्ध करण्याचे कृतीशीं बीजगणित रूपानें बरोबर असेल, आणि जर १ − १ + १ − १ + इत्यादि हे $\frac{१}{२}$ या रूपाचे केले जातील, तर हें पुढील समीकरण होईल :

$$\frac{१}{२}\,\frac{१}{१-क्ष} = \frac{\frac{क्ष}{१-क्ष}}{क्ष+१} + \frac{१}{२}\,\frac{१}{क्ष+१}$$

अथवा $$\frac{१}{२}\,\frac{१}{१-क्ष} = \frac{क्ष}{१-क्ष^{२}} + \frac{१}{२}\,\frac{१}{क्ष+१}$$

हें खरें आहे असें दिसतें.

१ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + इत्यादि

− १ − क्ष − क्ष^{२} − क्ष^{३} − इत्यादि

इत्यादि इत्यादि

अथवा (१ − १ + १ − इत्यादि) + (क्ष − क्ष + क्ष − इत्यादि)

या वरच्या रूपाबद्दल या पुढील रूपानें (ख) ही श्रेणी मांडण्याची बीजगणितरूप कृति वरचे उदाहरणांत आहे, ह्मणजे

१ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + इत्यादि

− १ − क्ष − क्ष^{२} − इत्यादि

इत्यादि इत्यादि

परंतु = या चिन्हास प्रत्येक बीजगणित रूपाचे कामांत आणण्यानें गणितरूपाच्या बरोबऱ्या उत्पन्न होतील असें ह्मणवत नाहीं, परंतु जेव्हां

कधीं — हे चिन्ह बीजगणितरूपानें कामांत आणिल्यानें अंकगणितानुरूप समीकरण उत्पन्न होतें, तेव्हां दिसण्यांत येईल, कीं तें समीकरण अंकगणितरूपानें खरें आहे; असें ह्मणतां येईल: या प्रतिज्ञेविषयीं अद्यापि कोठें विरोध आला नाहीं.

आतां वरची दुसरी गोष्ट तपासून पहातों.

बीजगणिताचे मूळभूत चिन्हांचे अर्थांची यापूर्वीं अशी योजना केली आहे, कीं त्या योजनेने कित्येक पक्षांत बीजगणित अंकगणिताशीं अगदी मिळतें; आणि इतकेंच केवळ नाहीं, तर व्याख्यानापासून जा रीती निघतात, त्या अशा योजिल्या आहेत, कीं जेव्हां उत्तर केवळ गणितरूपाचें असून कृतींतील त्याचे पूर्वींचा पायऱ्या बीजगणितरूपाचा असतात, तेव्हां त्या पायऱ्या अंकगणितरूप करायास जे फेर करावे लागतात, त्यांपासून उत्तरांत कांहीं फेर होणार नाहीं, असेंही घडतें. आरंभीं असें असून, आणि याशिवाय बीजगणितरूप कृतीनें कितीही पायऱ्या झाल्या तरी वरचे गोष्टीचा गुण फिरत नाहीं, हें उघड दाखविलें गेलें, यावरून या पुढील दोन गोष्टी कळतात. ह्मणजे पहिल्यानें, जीं अंकगणित कृतीनें उत्तरें निघतात त्यांजवर जितका खरेपणाचा भरंवसा ठेविला जातो, तितका खरेपणाचा भरंवसा जीं सर्व अंकगणितरूपाचीं उत्तरें निघतात त्यांजवरही ठेविला जाईल; दुसऱ्यानें, सगळीं उत्तरें जीं अंकगणितानें दाखविलीं जात नाहीं, तथापि वरचे सांगीतल्या व्याख्यानाशीं तीं पुरीं संगतवार आहेत; आणि जरवीं सर्वदां अंकगणितरूपानें खरीं नसतील, तरी त्यांपासून अंकगणितरूपाचें असून खोटें असें उत्तर येण्यास अशक्य.

बीजगणिताचें भाषण कसें कामांत आणावें याचा परिचय झाल्यावांचून वरचा भाषणांत जे शब्द आहेत त्यांचा पुरतेपणीं बोध होणार नाहीं आणि तो बोध झाल्यावांचून वरचा संवाद जो सर्वपक्षीं साधारण जातीचा आणि कठीण आहे, तो नव्ये शिकणारास पुरतेपणीं समजणार नाहीं, या कारणास्तव तो उघड करायास उदाहरणें दिलीं आहेत. याशिवाय **बीजगणितरूप रहित,**

तर्क करण्याचीं मूळकारणें हीं आहेत*, आणि तीं कठीण आहेत, यामुळें त्यांची माहितगारी केवळ बीजगणितानें नवे शिकणारास होणार नाहीं, तशीजातीचा एक तर्क या पुढील प्रमाणें आहे: ह्मणजे, जर प्रतिज्ञा परस्पराशीं विरुद्ध नसून योग्यतेनें आणि तर्कानुसारानें कामांत घेतल्या, तर त्यांपासून जे परिणाम निघतात, ते परस्परांस विरुद्ध होण्यास अशक्य. ही प्रतिज्ञा संपूर्णअर्थानें जरी नवे शिकणारास समजून घेण्यास फार कठीण आहे, तथापि तो कठीणपणा बीजानुरूपाचा नाहीं.

जेव्हां अंकगणितरूप उत्तर येतें, तें जाकृतीचे पायऱ्यांपासून निघतें, त्या पायऱ्या मुळीं जर अंकगणितरूपाचा नसल्या, तथापि त्यांस अंकगणितरूप दिलें जाईल, असें वर सांगीतलें गेलें अथवा सुचविलें गेलें. ४+५=९

* परिमाणविद्यानुरूप तर्क, याचा अर्थ परिमाण विद्येस तर्क लावणें असा आहे, आणि दुसऱ्या कोणत्येही प्रकारचे तर्काहून भिन्न नाहीं, हें लक्षांत ठेविलें पाहिजे. तर्ककरण्याची संवय परिमाणविद्येनें होत्ये, परंतु त्या परिमाणविद्येनें तर्कविद्या शिकविलीजात नाहीं; आणि तर्कांचे प्रत्येक दुसऱ्ये प्रकारांमध्यें जीं मूळकारणें कामांत आणितात, त्यांशिवाय परिमाणविद्यावानास कोणतेंही दुसरें मूळकारण कामांत आणावयाची गरज पडत नाहीं. खरें ह्मटलें असतां, ही गोष्ट उलटी आहे, कांकीं दुसऱ्ये प्रकारचे तर्कांची मूळकारणें परिमाणविद्येचे बहुतेक प्रकारांत लागू पडत नाहीं अशीं असतात, जा लोकांस ही वरची गोष्ट ठाऊक नाहीं त्यांचे मनांत असें वाटतें, कीं परिमाणविद्यानुरूप जी उपपत्ती ती दुसऱ्ये सर्वजातीचे उपपत्तीहून भिन्न आहे.

परंतु ही गोष्ट अशी नव्हे; परिमाणविद्यानुरूप उपपत्ती, जेथपर्यंत लागू होत्येतेथपर्यंत ती दुसऱ्या सर्वप्रकारचे उपपत्ती सारिखीच आहे, आणि तर्क करण्याचे रीतींत परिमाणविद्येचा उत्तमपणा नाहीं, परंतु इतर साधारणविषयावर तर्क करणारानें लक्ष्य आपले विषयावर जितकें असतें, त्यापेक्षां परिमाणविद्यावानाचें लक्ष्य आपले विषयावर अधिक असतें. जें कांहीं मोजलें किंवा मापलें जातें त्यावर परिमाणविद्या लागू होत्ये; आणि याशिवाय इतर विषयावर परिमाणविद्यानुरूप

यांत बरोबरीची पूर्ण कल्पना दिसल्ये, केवळ यांसच अंकगणितरूपाची बरोबरी ह्मणावी असें नाहीं, परंतु जवळजवळचा बरोबरींस, ही अंकगणितरूपाची बरोबरी ह्मणतात, ह्मणजे तें यापुढील उदाहरणांत दिसेल.

$$\frac{१}{१-\frac{१}{२}}$$ अथवा २=१+ $\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{४}$ + $\frac{१}{८}$ + इत्यादि अनंत पावेतों.

आतां मनांत आण, कीं १ पेक्षां अ कमी आहे, परंतु अशी कल्पना करकीं इच्छे प्रमाणें हवा तेवढा १ याचे जवळ असेल. आणि १ पेक्षां क्ष कमी आहे असें मनांत आण, ह्मणून शेवटील समीकरणाची अंकगणितरूपाची स्थिती होण्यास क्ष असा असण्याचें अगत्य आहे; यावरून या पुढील

उपपत्ती लागू करून, तिजविषयीं जो कोणी बोलतो त्याचे मनांतील अभिप्राय हाच, कीं ती उपपत्ती तर्कानुसार किंवा नियमितजातीची आहे, आणि त्याचा अभिप्राय असा नसल्यास, जाविषयीं तो बोलत असतो तो विषय त्यास नसमजतां तो बोलतो असें जाणावें.

जे या परिमाणविद्यानुरूप तर्कास तुच्छ मानितात, ते मुख्यत्वें करून, परिमाणविद्येचे प्रतिवादी आहेत; आणि जे परिमाणविद्यावान आहेत त्यांचानें दुसऱ्या विषयावर खरे तर्क करवत नाहीं, असा शोध लाविला ह्मणून जय मानून ते परिमाणविद्येस तुच्छ मानितात.

---

* एथें अंकगणिताची मर्यादा सुटत नाहीं. ह्मणजे $\sqrt{१०}$, $\sqrt[३]{११}$ इत्यादि यांसजवळजवळ याशिवाय दुसरी स्थिती नाहीं; असे अपूर्णांक काढितां येतात जे परस्पर गुणून इच्छे प्रमाणें हवे तेवढे १० चे जवळजवळ होतील, आणि १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, इत्यादि पदांची बेरीज घेतल्यानें इच्छे प्रमाणें हवी तेवढी २ चे जवळजवळ होईल.

प्रमाणें होईल.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{१}{१+\text{अ}} = १ - \text{अ} + \text{अ}^{२} - \text{अ}^{३} + \text{इत्यादि} \\ \frac{१}{१-\text{क्ष}} = १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} + \text{इत्यादि}\end{array}\right\} \text{अंकगणित रूपानें} \begin{array}{l}\cdots\cdots(१) \\ \cdots\cdots(२)\end{array}$$

$$\begin{aligned}\frac{१}{१+\text{अ}} \cdot \frac{१}{१-\text{क्ष}} = {} & १ + \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} + \text{इत्यादि} \\ & - \text{अ} - \text{अक्ष} - \text{अक्ष}^{२} - \text{इत्यादि} \\ & + \text{अ}^{२} + \text{अ}^{२}\text{क्ष} + \text{इत्यादि} \\ & - \text{अ}^{३} - \text{इत्यादि}\end{aligned}$$

$$\text{अ} > \text{क्ष अशी कल्पनेनें} = १ - (\text{अ} - \text{क्ष}) + (\text{क्ष}^{२} - \text{अक्ष} + \text{अ}^{२}) - \text{इत्यादि}$$

$$= \frac{\text{अ}+\text{क्ष}}{\text{अ}+\text{क्ष}} - \frac{\text{अ}^{२}-\text{क्ष}^{२}}{\text{अ}+\text{क्ष}} + \frac{\text{अ}^{३}+\text{क्ष}^{३}}{\text{अ}+\text{क्ष}} - \text{इत्यादि}$$

$$= \frac{\text{अ} - \text{अ}^{२} + \text{अ}^{३} - \text{इत्यादि}}{\text{अ}+\text{क्ष}} + \frac{\text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{३} + \text{इत्यादि}}{\text{अ}+\text{क्ष}}$$

$$= \frac{\text{अ}}{१+\text{अ}} \cdot \frac{१}{\text{अ}+\text{क्ष}} + \frac{\text{क्ष}}{१-\text{क्ष}} \cdot \frac{१}{\text{अ}+\text{क्ष}}$$

१ पेक्षां अ कमी घेतला, मग तो कितीही थोडा असला तरी कांहीं चिंता नाहीं. तर अशी कल्पना आहे तोपर्यंत वरची कृती अंकगणित रूपाची आहे; परंतु अ = १ अशी कल्पना करितांच वरचें १. या समीकरणाचें अंकगणितरूप नाहींसें होतें. तथापि या शेवटील समीकरणाचें रूप ३२२ पृष्ठाचे समीकरणाप्रमाणें होतें.

वर फार सरळ पक्ष दाखविला, परंतु पुरती विस्तार कृती करून आणि तऱ्हेतऱ्हेचा कृप्ती घेऊन कोणत्याही बीजगणितरूप बरोबरीला अंकगणितरूप बरोबरीस आणितां येईल. परंतु असें करायास एकदांच तोकडी आणि साधारण अशी रीति अद्यापि शिकणारास समजणार नाहीं.

मनांत आण, कीं पहिल्यानें क्ष धन आहे. नंतर त्यास ० होऊं दे, आणि त्यानंतर तो ऋण होऊं दे. तर हा पुढील कोष्टक आणि त्यासारिखे दुसरे कोष्टकही रचिले जातील.

क्षचें चिन्ह	+	०	−
$\frac{१}{क्ष}$ याचें चिन्ह	+	∞	−
$क्ष^{३}$	+	०	−
$\frac{१}{क्ष^{३}}$	+	∞	−
$क्ष^{२}$	+	०	+
$\frac{१}{क्ष^{२}}$	+	∞	+

या आणि याशिवाय दुसऱ्या उदाहरणापासून, हें पुढील मूळ कारण निघतें : **जर क्ष, अ पासून ब कडे त्यांचे मधील सर्व किंमतींतून जातांना क्ष चे फङ्शनाचें चिन्ह धनापासून ऋणाकडे जातें, अथवा ऋणापासून धनाकडे जातें, तेव्हां ज्या ठिकाणीं तो फेर होतो, ती जागा क्षची किंमत शून्य किंवा अनंत या चिन्हानीं दर्शवितात; परंतु याची उलट ह्मणजे फङ्शनाची किंमत जेव्हां शून्य किंवा अनंत होत्ये, तेव्हां त्याचें चिन्ह नेहेमी बदलावें ही गोष्ट खरी नाहीं.**

यांत जी अनंतता सांगितली ती $\frac{अ}{०}$ या रूपाची आहे; परंतु पूर्वी पाहिलें, कीं अंकगणितरूप अनंतता संपादायास ह्मणजे अंक अनियत वाढविण्याचा सगळ्या अंकगणितानुरूप रीति, $\frac{अ}{०}$ याणें योग्य दर्शविल्या जात नाहीं. जर हें पुढील समीकरण घेतलें,

$$\frac{१}{१-क्ष} = १ + क्ष + क्ष^{२} + क्ष^{३} + \text{इत्यादि अनंत पावेतों.}$$

तर पहाण्यांत येतें कीं जेव्हां १ पेक्षां क्ष अधिक आहे, तेव्हां अंकगणितरूपाचे भाषेप्रमाणें समीकरणाची दुसरी बाजू अनियत अंक सांपडायाची रीतिमात्र दाखवित्ये, आणि पहिली बाजू ऋण होत्ये. $\frac{१}{२}$ पासून २ पर्यंत जेव्हां क्ष जातो तेव्हां चिन्हाची बदल होत्ये असें मनांत आण, आणि जेव्हां क्ष = १ होतो तेव्हां ती बदल होत्ये, तिजपासून या प्रमाणें होतें.

$$२ = १ + \frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८} + \text{इत्यादि.}$$

$$\frac{१}{०} = १ + १ + १ + १ + \text{इत्यादि.}$$

$$-\frac{१}{१} = १ + २ + ४ + ८ + \text{इत्यादि.}$$

यामुळें असें दिसतें, कीं चढती श्रेणी ऋण परिमाणाची बीजगणितानुरूप दर्शक होईल : परंतु

$$\frac{१}{(१-क्ष)^{२}} = १+२क्ष+३क्ष^{२}+४क्ष^{३}+ \text{इत्यादि}$$

यांत १ पेक्षां क्ष मोठा असेल, तेव्हां ही श्रेणी चढती आहे, आणि सर्वपक्षांत त्यापासून त्याचें उत्तर धन येईल. यापासून असें दिसतें, कीं जर अनंत **श्रेणीविषयीं विचार आहे, आणि सांगीतली बरोबरी शुद्ध बीजगणितरूपाची आहे, तेव्हां कोयात्येही अंकगणितरूपाचे ताडण्याचे रीतीनें परिमाणाचें ताडणें होणार नाहीं.** म्हणजे, जर अ पेक्षां अ मोठा असेल, ब पेक्षां ब मोठा असेल, इत्यादि तर असें म्हणवतें, कीं अ+ब+ इत्यादि यापेक्षां अ+ब+ इत्यादि मोठे आहेत : परंतु पहिल्यानें दोहोंचीं पदें जोपर्यंत नियमित आहेत; आणि दुसऱ्यानें अ, ब, इत्यादि यांचा संबंध असा असावा कीं अ+ब+ इत्यादि सांगीतल्ये नियततेचे वर जाणार नाहीं, तर वरची गोष्ट घडेल परंतु जेव्हां अ+ब+ इत्यादि अनियत वाढतात तेव्हां वरचे सारिखा सारांश काढवत नाहीं; आणि याकारणास्तव १+२+४+८ इत्यादि याची बीजगणितानुरूप पद्धती $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि या पद्धतीपेक्षां अधिक आहे असेंही म्हणवत नाहीं.

ही वरची रीति कधीं सोडिली जात नाहीं कां कीं परिमाणावर जो तर्क चालवावा तो तर्क लागू न होई असें झाल्याचे पूर्वीं जें परिमाण घेतलेलें असतें तें अंकगणिताचे विषयाचे बाहेर जातें. **तर लक्ष्यांत ठेवावें कीं चढत्ये श्रेणीविषयीं, जीं उत्तरें बरोबरीचा अशा नियत बीजानुरूप पद्धतीचे ताडण्यापासून निघतात तीं घेतात, त्यांशिवाय दुसरीं कोणतींही ताडण्यापासून निघालेलीं उत्तरें मान्य केलीं जात नाहीं.**

दहावा अध्याय.

फङ्क्शन गणिताविषयीं.

क्षचें **फङ्क्शन** ह्मणजे काय तें पूर्वीच सातवे अध्यायाचे **१ प्रष्टांत** सांगीतलें: एकाद्या अव्यक्त फङ्क्शनास नियमित चिन्ह देण्याचें असतें, अथवा फङ्क्शनास संक्षेप रूपानें मांडण्याचें असतें, ह्मणून या अध्यायांत फङ्क्शनास मांडण्याची रीति दाखविली आहे.

$\text{क्ष}^{२}$+अक्ष इत्यादि पद्धतींत जा रीतीनें क्ष येतो, त्या रीतीविषयीं आणि क्षचे किंमतीविषयीं मात्र विचार करणें असतो, परंतु जा रीतीनें अ अथवा त्याची किंमत त्या पद्धतींत येत्ये, याअविषयीं विचार करायाचा नसतो, तेव्हां त्या पद्धतीस क्षचें फङ्क्शन असें ह्मणतों, आणि जसा गुणक मांडितात त्या प्रमाणें क्षचा मागें कांहीं अक्षर मांडून तें फङ्क्शन दाखवितों. परंतु हें फङ्क्शन चिन्ह आणि दुसरें कोणतेंही गुणक चिन्ह या दोहोंचा गोंधळ चुकविण्याकरितां, फङ्क्शन चिन्हें दाखविण्यास कांहीं अक्षरें निराळीं घेतलेलीं असतात, आणि तीं गुणक दाखवायास घेत नाहीं. यो ग्रंथांत **फ**, **प्म**, ϕ, ψ अशीं चिन्हें घेतलीं आहेत. ह्मणजे वेगळाले पक्ष दाखविण्याविषयीं **फ** क्ष, **प्म** क्ष, ϕ क्ष, ψ क्ष, हीं चिन्हें केवळ क्षचें फङ्क्शन आहेत असें जाणावें, तें फङ्क्शन दिलेलें असो अथवा नसो. **फ** ϕ क्ष याचा अर्थ हाच, कीं जसा **फ** क्ष हा क्षचें फङ्क्शन आहे, तसा **फ** ϕ क्ष हें ϕ क्षचें फङ्क्शन आहे: ह्मणजे जर $\text{फ क्ष} = \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२}$, तर **फ** ϕ क्ष हा $\phi\,\text{क्ष} + (\phi\,\text{क्ष})^{२}$ आहे.

उदाहरण $\phi\,\text{क्ष} = १ + \text{क्ष}^{२}$ $\quad$ $\text{फ क्ष} = १ - \text{क्ष}^{२}$ असें घे, तर

$$\text{फ}\,\phi\,\text{क्ष} = १ - (१ + \text{क्ष}^{२})^{२} = -२\text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{४}$$

$$\phi\,\text{फ क्ष} = १ + (१ - \text{क्ष}^{२})^{२} = २ - २\text{क्ष}^{२} + \text{क्ष}^{४}$$

ϕ क्ष = $क्ष^{अ}$ असें घे, तर ϕ (१+क्ष) = $(१+क्ष)^{अ}$ ϕ(२क्ष) = $(२क्ष)^{अ}$

ϕ(अ) = $अ^{अ}$ ब = $ब^{अ}$ इत्यादि

समीकरणांतील क्ष चा प्रत्येक किंमतीविषयीं एक किंवा अनेक फङ्क्शनें जीं अवश्य खरीं आहेत, त्या समीकरणास **फङ्क्शनानुरूप समीकरण** ह्मणतात. जसें जर ϕ क्ष = अक्ष, तर ϕ(बक्ष) = अबक्ष = ब×ϕ क्ष, अथवा

ϕ (बक्ष) = बϕ क्ष

जेव्हां ϕ क्ष याचा अर्थ अक्ष आहे, तेव्हां वरचें समीकरण नेहमी खरें आहे.

या वरून हीं पुढील समीकरणें काढितां येतील :

जर ϕ क्ष = $क्ष^{अ}$ तर ϕ क्ष × ϕ य = ϕ(क्षय)

ϕ क्ष = $अ^{क्ष}$ तर ϕ क्ष × ϕ य = ϕ(क्ष+य)

ϕ क्ष = अक्ष+ब तर $\frac{\phi क्ष - \phi य}{\phi क्ष - \phi ज्ञ} = \frac{क्ष - य}{क्ष - ज्ञ}$

ϕ क्ष = अक्ष तर ϕ क्ष + ϕ य = ϕ(क्ष+य)

जा बीजगणितरूपानें एकादें फङ्क्शनानुरूप समीकरण स्थापिलें जातें तें रूप त्या समीकरणापासून नेहमी काढितां येतें : उदाहरण, जर ϕ (क्षय) = क्ष×ϕ य असें आहे, आणि हें सर्वदा खरें आहे असें कल्पिलें तर जेव्हां य=१ असेल तेव्हां ही खरें होईल, आणि त्यापासून ϕ (क्ष) = क्ष×ϕ(१) असें होईल. परंतु ϕ क्ष यांत क्षचे ठिकाणीं १ मांडिल्यानें ϕ(१) हें अन्यसंबंधरहित परिमाण होतें. त्यास क ह्मण : तर कची कोणती एकादि किंमत त्या समीकरणास स्थापील किंवा नाहीं, इतकें मात्र पहाण्याचें राहिलें आहे. ϕ क्ष = कक्ष घे; तर ϕ(क्षय) = कक्षय आणि क्ष×ϕ य = क्ष×कय = कक्षय; यावरून कचा सर्व किंमतीविषयीं ϕ (क्षय) = क्ष ϕ य, आणि ϕ क्ष हा कक्ष आहे, ϕ(१) हा क×१ अथवा क, पूर्वींचे कल्पनेप्रमाणेंच आहे. त्याच प्रमाणें,

जर ϕक्षय = $(\phi क्ष)^{य}$, तर क्ष=१ केल्यानें या पुढील प्रमाणें होतें

ϕ य = $\{\phi(१)\}^{य}$ = $क^{य}$ ϕक्ष = $क^{क्ष}$

ϕ (क्षय) = $क^{क्षय}$ = $(क^{क्ष})^{य}$ = $(\phi क्ष)^{य}$

आणि $\phi(१) = क^{१} = क$, हें पूर्वींचे कल्पनेप्रमाणें आहे. फङ्शनसंबंधी जें यांत लिहिण्याचें पडेल त्याची माहितगारी होण्यास हा आणि पुढला सिद्धांत पुरेसा आहे.

पूर्वीं पाहिलें कीं जर $\phi क्ष = क^{क्ष}$, तर $\phi क्ष \times \phi य = \phi(क्ष+य)$ असें होतें; परंतु ज्यांचा योगानें असे गुण होतील अशीं क्षचीं दुसरीं कांहीं फङ्शनें आहेत कीं नाहीं, हें अद्यापि समजत नाहीं. तथापि याचे उलटें आतां सिद्ध करून दाखवितों, म्हणजे, $\phi क्ष \times \phi य = \phi(क्ष+य)$ हें समीकरण $क^{क्ष}$ अशा रूपाचें फङ्शन असल्याशिवाय क्षचा कोणत्याही फङ्शनानें स्थापिलें जाणार नाहीं.

$$\phi क्ष \times \phi य = \phi(क्ष+य) \cdots\cdots (ऊ)$$

मनांत आण, कीं यांत $\phi क्ष$ हें अशा जातीचें फङ्शन आहे, कीं **क्ष आणि य यांचा कशाही किमती असोत** तरी वरचें समीकरण खरें होईल. यचे ठिकाणीं अ+ब मांड, त्यापासून हें होईल

$$\phi क्ष \times \phi(अ+ब) = \phi(क्ष+अ+ब)$$

परंतु वर लिहिल्याप्रमाणें (ऊ) समीकरणापासून $\phi(अ+ब) = \phi अ \times \phi ब$, यावरून

$$\phi क्ष \times \phi अ \times \phi ब = \phi(क्ष+अ+ब)$$

यांत कोणत्येही अक्षराचे जागीं म्हणजे एथे अचे जागीं क+इ मांड. यापासून हें होईल

$$\phi क्ष \times \phi(क+इ) \times \phi ब = \phi(क्ष+क+इ+ब)$$

परंतु $\quad \phi(क+इ) = \phi क \times \phi इ$

यावरून $\quad \phi क्ष \times \phi क \times \phi इ \times \phi ब = \phi(क्ष+क+इ+ब)$

आणि याप्रमाणें पुढेंही: म्हणजे जर हव्ये त्या किमतीचीं न पदें असतील, म्हणजे, $अ_१, अ_२, अ_३, \cdots; अ_{न-१}, अ_न$, असें असेल, तर पुढील प्रमाणें होईल

$$\varphi\, अ_1 \times \varphi\, अ_2 \cdots \times \varphi\, अ_{न-1} \times \varphi\, अ_न = \varphi\,(अ_1 + अ_2 + अ_3 + \cdots + अ_{न-1} + अ_न)$$

आतां हीं न परिमाणें परस्परांचा बरोबर असून प्रत्येक अ-चे बरोबर आहेत अशी कल्पना कर. यापासून हें होईल

$$\left\{\begin{matrix}\varphi\, अ \times \varphi\, अ \times \cdots \times \varphi\, अ \times \varphi\, अ \\ \text{न पदापर्यंत}\end{matrix}\right\} = \varphi\left(\begin{matrix}अ + अ + अ \cdots\cdots + अ + अ \\ \text{न पदापर्यंत}\end{matrix}\right)$$

अथवा $$(\varphi\, अ)^न = \varphi\,(नअ)$$

यांत न कांहीं पूर्णांक आहे.※

यासारिखेंच, जर म परिमाणें प्रत्येक ब-चे बरोबर आहेत अशी कल्पना केली, तर या प्रमाणें होईल

$$(\varphi\, ब)^म = \varphi\,(मब)$$

म आणि न हे दोन्हीं पूर्णांक आहेत, ह्मणून आतां मब = नअ आहे अशी कल्पना घे, तर याप्रमाणें होईल

$$\varphi\,(मब) = \varphi\,(नअ) \text{ अथवा } (\varphi\, ब)^म = (\varphi\, अ)^न$$

अथवा $$\varphi\, ब = (\varphi\, अ)^{\frac{न}{म}} \text{ परंतु } ब = \frac{न}{म}\, अ$$

तर $$\varphi\left(\frac{न}{म}\, अ\right) = (\varphi\, अ)^{\frac{न}{म}}$$

अथवा जेव्हां प पूर्णांक आहे, अथवा **१८७ पृष्ठाप्रमाणें** तो सममान अपूर्णांक आहे, तेव्हां $\varphi\,(पअ) = (\varphi\, अ)^प$. हें ही समीकरण खरें आहे.

वरचे **(अ)** समीकरणांत, क्ष = ० आणि य = ० असें घे, यावरून क्ष + य = ०. $\varphi\,(०)$ यास क ह्मण, तेव्हां याप्रमाणें होईल; क × क = क, अथवा क = १. नंतर य = − क्ष, अथवा क्ष + य = ० असें घे, तर याप्रमाणें होईल

$$\varphi\, क्ष \times \varphi\,(-क्ष) = \varphi\,(०) = १ \text{ अथवा } \varphi\,(-क्ष) = \frac{१}{\varphi\, क्ष};$$

हें समीकरण क्ष-चे प्रत्येक किंमतीविषयीं खरें आहे, ह्मणजे प पूर्णांक किंवा सममान अपूर्णांक असेल, आणि क्ष-चे जागीं पअ मांडिला, तर त्याविषयीं

※ वरची कृती अपूर्णांकास लागू होईल असें कल्पवत नाहीं. १०४ आणि १०५ पृष्ठपहा.

हें समीकरण खरें आहे. असें केल्यानें याप्रमाणें होईल

$$\varphi(-\text{प}\text{अ}) = \frac{1}{\varphi\,\text{प}\text{अ}} = \frac{1}{\varphi(\text{अ})^{\text{प}}} = \varphi\,\text{अ}^{-\text{प}}$$

अथवा जर प ऋण पूर्णांक किंवा सममान अपूर्णांक असेल तेव्हां हें पुढील समीकरण खरें आहे,

$$\varphi(\text{प}\text{अ}) = (\varphi\,\text{अ})^{\text{प}}$$

यावरून, **२३३ एष्ठाप्रमाणें**, अ=१ असें करून, जर प सममान जाती असेल, तर ही पुढील गोष्ट सिद्ध होत्ये,

$$\varphi(\text{प}) = \text{क}^{\text{प}}$$

यांत क कोणतेंही परिमाण असो.

जेव्हां प असंममान परिमाण असेल, असें $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, इत्यादि, तरी वरनें समीकरण खरें आहे; परंतु या समीकरणाचा सारांशाशीं अशी रीतीनें कृती केली जाईल, कीं त्याचा ताळा दाखविण्याचें प्रयोजन पडणार नाहीं.

अभ्यासासाठीं उदाहरणें

$$\varphi(\text{क्ष}+\text{य}) + \varphi(\text{क्ष}-\text{य}) = 2\varphi\,\text{क्ष}\times\varphi\,\text{य}$$

हें समीकरण अचे प्रत्येक किमतीविषयीं या पुढील समीकरणानें स्थापलें जाईल, हें दाखीव:

$$\varphi\,\text{क्ष} = \frac{1}{2}\left(\text{अ}^{\text{क्ष}} + \text{अ}^{-\text{क्ष}}\right)$$

आणि

$$\varphi(\text{क्ष}+\text{य}) = \varphi\,\text{क्ष} + \varphi\,\text{य}$$

यास या पुढील समीकरणावाचून दुसरें कांहीं उत्तर नाहीं हें दाखीव म्हणजे

$$\varphi\,\text{क्ष} = \text{अ}\text{क्ष}$$

अकरावा अध्याय.

*द्वियुक्पदसिद्धांताविषयीं.

$(अ+ब)^{न}$ यांस अ आणि ब यांचे घातां प्रमाणें श्रेणींत विस्तार करण्याचे रीतीला द्वियुक्पदसिद्धांत असें नाव दिलेलें आहे, ती श्रेणी नियत किंवा अनियत जसा पक्ष असेल त्याप्रमाणें असो, आणि न घातप्रकाशक हा पूर्ण किंवा अपूर्ण, धन किंवा ऋण, सममान किंवा असममान असो.

$(१+क्ष)^{न}$ यास क्षचे घातांचे श्रेणींत विस्तार करण्याप्रमाणें वरचे पक्षाचा विस्तार केला जाईल : कांकीं

$$अ+ब=अ\left(१+\frac{ब}{अ}\right) \qquad (अ+ब)^{न}=अ^{न}\left(१+\frac{ब}{अ}\right)^{न}$$

$क्ष=\frac{ब}{अ}$ असें घे, तर $(१+क्ष)^{न}$ हें विस्तार करण्याचें फङ्शन आहे,

हा सिद्धांत फार उपयोगाचा आहे, यासाठीं त्याचे सिद्धतेचा दोन रीती दाखवितों : पहिली, पृथक्करण्याची रीति, ह्मणजे वींत असा शोध केला जाईल, कीं $(१+क्ष)^{न}$ याचे बरोबर श्रेणी ती कोणती आहे : दुसरी एकीकरण रीति, ह्मणजे वींत असें दाखविलें जाईल, कीं जी श्रेणी पहिल्या रीतीनें सांपडली ती इच्छिली श्रेणी आहे.

शक्य असेल, तर $(१+क्ष)^{न}$ ही क्षची पूर्ण घातांची श्रेणी या पुढील रूपाची असावी

$$(१+क्ष)^{न}=अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+अ_{३}क्ष^{३}+इत्यादि$$

यांत $अ_{०}$, $अ_{१}$, इत्यादि हीं नचीं फङ्शनें आहेत, आणि क्षचीं नाहींत.

लेम्मा. जसा ब अधिक अधिक अचे बरोबर होण्यास जवळजवळ येतो, तसाच $\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब}$, हा अपूर्णांक जा नियततेजवळजवळ जातो ती नियतता

न $अ^{न-१}$ आहे, यांत नची किंमत कशी हीअसो.

पहा कीं जेव्हां अ=ब आहे, तेव्हां वरचा अपूर्णांकाचें $\frac{0}{0}$ असें रूप होतें **२७३ पृष्ठ पहा.**

पहिल्यानें. न पूर्णांक आहे अशी कल्पना कर. तर **१९३ पृष्ठा-प्रमाणें,**

$$\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब}=अ^{न-१}+अ^{न-२}ब+अ^{न-३}ब^{२}+\cdots\cdots+अब^{न-२}+ब^{न-१}$$

जेव्हां अ आणि ब हे परस्पर बरोबर होण्यास जवळ येतात, तेव्हां वरचे समीकरणाचे दुसऱ्ये बाजूची नियतता या पुढील प्रमाणें होईल,

$$अ^{न-१}+अ^{न-२}अ+अ^{न-३}अ^{२}+\cdots\cdots+अअ^{न-२}+अ^{न-१}$$

अथवा $अ^{न-१}+अ^{न-१}+अ^{न-१}+\cdots\cdots\cdots\cdots+अ^{न-१}+अ^{न-१}$

अथवा न $अ^{न-१}$

बचे १ घातापासून न−१ घात पर्यंत प्रत्येक घाताविषयीं एक एक पद आहे, आणि एक पद बशीं निराधार आहे, यावरून वरचे श्रेणीमध्यें न पदें आहेत हें स्पष्ट आहे.

दुसऱ्यानें, न अपूर्णांक आहे अशी कल्पना कर, म्हणजे $\frac{प}{क}$ असा आहे आणि त्यांत प, क, हे पूर्णांक आहेत असें मनांत आण. तर या प्रमाणें होईल

$$\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब}=\frac{अ^{\frac{प}{क}}-ब^{\frac{प}{क}}}{अ-ब}=\frac{\left(अ^{\frac{१}{क}}\right)^{प}-\left(ब^{\frac{१}{क}}\right)^{प}}{\left(अ^{\frac{१}{क}}\right)^{क}-\left(ब^{\frac{१}{क}}\right)^{क}}$$

$\left(अ^{\frac{१}{क}}=अ_{१}\text{ आणि }ब^{\frac{१}{क}}=ब_{१}\text{ असें घे}\right)$, तर वरची पद्धती $=\frac{अ_{१}^{प}-ब_{१}^{प}}{अ_{१}^{क}-ब_{१}^{क}}$

$$=\frac{\dfrac{अ_{१}^{प}-ब_{१}^{प}}{अ_{१}-ब_{१}}}{\dfrac{अ_{१}^{क}-ब_{१}^{क}}{अ_{१}-ब_{१}}}$$

आतां, जसा बचे जवळ अ होत जातो, तसा ब₁चे जवळ अ₁ होत जातो, आणि

प आणि क हे पूर्णांक आहेत, ह्मणून वरचे अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांच्या नियतता $प अ_{1}^{प-1}$ आणि $क अ_{1}^{क-1}$ आहेत; यावरून वरचे अपूर्णांकाचीनियतता ही आहे

$$\frac{प अ_{1}^{प-1}}{क अ_{1}^{क-1}} \text{ अथवा } \frac{प}{क} अ_{1}^{प-क} \text{ अथवा } \frac{प}{क}\left(अ^{\frac{1}{क}}\right)^{प-क} \text{ अथवा } \frac{प}{क} अ^{\frac{प}{क}-1} \text{ अथवा, } न अ^{न-1}$$

तिसऱ्यानें, न ऋण आहे अशी कल्पना कर, आणि त्याचे जोडीचें धन परिमाण प असावें, असें कीं न = −प होईल. तर

$$\frac{अ^{न}-ब^{न}}{अ-ब} = \frac{अ^{-प}-ब^{-प}}{अ-ब} = \frac{अ^{\frac{1}{प}}-ब^{\frac{1}{प}}}{अ-ब} = \frac{1}{अ^{प}ब^{प}} \cdot \frac{ब^{प}-अ^{प}}{अ-ब}$$

$$= -\frac{1}{अ^{प}ब^{प}} \times \frac{अ^{प}-ब^{प}}{अ-ब}$$

जसा ब कडे अ येत जातो, तशी वरची प्रथम गुणक पदाची नियतता $-\frac{1}{अ^{प}अ^{प}}$ अथवा $-अ^{-2प}$ ही होईल, आणि प धन आहे, तर पूर्वीं सिद्ध केल्याप्रमाणें वरचे दुसऱ्या गुण्य पदाची नियतता $प अ^{प-1}$ आहे. यावरून वरचे गुणाकाराची नियतता $-अ^{-2प} \times प अ^{प-1}$ अथवा $-प अ^{-प-1}$, आणि न = −प आहे तर या नियततेचें रूप $न अ^{न-1}$ होईल.

आतां पूर्वीं कल्पिलेली श्रेणी पुनः घेतों,

$$(1+क्ष)^{न} = अ_{0} + अ_{1} क्ष + अ_{2} क्ष^{2} + अ_{3} क्ष^{3} + \text{ इत्यादि}$$

इच्छेप्रमाणें क्ष चे हवें तेवढें अवळ करितां येईल असें एक य परिमाण घे; क्ष चे सर्व किमती विषयीं वरची श्रेणी खरी आहे अशी कल्पना केल्यावरून, क्ष चे जागीं य मांडिला जाईल, तर या प्रमाणें होईल

$$(1+य)^{न} = अ_{0} + अ_{1} य + अ_{2} य^{2} + \text{ इत्यादि}$$

$$(1+क्ष)^{न} - (1+य)^{न} = अ_{1}(क्ष-य) + अ_{2}(क्ष^{2}-य^{2}) + \text{ इत्यादि}$$

याचे दोन बाजूंस, क्ष−य, अथवा (1+क्ष) − (1+य) यांणीं भाग.

तर $\frac{(१+क्ष)^{न} - (१+य)^{न}}{(१+क्ष) - (१+य)} = अ_{१} + अ_{२}\frac{क्ष^{२}-य^{२}}{क्ष-य} + अ_{३}\frac{क्ष^{३}-य^{३}}{क्ष-य} +$ इत्यादि

याच्या दोन्ही बाजू नेहेमी बरोबर आहेत, आणि जसे क्ष आणि य हे बरोबर होण्यास जवळ येत जातात, तसा १+क्ष आणि १+य हे बरोबर होण्यास जवळ होत जातात, यावरून त्या दोन बाजूंच्या नियतता बरोबर आहेत; अथवा

$$न (१+क्ष)^{न-१} = अ_{१} + २अ_{२}क्ष + ३अ_{३}क्ष^{२} + \text{इत्यादि}$$

याच्या दोन्ही बाजू १+क्ष यांणीं गुण. तर

$$न (१+क्ष)^{न} = अ_{१} + २अ_{२}क्ष + ३अ_{३}क्ष^{२} + ४अ_{४}क्ष^{३} + \text{इत्यादि}$$
$$+ \; अ_{१}क्ष + २अ_{२}क्ष^{२} + ३अ_{३}क्ष^{३} + \text{इत्यादि}$$

परंतु

$$न (१+क्ष)^{न} = नअ_{०} + नअ_{१}क्ष + नअ_{२}क्ष^{२} + नअ_{३}क्ष^{३} + \text{इत्यादि}$$

यामुळें, **३११ पृष्ठाप्रमाणें**

$अ_{१} = नअ_{०}$, $२अ_{२} + अ_{१} = नअ_{१}$, अथवा $अ_{२} = \frac{न-१}{२}अ_{१} = न\frac{न-१}{२}अ_{०}$

$३अ_{३} + २अ_{२} = नअ_{२}$ अथवा $अ_{३} = \frac{न-२}{३}अ_{२} = न.\frac{न-१}{२}.\frac{न-२}{३}अ_{०}$

$४अ_{४} + ३अ_{३} = नअ_{३}$ अथवा $अ_{४} = \frac{न-३}{४}अ_{३} = न\frac{न-१}{२}\;\frac{न-२}{३}\;\frac{न-३}{४}अ_{०}$

या सर्व पदांत $अ_{०}$ साधारण गुणक आहे, हें पाहून त्यास ही क्षची किंमत कल्पिल्ये श्रेणींत मांडून या प्रमाणें होईल

$$(१+क्ष)^{न} = अ_{०}\left(१ + नक्ष + न\frac{न-१}{२}क्ष^{२} + न\frac{न-१}{२}\;\frac{न-२}{३}क्ष^{३} + \text{इत्यादि}\right)$$

यांत $अ_{०}$ याचा अद्यापि निश्चय झाला नाहीं. तो निश्चय करायाकरितां पहिल्यानें पाहिलें पाहिजे, कीं वरची श्रेणी कधीं उतरती होत आते कीं नाहीं.

परंतु अगोधर लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जी गोष्ट सिद्ध झाली ती योग्य ह्मणण्या प्रमाणें, वरच्या समीकरणाची सिद्धता नाहीं, परंतु हें मात्र आहे, कीं जर $(१+क्ष)^{न}$ हीचा क्षचे पूर्ण घाताचे कोणत्येही श्रेणींत सर्वदा विस्तार केला जाईल, तर ती श्रेणी वरची आहे. कारण अशी क-

ल्पना घेतली, कीं $(१+क्ष)^{न} = अ_{०}+अ_{१}क्ष+अ_{२}क्ष^{२}+$ इत्यादि आहे, परंतु असें कदाचित घडेल, कीं जी श्रेणी कल्पायास योग्य ती अपूर्णांकाची, किंवा ऋण, किंवा मिश्र घातांची असावी.

पूर्वीचा शोधामध्यें, जेव्हां अशक्यरूपाची कल्पना घेतली, तेव्हां कृतीचे शेवटास जीचा अर्थ सांगीतला नाहीं असा कांहीं नवा उघडा विषय दृष्टीस पडल्यावर, त्या अशक्यरूपाचे कल्पनेची सूचना झाली. जा श्रेणीस खरी असें सिद्ध करण्यास कल्पना अथवा अनुभव होता, त्या शिवाय दुसऱ्ये श्रेणीची कल्पना यापूर्वी घेतली नाहीं, आणि जी श्रेणी तयार झाली आहे तिचा खऱ्येपणा विषयीं अनुभव अथवा कारण ही नाहीं, यावरून आपण खरें चालतों हें कळत नाहीं अथवा आपल्ये खोट्येपणाची सूचना कोणती तीही कळत नाहीं. जर कांहीं चूक झाली असेल, तर त्या चुकीनंतर श्रेणीचा निरंतर चढतेपणा दृष्टीस पडेल. याजकरितां वरची श्रेणी शोधून पहातों.

वेगळाली पदें जीं त्यांचे पूर्वीचे पदाशीं प्रमाणें ठेवितात तीं या प्रमाणें आहेत,

$$न क्ष, \quad \frac{न-१}{२} क्ष, \quad \frac{न-२}{३} क्ष, \quad \frac{न-३}{४} क्ष \text{ इत्यादि}$$

यांचें साधारण रूप हें होतें

$$\frac{(प+२) \text{ पद}}{(प+१) \text{ पद}} = \frac{न-प}{प+१} क्ष$$

पहिल्यानें, पहाण्यांत येतें, कीं जर न धन पूर्णांक असेल, तर श्रेणी नियत आहे: कांकीं (न+२) या आणि त्याचे पुढचे सगळ्ये पदांत न–न अथवा ०, गुणक स्थळीं येईल. यामुळें जा पक्षांत न अपूर्ण किंवा ऋण आहे असा पक्ष घेतों, जेव्हां प, नचे पार गेला आहे तेव्हां श्रेणीचें मागलें प्रमाण्य नेहेमी ऋण होईल, आणि त्यावरून असें दिसेल, कीं श्रेणीचीं एका आड एक पदें धन आणि ऋण होत जातील; कांकीं जेव्हां दोन परिमाणाचें प्रमाण ऋण आहे, त्यावरून त्या परिमाणांचीं चिन्हें भिन्न आहेत असें कळतें. मागील पदाचें चिन्ह सो-

डून दे आणि त्यास धन कर. वरचे श्रेणीचीं पदें एका आड एक धन आणि ऋण आहेत तिचा जोडीची धनपदांची श्रेणी जर उतरती केली जाईल तर ती श्रेणीही उतरती केली जाईल, हें पद्मण्याचा अभिप्राय आहे ह्मणून वरची गोष्ट करितां येईल. यावरून यापुढील प्रमाणें होईल

$$\frac{प-न}{प+१}क्ष \text{ अथवा } \frac{पक्ष}{१+प}-\frac{नक्ष}{१+प} \text{ अथवा } \frac{क्ष}{१+\frac{१}{प}}-\frac{नक्ष}{१+प}$$

जशीं जशीं मोठालीं पदें घेतों, तसें तसें वरचें दुसरें पद अनियत घटत जातें, आणि पहिल्याची नियतता क्ष होते. यामुळें जर १ पेक्षां क्ष कमी आहे, तर वर लिहिलें प्रमाण कांहीं पदानंतर, १ पेक्षां कमी होतें, आणि नंतर तेंच प्रमाण क्ष नियततेच्या अवळ क्रमानें येईल. ह्मणजे जेव्हां १ पेक्षां क्ष कमी आहे तेव्हां ती मिळालेली श्रेणी नेहमी उतरती आहे.

असा पक्ष खरा आहे तर **३१२ पृष्ठाप्रमाणें** क्ष=० असें केल्यानें त्यापासून जें उत्तर निघतें तें कामांत आणिलें जाईल, आणि त्यापासून $(१)^{न}$ = अ० असें होतें. जर न पूर्णांक असेल, तर अ० = १; परंतु जर न अपूर्णांक असेल, जसा $\frac{प}{क}$, तर $(१)^{\frac{प}{क}}$ = अ० = $(१^{प})^{\frac{१}{क}}$ = $(१)^{\frac{१}{क}}$, ह्मणजे अ० हा १ चें कोणतेंही क मूळ होईल; **२०७ पृष्ठ पहा.** जर त्याचें अंकगणितरूप मूळ घेतलें, तर अ० = १ असें निघतें; आणि जर संशयाची पहिल्यानें कल्पिलेली श्रेणी खरी असेल, तर जेव्हां १ पेक्षां क्ष कमी आहे तेव्हां ही श्रेणी १+क्ष याच्या अंकगणितरूपाच्या न घात आहे, अथवा सर्व पक्षांत $(अ+क्ष)^{न}$ याचे बीजगणितरूपाचे बरोबरीचा आहे.

जेव्हां न पूर्णांक आहे तेव्हां वरची श्रेणी खरी आहे असें दाखवितों. भलत्या कोणत्याही पूर्णांकाविषयीं ती खरी आहे अशी कल्पना कर, आणि तो पूर्णांक दाखवायासाठीं म घे. तर अ० हा १ असून याप्रमाणें होईल.

$$(१+क्ष)^{म} = १+मक्ष+म\frac{म-१}{२}क्ष^{२}+म\frac{म-१}{२}\;\frac{म-२}{३}क्ष^{३}+ \text{इत्यादि}$$

दोन्ही बाजू १+क्ष यांणी गुण.

$$(१+क्ष)^{म+१} = १+मक्ष+म\frac{म-१}{२}क्ष^२+म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}क्ष^३+ इत्यादि$$
$$+ क्ष + म \quad क्ष^२+म\frac{म-१}{२} \quad क्ष^३+ इत्यादि$$
$$=१+(म+१)क्ष+\left(म\frac{म-१}{२}+म\right)क्ष^२+\left(म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}+म\frac{म-१}{२}\right)क्ष^३+ इत्यादि$$

परंतु $म\frac{म-१}{२}+म=म\left(\frac{म-१}{२}+१\right)=म\frac{म+१}{२}=(म+१)\frac{म}{२}$

$$म\frac{म-१}{२}\,\frac{म-२}{३}+म\frac{म-१}{२}=म\frac{म-१}{२}\left(\frac{म-२}{३}+१\right)=(म+१)\frac{म}{२}\,\frac{म-१}{३}$$

यावरून

$$(१+क्ष)^{म+१}=१+(म+१)क्ष+(म+१)\frac{म}{२}क्ष^२+(म+१)\frac{म}{२}\,\frac{म-१}{३}क्ष^३+ इत्यादि$$

आतां जर म+१ याचेआगीं न, अथवा मचेआगीं न−१ मांडिला असतां, हीश्रेणी या पुढील श्रेणी सारिखीच, अथवा तिचाच नियमाप्रमाणें चालत्ये,

$$(१+क्ष)^न=१+नक्ष+न\cdot\frac{न-१}{२}क्ष^२+न\cdot\frac{न-१}{२}\,\frac{न-२}{२}क्ष^३+ इत्यादि$$

यावरून जरही पद्धती नचे कोणत्येही पूर्ण किमतीविषयीं खरी आहे; तरत्याचेजवळचे पुढल्ये किमतीविषयीं खरी आहे. परंतु जेव्हां न=१ असेल तेव्हां ही खरी आहे; कांकीं

$$(१+क्ष)^१=१+१क्ष+१\cdot\frac{१-१}{२}क्ष^२+१\cdot\frac{१-१}{२}\cdot\frac{१-२}{३}क्ष^३+ इत्यादि$$

यामुळें, जेव्हां न=२ तेव्हां खरी आहे; परंतु यामुळें जेव्हां न=३, तेव्हां खरी आहे, आणि याप्रमाणें पुढें **अनंतपावेतों.**

$(१+क्ष)^न$ ही नचें फङ्ग्शन आहे असें कल्पिलें, आणि तीस $\varphi न$ म्हटलें, तर दिसण्यांत येतें, कीं

$$(१+क्ष)^न\times(१+क्ष)^म=(१+क्ष)^{न+म}$$

अथवा $$\varphi न\times\varphi म=\varphi(न+म)$$

परंतु जेव्हां न पूर्णांक आहे तेव्हां $(१+क्ष)^न$ ही इच्छिलेली श्रेणी आहे, यामुळें, **जेव्हां न पूर्णांक आहे**, आणि वरची श्रेणी $\varphi न$ आहे, असें म्हटलें, तेव्हां

$$\varphi न\times\varphi म=\varphi(न+म)$$

अथवा

$$\left(१+\text{न}\text{क्ष}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\text{क्ष}^{२}+\text{न}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}\right)$$

$$\times\left(१+\text{म}\text{क्ष}+\text{म}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}\text{क्ष}^{२}+\text{म}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}\cdot\frac{\text{म}-२}{३}\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}\right)$$

$$=१+(\text{म}+\text{न})\text{क्ष}+(\text{म}+\text{न})\frac{\text{म}+\text{न}-१}{२}\text{क्ष}^{२}+(\text{म}+\text{न})\frac{\text{म}+\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{म}+\text{न}-२}{३}\text{क्ष}^{३}+\text{इत्यादि}$$

नुसत्ये गुणाकार करीतीनें, हें हवें तेवढें पुढें पावेतों सिद्ध केलें जाईल; कांकीं पहिल्या दोन श्रेण्या परस्पर गुणिल्या असतां या प्रमाणें होईल

$$१+(\text{म}+\text{न})\text{क्ष}+\left(\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}+\text{नम}+\text{म}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}\right)\text{क्ष}^{२}$$

$$+\left(\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\text{म}+\text{नम}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}+\text{म}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}\cdot\frac{\text{म}-२}{३}\right)\text{क्ष}^{३}$$

$$\text{परंतु}\ \text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}+\text{नम}+\text{म}\cdot\frac{\text{म}-१}{२}=\frac{\text{न}^{२}-\text{न}+२\text{नम}+\text{म}^{२}-\text{म}}{२}$$

$$=\frac{(\text{न}+\text{म})^{२}-(\text{न}+\text{म})}{२}=(\text{न}+\text{म})\frac{\text{न}+\text{म}-१}{२}$$

$$\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}-२}{३}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-१}{२}\text{म}+\text{नम}\frac{\text{म}-१}{२}+\text{म}\frac{\text{म}-१}{२}\cdot\frac{\text{म}-२}{३}$$

$$=\frac{\text{न}^{३}-३\text{न}^{२}+२\text{न}+३\text{न}^{२}\text{म}-३\text{नम}+३\text{नम}^{२}-३\text{नम}+\text{म}^{३}-३\text{म}^{२}+२\text{म}}{२\times३}$$

$$=\frac{(\text{न}+\text{म})^{३}-३(\text{न}+\text{म})^{२}+२(\text{न}+\text{म})}{२\times३}=(\text{न}+\text{म})\frac{\text{न}+\text{म}-१}{२}\cdot\frac{\text{न}+\text{म}-२}{३}$$

आणि या प्रमाणें पुढेंही. आतां हें पुढील मूळ प्रकर्ण सांगतों: **जा पक्षांत पूर्णांकाचेजागीं अक्षरें असतां वर दाखविल्या प्रमाणें बीजगणितरूप गुणाकारावरून किंवा दुसरे कांहीं बीजगणितरूप कृतीवरून, एकादें खरें उत्तर निघतें, असें जेव्हां सिद्ध केलें जातें, तेव्हां अपूर्णांकांविषयीं, किंवा असममान अंकांविषयीं आणि अंक ऋण आहेत त्यांविषयीं ही जीं अक्षरें घेतलीं त्यापासून जें उत्तर निघतें तें त्या प्रमाणेंच खरें आहे.** कांकीं पूर्णांकांविषयीं जीं उत्तरें खरी आहेत, आणि जीं खरीं नाहींत यांचें तारतम्य पहाण्याची अद्यापि गरज पडली नाहीं; परंतु प्रवेशकांत सांगीतल्या प्रमाणें पूर्णांक किंवा अपूर्णांकाचे जागीं अक्षरें घेतलीं तरी सगळ्या कृती खऱ्या आहेत. पूर्णांकाचेजागीं अक्षर घेतलें असतां, समीकरणांत एकादें पद होतें, परंतु जेव्हां अपूर्णांकाचेजागीं अक्षर घ्यावें तेव्हां तें पद नाहींसें होतें असा पक्ष कोणत्या

ही कृतींत आला नाहीं. यामुळें म आणि न हे पूर्णांक असून गुणाकाराचे सरळ रीतीनें, जरी φ न $\times\, \varphi$ म $= \varphi$ (म+न) असें होईल, तरजेव्हां म आणि न अपूर्णांक असतील किंवा त्यांतून एक किंवा दोन्ही ही ऋण असतील, तेव्हां त्याच कृतीवरून हीं φ (म+न) निघेल: यामुळें,

$$१ + \text{न}\text{क्ष} + \text{न}\,\frac{\text{न}-१}{२}\,\text{क्ष}^{२} + \text{ इत्यादि}$$

या श्रेणींत हाच गुण आहे, कीं जरती, नचें फङ्कशन आहे असें मानिलें, आणि त्यास φ न असें ह्मटलें असतां, तिचा योगानें **सर्वपक्षांत** हें पुढील समीकरण स्थापिलें जातें,

$$\varphi\,\text{न} \times \varphi\,\text{म} = \varphi\,(\text{म}+\text{न})$$

परंतु **३३४ पृष्ठावरून** सिद्ध झालें, कीं वरचे समीकरणाचें उत्तर φ न $=$ क$^{\text{न}}$ असावें, यांत क $= \varphi(१)$, आणि $\varphi(१)$ याची किंमत या पुढील प्रमाणें आहे असें दिसतें

$$१ + १\,\text{क्ष} + १\,\frac{१-१}{२}\,\text{क्ष}^{२} + \text{ इत्यादि अथवा } १+\text{क्ष}$$

यामुळें सर्व पक्षांत φ न $= (१+\text{क्ष})^{\text{न}}$ वर ज्या सिद्धांताविषयीं विचार झाला तो हा आहे.

वरची श्रेणी कामांत आणण्याची, तर पुढें चालायाचे पूर्वीं, न, $\frac{\text{न}-१}{२}$, $\frac{\text{न}-२}{३}$, इत्यादि वेगवेगळे गुणक काढावे ह्मणजे ही रीति सहज आणि सोपी होत्ये: जसें, न $= \frac{१}{२}$ असें घे, अथवा $\sqrt{१+\text{क्ष}}$ या द्वियुक्पदास श्रेणीचें विस्तार रूप देण्याचें आहे असें मनांत आण.

$$\text{न} = \frac{१}{२},\ \frac{\text{न}-१}{२} = -\frac{१}{४},\ \frac{\text{न}-२}{३} = -\frac{१}{२},\ \frac{\text{न}-३}{४} = -\frac{५}{८} \text{ इत्यादि}$$

$$\sqrt{१+\text{क्ष}} = १ + \frac{१}{२}\text{क्ष} + \left(\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{४}\right)\text{क्ष}^{२} + \left(\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{४}\right)\left(-\frac{१}{२}\right)\text{क्ष}^{३} + \left(\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{१}{४}\right)\left(-\frac{१}{२}\right)\left(-\frac{५}{८}\right)\text{क्ष}^{४} + \text{ इ०}$$

$$= १ + \frac{१}{२}\text{क्ष} - \frac{१}{८}\text{क्ष}^{२} + \frac{१}{१६}\text{क्ष}^{३} - \frac{५}{१२८}\text{क्ष}^{४} + \text{ इत्यादि}$$

जर न $= -१$ तर

$$\text{न} = -१,\ \frac{\text{न}-१}{२} = -१,\ \frac{\text{न}-२}{३} = -१,\ \frac{\text{न}-३}{४} = -१ \text{ इत्यादि}$$

$$(१+\text{क्ष})^{-१} \text{ अथवा } \frac{१}{१+\text{क्ष}} = १ + (-१)\text{क्ष} + (-१)(-१)\text{क्ष}^{२} + (-१)(-१)(-१)\text{क्ष}^{३} + \text{ इत्यादि}$$

$$= १ - \text{क्ष} + \text{क्ष}^{२} - \text{क्ष}^{३} + \text{ इत्यादि}$$

ही श्रेणी पूर्वी सिद्ध झाली त्या प्रमाणेंच आहे

जर $\text{न}=५$, तर

$$\text{न}=५,\quad \frac{\text{न}-१}{२}=२,\quad \frac{\text{न}-२}{३}=१,\quad \frac{\text{न}-३}{४}=\frac{१}{२},\quad \frac{\text{न}-४}{५}=\frac{१}{५},\quad \frac{\text{न}-५}{६}=०$$

$$(१+\text{क्ष})^{५}=१+५\text{क्ष}+\begin{pmatrix}५\\ \times २\end{pmatrix}\text{क्ष}^{२}+\begin{pmatrix}५\\ \times २\\ \times १\end{pmatrix}\text{क्ष}^{३}+\begin{pmatrix}५\\ \times २\\ \times १\\ \times \frac{१}{२}\end{pmatrix}\text{क्ष}^{४}+\begin{pmatrix}५\\ \times २\\ \times १\\ \times \frac{१}{२}\\ \times \frac{१}{५}\end{pmatrix}\text{क्ष}^{५}+\begin{pmatrix}५\\ \times २\\ \times १\\ \times \frac{१}{२}\\ \times \frac{१}{५}\\ \times ०\end{pmatrix}\text{क्ष}^{६}$$

$$=१+५\text{क्ष}+१०\text{क्ष}^{२}+१०\text{क्ष}^{३}+५\text{क्ष}^{४}+\text{क्ष}^{५}+०+०+\text{ इत्यादि}$$

जा पक्षांत घातप्रकाशक पूर्णांक आहे, तेव्हां द्वियुक्पदाचा सिद्धांत या पुढील प्रमाणें सिद्ध करण्याची चाल आहे: $\text{क्ष}+\text{अ}$ यास $\text{क्ष}+\text{ब}$ याणीं गुण, $\text{क्ष}^{२}+(\text{अ}+\text{ब})\text{क्ष}+\text{अब}$ असें होतें, आणि पुनः या गुणाकारास $\text{क्ष}+\text{क}$ याणीं गुणून, या प्रमाणें होईल

$$\text{क्ष}^{३}+(\text{अ}+\text{ब}+\text{क})\text{क्ष}^{२}+(\text{अब}+\text{बक}+\text{कअ})\text{क्ष}+\text{अबक}$$

यावरून दिसतें, कीं जर $\text{अ}_{१}, \text{अ}_{२}, \cdots \text{अ}_{\text{न}}$ अशीं न परिमाणें असतील, आणि जर सर्वांची बेरीज दाखविण्यासाठीं $\text{प}_{१}$ घेतला, आणि प्रत्येक दोन पदांचे गुणाकारांची बेरीज दाखविण्यासाठीं $\text{प}_{२}$ इत्यादि घेतले. म्हणजे, जर,

$$\text{प}_{१}=\text{अ}_{१}+\text{अ}_{२}+\text{अ}_{३}+\cdots\cdots$$

$$\text{प}_{२}=\text{अ}_{१}\,\text{अ}_{२}+\text{अ}_{२}\,\text{अ}_{३}+\text{अ}_{१}\,\text{अ}_{३}+\cdots\cdots$$

$$\text{प}_{३}=\text{अ}_{१}\,\text{अ}_{२}\,\text{अ}_{३}+\text{अ}_{१}\,\text{अ}_{३}\,\text{अ}_{४}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{प}_{\text{न}-१}=\{\text{अ}_{१}\text{ यावांचून सर्वांचा गुणाकार}\}+\{\text{अ}_{२}\text{ यावांचून सर्वांचा गुणाकार}\}+\cdots$$

$$\text{प}_{\text{न}}=\text{सर्वांचा गुणाकार};$$

या प्रमाणें घेतलें, तर या पुढील प्रमाणें निघतें

$$(क्ष+अ_{१})(क्ष+अ_{२})\cdots(क्ष+अ_{न}) = क्ष^{न}+प_{१}क्ष^{न-१}+प_{२}क्ष^{न-२}+\cdots+प_{न-१}क्ष+प_{न}$$

$प_{१}$ यांत पदांची संख्या न आहे; आणि $प_{२}$ यामध्यें न परिमाणांतून २ परिमाणाचीं जितक्ये तऱ्हेचीं एकीकरणें होतील तितकी पदांची संख्या आहे, अथवा **अंकगणित मूळपीठिकेचा २१० व्ये कलमाप्रमाणें** $न\cdot\frac{न-१}{२}$, $प_{३}$ यामध्यें न परिमाणांतून ३ परिमाणाचीं जितक्ये तऱ्हेचीं एकीकरणें होतील तितकी पदांची संख्या आहे, अथवा $न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}$; आणि याप्रमाणें पुढेंही. यावरून जर अशी कल्पना केली कीं $अ_{१}$, $अ_{२}$, इत्यादि हीं सर्व परस्पर बरोबर असून प्रत्येक अचे बरोबर आहेत, तर या प्रमाणें होतें.

$$प_{१} = अ+अ+अ+\cdots = न अ$$

$$प_{२} = अ^{२}+अ^{२}+अ^{२}+\cdots = न\cdot\frac{न-१}{२}अ^{२}$$

$$प_{३} = अ^{३}+अ^{३}+अ^{३}+\cdots = न\cdot\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}अ^{३}$$

. . . .

$$\text{अथवा}\left\{\begin{matrix}(क्ष+अ)(क्ष+अ)\cdots(क्ष+अ)\\ \text{ज्यांत न गुणक आहेत}\end{matrix}\right\} = क्ष^{न}+नअक्ष^{न-१}+न\cdot\frac{न-१}{२}अ^{२}क्ष^{न-२}+\text{इत्यादि.}$$

यांत, जर क्ष=१ असें कल्पिलें, तर या प्रमाणें होईल

$$(१+अ)^{न} = १+नअ+न\cdot\frac{न-१}{२}अ^{२}+\text{इत्यादि.}$$

श्रेणीचे कोणत्येही शेवटापासून आरंभिलें तर गुणक सारिखेच आहेत, याचें कारण अंकगणित मूळपीठिकेंतील २११ व्ये कलमावरून लक्षांत येईल. जसें या पुढील उदाहरणांत ही दिसेल.

$$(१+क्ष)^{२} = १+२क्ष+क्ष^{२}$$

$$(१+क्ष)^{३} = १+३क्ष+३क्ष^{२}+क्ष^{३}$$

$$(१+क्ष)^{४} = १+४क्ष+६क्ष^{२}+४क्ष^{३}+क्ष^{४}$$

$$(१+क्ष)^{५} = १+५क्ष+१०क्ष^{२}+१०क्ष^{३}+५क्ष^{४}+क्ष^{५}$$

$$(१+क्ष)^{६} = १+६क्ष+१५क्ष^{२}+२०क्ष^{३}+१५क्ष^{४}+६क्ष^{५}+क्ष^{६}$$

$(\text{१}-\text{क्ष})^{\text{न}}$ याची किंमत काढायासाठीं, श्रेणींत क्षचें चिन्ह बदल कर; ह्मणजे, क्षचेआगीं −क्ष मांड; $\text{क्ष}^{\text{२}}$ याचें चिन्ह तसेंच राहूं दे; $\text{क्ष}^{\text{३}}$ याचेआगीं $-\text{क्ष}^{\text{३}}$ मांड; आणि याप्रमाणें पुढेंही; ह्मणजे याप्रमाणें होईल

$$(\text{१}-\text{क्ष})^{\text{न}}=\text{१}-\text{न}\text{क्ष}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}\,\text{क्ष}^{\text{२}}-\text{इत्यादि}.$$

जेव्हां न पूर्णांक आहे, तेव्हां साधारण रूपानें श्रेणी यापुढीलरीतीनें मांडिली जाईल, जांत १ आणि न यांचेमधील आणि त्यासुद्धां सर्व गुणक जे पूर्णांक आहेत ते $\text{प}_{\text{न}}$ याणें दाखविले आलात.

$$(\text{१}+\text{क्ष})^{\text{न}}=\text{प}_{\text{न}}\left\{\frac{\text{१}}{\text{प}_{\text{न}}}+\frac{\text{क्ष}}{\text{प}_{\text{१}}\text{प}_{\text{न}-\text{१}}}+\frac{\text{क्ष}^{\text{२}}}{\text{प}_{\text{२}}\text{प}_{\text{न}-\text{२}}}+\cdots\cdots+\frac{\text{क्ष}^{\text{न}-\text{१}}}{\text{प}_{\text{न}-\text{१}}\text{प}_{\text{१}}}+\frac{\text{क्ष}^{\text{न}}}{\text{प}_{\text{न}}}\right\}$$

ह्मणजे वर सांगीतल्याप्रमाणें गुणकांचा सारिखेपणा यापासून दाखविला गेला.

अभ्यासासाठीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतों :

१. जेव्हां न पूर्णांक आहे.

$$\text{२}^{\text{न}}=\text{१}+\text{न}+\text{न}\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}+\text{न}\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}\cdot\frac{\text{न}-\text{२}}{\text{३}}+\text{इत्यादि}$$

$$\text{०}^{\text{न}}=\text{१}-\text{न}+\text{न}\cdot\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}-\text{न}\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}\cdot\frac{\text{न}-\text{२}}{\text{३}}+\text{इत्यादि}$$

$$\text{२}^{\text{न}-\text{१}}=\text{१}+\text{न}\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}+\text{न}\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}\cdot\frac{\text{न}-\text{२}}{\text{३}}\cdot\frac{\text{न}-\text{३}}{\text{४}}+\text{इत्यादि}$$

२. $(\text{अ}+\text{ब})^{\text{न}}=\text{अ}^{\text{न}}+\text{न}\text{अ}^{\text{न}-\text{१}}\text{ब}+\text{न}\frac{\text{न}-\text{१}}{\text{२}}\text{अ}^{\text{न}-\text{२}}\text{ब}^{\text{२}}+\text{इत्यादि}$

३. जर न पूर्णांक असेल, तर

$$\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)^{\text{२}}=\text{क्ष}^{\text{२}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{२}}}+\text{२}$$

$$\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)^{\text{३}}=\text{क्ष}^{\text{३}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{३}}}+\text{३}\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)$$

$$\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)^{\text{४}}=\text{क्ष}^{\text{४}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{४}}}+\text{४}\left(\text{क्ष}^{\text{२}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{२}}}\right)+\text{६}$$

$$\left(\text{क्ष}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}}\right)^{\text{२न}}=\text{क्ष}^{\text{२न}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{२न}}}+\text{२न}\left(\text{क्ष}^{\text{२न}-\text{२}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{२न}-\text{२}}}\right)$$
$$+\text{२न}\frac{\text{२न}-\text{१}}{\text{२}}\left(\text{क्ष}^{\text{२न}-\text{४}}+\frac{\text{१}}{\text{क्ष}^{\text{२न}-\text{४}}}\right)+\cdots\cdots$$

याचे शेवटीं $\frac{२न(२न-१)\cdot(२न-२)\cdots\cdots(न+१)}{१\cdot\ २\ \cdot\ ३\ \cdots\cdots\ न}$

$$\left(क्ष+\frac{१}{क्ष}\right)^{२न+१} = क्ष^{२न+१} + \frac{१}{क्ष^{२न+१}} + (२न+१)\left(क्ष^{२न-१}+\frac{१}{क्ष^{२न-१}}\right)+\cdots$$

याचे शेवटीं $\frac{(२न+१)(२न)\cdots(न+२)}{१\cdot२\cdot३\cdots\cdots(न+१)}\left(क्ष+\frac{१}{क्ष}\right)$

४. $\frac{(१+क्ष)^न+(१-क्ष)^न}{२} = १+न\frac{न-१}{२}क्ष^२+न\frac{न-१}{२}\ \frac{न-२}{३}\ \frac{न-३}{४}क्ष^४+$ इत्यादि

$\frac{(१+क्ष)^न-(१-क्ष)^न}{२} = नक्ष+न\frac{न-१}{२}\ \frac{न-२}{३}\ क्ष^३+$ इत्यादि.

५. शिकणारानें आपल्या कामासाठीं या पुढील तऱ्हेनें उदाहरणें आणि त्यांचे ताळे सिद्ध करून बाळगून ठेवावे: कोणताही न घातप्रकाशक, पूर्ण किंवा अपूर्ण, धन किंवा ऋण असो, असा घेऊन सिद्धांताचे सहाय्यानें, $(१+क्ष)^न$ आणि $(१+क्ष)^{न-१}$ यांचा श्रेणीचे रूपांत विस्तार करावा; नंतर निघालेल्ये पहिल्ये श्रेणीस १+क्ष याणीं गुणून वरचे दुसऱ्ये द्वियुक्पदाची श्रेणी होईल.

६. $अ^न = ब^न+न(अ-ब)ब^{न-१}+न\frac{न-१}{२}(अ-ब)^२ब^{न-२}+$ इत्यादि.

यानंतर या पुढील पक्षांवर विशेषेंकरून अधिक दृष्टी ठेवावी लागेल:

$$\left(१+\frac{१}{न}\right)^{नक्ष} = १+नक्ष\frac{१}{न}+नक्ष\frac{नक्ष-१}{२}\cdot\frac{१}{न^२}+नक्ष\frac{नक्ष-१}{२}\ \frac{नक्ष-२}{३}\ \frac{१}{न^३}+\text{इत्यादि}$$

परंतु $नक्ष\frac{१}{न}=क्ष$, $\quad नक्ष\frac{नक्ष-१}{२}\times\frac{१}{न^२}=क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}$

$नक्ष\frac{नक्ष-१}{२}\times\frac{नक्ष-२}{३}\times\frac{१}{न^३}=क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}\ \frac{क्ष-\frac{२}{न}}{३}$ इत्यादि, यावरून

$$\left(१+\frac{१}{न}\right)^{नक्ष} = १+क्ष+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{क्ष-\frac{२}{न}}{३}+\text{इत्यादि}$$

वरचे श्रेणींत क्ष=१ असें घे, तर याप्रमाणें होईल

$$\left(१+\frac{१}{न}\right)^{न} = १+१+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{१-\frac{२}{न}}{३}+\text{इत्यादि}$$

परंतु १९६ पृष्ठाप्रमाणें $\left(१+\frac{१}{न}\right)^{नक्ष} = \left\{\left(१+\frac{१}{न}\right)^{न}\right\}^{क्ष}$

ह्मणजे वरची पहिली श्रेणी दुसऱ्ये श्रेणीचा क्ष घात आहे, आणि

$\left(१+१+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}+ इत्यादि\right)^{क्ष} = १+क्ष+क्ष\,\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२} + इत्यादि$

जर न=०, तर $(१+क्ष)^{न}=१$, १६९ पृष्ठ पहा अथवा $(१+क्ष)^{न}-१=०$, अथवा $\frac{(१+क्ष)^{न}-१}{न}$ हा अपूर्णांक $\frac{०}{०}$ हें रूप धरितो. आतां विचारितों कीं जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां या अपूर्णांकास नियतता आहे कीं नाहीं २७३ पृष्ठ पहा.

साधारण रूपाचे सिद्धांता पासून.

$$\frac{(१+क्ष)^{न}-१}{न} = क्ष+\frac{न-१}{२}क्ष^{२}+\frac{न-१}{२}\cdot\frac{न-२}{३}क्ष^{३}+ इत्यादि .$$

आणि जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां दुसऱ्ये बाजूची नियतता या प्रमाणें होस्ये,

$$क्ष+\left(\frac{-१}{२}\right)क्ष^{२}+\left(\frac{-१}{२}\right)\left(\frac{-२}{३}\right)क्ष^{३}+\left(\frac{-१}{२}\right)\left(\frac{-२}{३}\right)\left(\frac{-३}{४}\right)क्ष^{४}+ इत्यादि$$

अथवा $क्ष-\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{३}-\frac{क्ष^{४}}{४}+ इत्यादि$

ह्मणजे,

जसा न अनियत घटत जातो, तसी $\frac{१+क्ष^{न}-१}{न}$ ही पद्धती या समोरचे श्रेणीचे अनियत जवळ जवळ होत जास्ये. } $क्ष-\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{३}-\frac{क्ष^{४}}{४}+ इत्यादि.$

जर क्ष=ज्ञ-१, आणि जेव्हां न अनियत घटत जातो, तेव्हां $\frac{ज्ञ^{न}-१}{न}$ याची नियतता या प्रमाणें आहे,

$$(ज्ञ-१)-\frac{१}{२}(ज्ञ-१)^{२}+\frac{१}{३}(ज्ञ-१)^{३}-\frac{१}{४}(ज्ञ-१)^{४}+ इत्यादि$$

जेव्हां क्ष अथवा ज्ञ-१, १ पेक्षां कमी, अथवा ज्ञ, २ पेक्षां कमी आहे, तेव्हां ही श्रेणी उतरती आहे या खेरीज या श्रेणीचे गुणाविषयीं दुसरें कांहीं

माहित नाहीं. जा पद्धतीपासून ही श्रेणी उत्पन्न होत्ये तीस आतां शोधून प-हातों. त्या पद्धतीमध्यें जर ज्ञचे जागीं $ज्ञ^{म}$ घेतला, तर या प्रमाणें होईल.

$$\frac{ज्ञ^{मन}-१}{न} \text{ अथवा } म\frac{ज्ञ^{मन}-१}{मन}$$

यांत म नियत परिमाण आहे, आणि न अनियत घटत जातो अशी कल्पना कर: तर मन ही अनियत घटत जातो. आतां, जेव्हां न अनियत घटत जातो तेव्हां जर φ नची नियतता न आहे, तर φ (मन) याची नियतता तीच असावी. परंतु यांत इतका मात्र भेद आहे, की जर (म=६ असें घेतलें), तर नचे कोणत्येही अतिलहान किमतीविषयीं, जितका φन त्या नियततेचे जवळ होत जातो, तितके φ(६न) त्याचे जवळ जात नाहींत, कांकीं या नियततेचा गुण या प्रमाणें आहे, कीं, न पुरतेपणीं लहान घेतल्यानें, इच्छे प्रमाणें लहान अशा न चा कोणत्याही सांगीतल्याक अपूर्णांकापेक्षां φन कमी केला जातो, तर नचे इच्छिल्ये किमतीचा ६ वा भाग घेतल्याने φ(६न) हे तसेच नचे तितके जवळ केले जातील. यावरून वरचा दोन पद्धती ह्मणजे

$$\frac{ज्ञ^{न}-१}{न} \text{ आणि } म\frac{ज्ञ^{मन}-१}{मन}$$

यांची नियतता सारिखीच आहे. परंतु जर पहिल्ये पद्धतीला ψ ज्ञ ह्मटलें, तर दुसरी पद्धती $\frac{१}{म}ψ(ज्ञ^{म})$ आहे; तर या प्रमाणें होतें

$$ψ \text{ ज्ञची नियतता} = \frac{१}{म}ψ\, ज्ञ^{म} \text{ ची नियतता}$$
$$= \frac{१}{म}\times ψ\, ज्ञ^{म} \text{ ची नियतता}$$

अथवा

$$ज्ञ-१-\frac{१}{२}(ज्ञ-१)^{२}+\text{ इत्यादि } = \frac{१}{म}\left(ज्ञ^{म}-१-\frac{१}{२}(ज्ञ^{म}-१)^{२}+\text{ इत्यादि}\right)$$

या श्रेणीचा हा गुण पुढील शोधाचा ताळा पहाण्याकरितां कामांत आणिला जाईल.

$$(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$$

वरचा पद्धतींत मूळप्रकाशक चिन्ह असममान आहे, असा पक्ष वरचे कृतीमध्यें अद्यापि आला नाहीं, परंतु $\sqrt{२}$ याची नियतता अंकगणितरूपानें काढली असतां उत्तरोत्तर याप्रमाणें पदें होतात,

$$१,\ १\cdot४,\ १\cdot४१,\ १\cdot४१४,\ १\cdot४१४२, \text{ इत्यादि}$$

यावरून $१+क्ष \quad (१+क्ष)^{\frac{१४}{१०}} \quad (१+क्ष)^{\frac{१४१}{१००}} \quad (१+क्ष)^{\frac{१४१४}{१०००}}$ इत्यादि

हीं उत्तरोत्तरचीं पदें घेतल्यानें $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याचे नियततेचे जवळ जवळ होनजातात असें जाणलें पाहिजे, ह्मणजे $\sqrt{२}$ याचे जागीं, अथवा कोणत्येही नियततेचे जागीं तें चिन्ह घेतलें आहे त्याचे जागीं कोणतेंही जवळचें पद क घेतलें असतां $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याचे जोडीची जवळची श्रेणी याप्रमाणें आहे,

$$१+क\,क्ष+क\,\frac{क-१}{२}\,क्ष^{२}+ \text{ इत्यादि}$$

जेव्हां ही श्रेणी उतरती आहे, आणि जर प्रत्येक पद सहस्त्रांशाचे आंत खरें होई असें निघेल, तर स्पष्ट आहे, कीं श्रेणीचें सर्व धन सहस्त्रांशाचे आंत खरें होईल. **१९० एथा प्रमाणें** $\sqrt{२}$ याचे जवळचा क आणि क+म ह्या दोन किमती आहेत अशी कल्पना कर, ह्मणजे पहिली कमी आणि दुसरी अधिक, आणि अशी कल्पना कर कीं त्यांचें **प** पद आणि $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ हीं ताडितों, अथवा,

$$क\cdot\frac{क-१}{२}\cdots\frac{क-प+२}{प-१}\,क्ष^{प-१} \text{ आणि } (क+म)\cdot\frac{क+म-१}{२}\cdots\frac{क+म-प+२}{प-१}\,क्ष^{प-१}$$

यांचें प्रमाण याप्रमाणें आहे,

$$\frac{क+म}{क}\cdot\frac{क+म-१}{क-१}\cdots\frac{क+म-प+२}{क-प+२}$$

यांत म इच्छेप्रमाणें लहान घेतला जाईल, तर स्पष्ट आहे, कीं वरचे प्रत्येक गुण्यगुणक इच्छेप्रमाणें एकमाचे हवे तेवढे जवळ केले जातील, आणि, यामुळें, त्यांचा गुणाकार इच्छेप्रमाणें एकमाचे हवा तेवढा जवळ केला जाईल. ह्मणजे कांहीं **दिलेल्या** पदांचे संख्येविषयीं, दोन अवळजवळ-

चे पदांची किंमत इच्छेप्रमाणें जवळजवळ करितां येईल. आतां क्ष हा १ पेक्षां कमी आहे अशी कल्पना कर, ह्मणून अशानें ३४१ पृष्ठाप्रमाणें दोन जवळच्या श्रेण्या उतरल्या आहेत. यावरून, क पदें घेतलीं जातील, कीं त्यांचे पुढील राहिल्ये पदांचे बेरीजेची नियतता इच्छेप्रमाणें हवी तेवढी लहान होईल: आणि म इतका लहान घेतां येतो, कीं एक जवळचे श्रेणीचीं सर्व क पदें दुसऱ्ये जवळचे श्रेणीचें क पदांचे दशलक्षांशाचे आंत इतक्या अंतरानें जवळ होतील; यावरून ह्या जवळजवळच्या श्रेण्या या पुढील रूपानें मांडिल्या जातील:

अ+ब+क+..............+ज......+ $\left\{\right.$ पूर्वींचे पदांचे बेरिजेचे दशलक्षांशाहून कमी अशीं पुढील राहिलेलीं पदें.

अ(१+श)+ब(१+घ)+....+ज(१+ष)+ $\left\{\right.$ पूर्वींचे पदांचे बेरिजेचे दशलक्षांशाहून कमी अशीं पुढील राहिलेलीं पदें.

यांत श, घ, ..., ष, हे प्रत्येक निरनिराळे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत. अ+ब+क....+ज हीस, पहिल्ये जवळचे श्रेणीचे जवळची आहे असें ह्मण, आणि ती दाखवायासाठीं प घे; तर अश+बघ+....जष ही प-चे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहे, आणि पहिली जवळची श्रेणी पूर्णरूपानें मांडिली असतां याप्रमाणें होईल

प+क्षप यांत क्ष दशलक्षांशापेक्षां कमी आहे,

दुसरी जवळची श्रेणी पूर्णरूपानें मांडिली असतां याप्रमाणें होईल

प(१+वि)+यप(१+वि) यांत वि आणि य प्रत्येक दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत.

यांची वजाबाकी याप्रमाणें आहे,

$$\text{पवि}+\text{प}(\text{य}-\text{क्ष})+\text{पयवि}.$$

ही वजाबाकी प चे **तीन** दशलक्षांशांपेक्षां कमी आहे; कांकीं **वि, य—क्ष, यवि,** हीं निरनिराळीं **प** चे दशलक्षांशापेक्षां कमी आहेत. परंतु $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याची नियतता वरचे दोन श्रेण्यांचे मध्यें असावी, आणि यामुळें त्या दोन जवळचे श्रेण्याचें अंतर **प** चे तीन दशलक्षांश आहे, इतकें पचें आणि त्या नियततेचें अंतर नाहीं.

जेव्हां १ पेक्षां क्ष अधिक किंवा श्रेणी चढती आहे, तेव्हां या पक्षीं वरचेरीती प्रमाणें तसेंच उत्तर दाखवायास अशक्य आहे: परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं या पक्षांत केवळ **बीजगणितरूप** बरोबरीची प्रतिज्ञा सांगितली, परंतु **अंकगणितरूपाची नाहीं**: आणि जें वर लिहिलें तें हेंच आहे, कीं

$$१+\sqrt{२}क्ष+\sqrt{२}\,\frac{\sqrt{२}-१}{२}\,क्ष^{२}+ इत्यादि$$

ही पद्धती, चुकीवांचून $(१+क्ष)^{\sqrt{२}}$ याचेआगीं मांडिली जाईल; म्हणून **३४३ ३४४ पृष्ठांवरील** मूळकारणापासून जी सामान्य सिद्धता काढिली तींत या पक्षाची सिद्धता आहे. जेव्हां श्रेणी उतरती आहे, तेव्हां वरची कृती **अंकगणितरूपाचे** बरोबरीचा जवळपणा दाखविल्ये.

इच्छे प्रमाणें जवळ जवळ होण्याविषयीं, कोणत्येही दुसऱ्ये पक्षास वरची गोष्ट लागू होईल. आतां द्वियुक्पदसिद्धांताचे कांहीं अधिक परिणाम सांगतों.

बारावा अध्याय.

घातप्रकाशकांची आणि लाग्रतमाची श्रेणी यांविषयीं.

जसजसें, बीजगणितरूपाचें चिन्ह दुसऱ्ये निरनिराळ्ये चिन्हाशीं किंवा चिन्हांचे एकीकरणाशीं संबंध ठेवितें, तशीं त्यास निरनिराळीं नावें असतात. जसें अब, यांत बचे संबंधानें, अ यास **गुणक** ह्मणतात; अबचे संबंधानें अ यास **फाक्टर*** ह्मणतात. तसेंच, $अ^{ब}$ यांत, अचे संबंधानें, ब यास **घातप्रकाशक** ह्मणतात; $अ^{ब}$ याचे संबंधाने, ब यास **लाग्रतम** ह्मणतात, आणि बचे संबंधानें अ यास लाग्रतमाचा **पाया** ह्मणतात.

जसें $३^{४}$, यांत, ३ या पायास, $३^{४}$ अथवा ८१ यांचें लाग्रतम ४ आहे; $अ^{क्ष}$, यांत, अ या पायास $अ^{क्ष}$ याचें लाग्रतम क्ष आहे. हें याप्रमाणें दर्शविलें जाईल, ह्मणजे $४ = लाग_{३}\ ८१$ आणि $क्ष = लाग_{अ}\ अ^{क्ष}$: यांत लाग ह्मणजे **लाग्रतम** शब्दाचा संक्षेप, आणि खालीं लिहिलेला अंक त्याचा पाया आहे.

उदाहरणें. $१०^{३} = १०००$ $\qquad ३ = लाग_{१०}१०००$

जर $अ^{क्ष} = य$ तर $क्ष = लाग_{अ}\ य$

जर $प^{क} = १-ज्ञ$ तर $क = लाग_{प}\ (१-ज्ञ)$

कांहीं दिलेल्या ह्मणजे १० या पायास लाग्रतमाचा एकादा पर्याय करण्यासाठीं, हीं पुढील समीकरणें एकापुढें एक उलगडून, प्रत्येकांतून क्षची किंमत काढिली पाहिजे.

---

* फाक्टर हा इंग्लीश शब्द आहे, ह्मणजे जा दोन पदापासून कांहीं गुणाकार होतो त्या प्रत्येक पदास फाक्टर ह्मणतात, तो गुण्य किंवा गुणक असेल त्याचें समान्य नाम फाक्टर आहे.

$१०^{क्ष} = १$ $१०^{क्ष} = २$ $१०^{क्ष} = ३$ $१०^{क्ष} = ४$ इत्यादि

ही किंमत बहुतकरून, केवळ जवळ जवळ काढितां येईल: ह्मणजे, बहुतकरून एकं मात्रीं लाग्रतम असममान आहे. तेव्हां जर असें ह्मटलें, कीं लाग$_{१०}$ २ = ·३०१०३ आहे, तर अर्थ हान्च, कीं

$१०^{·३०१०३} = २$ अतिजवळ, अथवा $\sqrt[१०००००]{१०^{३०१०३}} = २$ जवळ

जवळ, आणि असा एकादा अपूर्णांक क काढितां येईल, कीं $१०^{क}$ इच्छेप्रमाणें २ यांचे हवा तेवढा जवळ होईल, आणि ·३०१०३ हे त्या अपूर्णांकाचे जवळचे आहेत.

या पुढील सिद्धांतामध्यें एकच पाया कल्पिला आहे, ह्मणजे, तो अ आहे.

१ सिद्धांत. पाया कोणताही असला तरी, १ याचें लाग्रतम० आहे. स्पष्ट आहे, कीं ही गोष्ट $अ^{०} = १$ याची मांडण्याची दुसरी रीति आहे, आणि ती याप्रमाणें मांडिली जाईल, लाग$_{अ}$ १ = ०.

२ सिद्धांत. पायाचें लाग्रतम १ आहे. ही गोष्ट $अ^{१} = अ$, यांत आहे, आणि ती याप्रमाणें दर्शविली आहे: ह्मणजे लाग$_{अ}$ अ = १.

३ सिद्धांत. य आणि $\frac{१}{य}$ यांचीं लाग्रतमे भिन्नचिन्हाचीं असतात, परंतु त्यांची अंकगणितरूपाची किंमत बरोबर असते. कांकीं जर $य = अ^{क्ष}$ अथवा क्ष = लाग$_{अ}$ य, तर याप्रमाणें होतें, $\frac{१}{य} = अ^{-क्ष}$ अथवा −क्ष = लाग$_{अ}$ $\frac{१}{य}$; ह्मणजे, लाग$_{अ}$ $\frac{१}{य}$ = − लाग$_{अ}$ य.

४ सिद्धांत. जर पाया अ आहे, आणि $अ^{म}$ आणि $अ^{न}$ यांमध्यें कोणताही पूर्ण किंवा अपूर्णांक येतो, तर त्या पूर्ण किंवा अपूर्णांकाचें लाग्रतम म आणि न यांमध्यें येतें.

कांकीं जर $अ^{म}$ आणि $अ^{न}$ यांचेमध्यें $अ^{क्ष}$ हा अंक आहे, तर म आणि न यांचेमध्यें क्ष हें लाग्रतम येतें, १७४, १७५ पृष्ठ पहा.

पाया १०		पाया $\frac{१}{२}$	
यांमधील अंकाचें लायतम	यांमध्यें असतें	यांमधील अंकाचें लायतम	यामध्यें असतें
१ आणि १०	० आणि १	१ आणि $\frac{१}{२}$	० आणि १
१० आणि १००	१ आणि २	$\frac{१}{२}$ आणि $\frac{१}{४}$	१ आणि २
१०० आणि १०००	२ आणि ३	$\frac{१}{४}$ आणि $\frac{१}{८}$	२ आणि ३
इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि
१ आणि $\frac{१}{१०}$	० आणि −१	१ आणि २	० आणि −१
$\frac{१}{१०}$ आणि $\frac{१}{१००}$	−१ आणि −२	२ आणि ४	−१ आणि −२
$\frac{१}{१००}$ आणि $\frac{१}{१०००}$	−२ आणि −३	४ आणि ८	−२ आणि −३
इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि	इत्यादि

५ **सिद्धांत. गुणाकाराचें लायतम त्याचे फाकूटराचे लायतमाचे बेरिजे बरोबर आहे.** अ पाया असेल, आणि **प, क, आणि र,** यांचीं लायतमें प, क, आणि र असतील, तर

$$प = अ^{प} \qquad क = अ^{क} \qquad र = अ^{र}$$

$पकर = अ^{प+क+र}$ अथवा $लाग(पकर) = प+क+र = लाग\ प + लाग\ क + लाग\ र$.

६ **सिद्धांत. प्रमाणाचें, भागाकाराचें, किंवा अपूर्णांकाचें लायतम, अग्रसर आणि उपाग्रसराचें, भाज्य आणि भाजकाचें, किंवा अंश आणि छेद यांचे लायतमाचे वजाबाकी बरोबर आहे.**

कांकीं $\frac{प}{क} = अ^{प-क}$ अथवा $लाग\ \frac{प}{क} = प - क = लाग\ प - लाग\ क$.

७ **सिद्धांत. $प^{म}$ याचें लायतम प चे लायतमास म ने गुणून निघतें;** ह्मणजे, जर $प = अ^{प}$ आहे, तर $प^{म} = अ^{मप}$, अथवा $लाग\ प^{म} = मप = म\ लाग\ प$.

८ सिद्धांत. ऋणअंकास गणितरूपाचें लायतम नाहीं: आणि जो बीजगणिताविषयीं यापूर्वीं विचार झाला त्यांत, ऋणपायाचे लायतमाच्या कांहीं पर्यायही नाहीं. हा सिद्धांत नाहीं, परंतु व्याख्यान आहे, आणि त्याचा सारांश हाच: कीं कांहीं उलटे विषय आहेत, ज्यांचा अर्थ अद्यापि शिकणाराचे समजांत येणार नाहीं, यामुळें ऋणपरिमाणाचे लायतमाचा विचार, आणि ज्या धनपरिमाणाचे लायतमास अंकगणितरूपाचा अर्थ आहे, याशिवाय धनपरिमाणाचे सर्व लायतमाचाही विचार एकीकडे ठेवावा लागतो. कांकीं $अ^{क्ष} = ब$ या समीकरणाचें जरी केवळ एक अंकगणितरूप उत्तर आहे, तरी केवळ एकच उत्तर आहे असें सिद्ध झालें नाहीं.

९ सिद्धांत. ० याचें लायतम अनंत आहे; याचा अर्थ हाच, कीं यचें लायतम नेहेमी १ याचे एक बाजूस किंवा दुसऱ्ये बाजूस ऋण आहे, तर जसजसा य अनियत घटत जातो, तसतसें त्याचें लायतम अंकगणितरूपानें अनियत वाढत जातें. $\left(\frac{१}{२}\right)^{क्ष}$ हें अनियत घटण्यासाठीं, क्ष अंकगणितरूपानें अनियत वाढत जावा आणि तो धनही असावा: आणि $२^{क्ष}$ ऋण आहे, तर त्यास अनियत घटण्यासाठीं क्षलाही अंकगणितरूपाची वाढ अनियत असावी. यावरून २६५ पृष्ठावरचे प्रतिज्ञेचा अर्थ कळून येतो; आणि लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं बीजगणितामध्यें ∞ हें चिन्ह धन किंवा ऋण असते, म्हणून ही गोष्ट या पुढील प्रमाणें दाखविली जाईल. जर $य = \frac{१}{क्ष}$, तर य आणि क्ष यांस सारिखें चिन्ह असावें: जर क्ष अनियत घटत जातो, तर तो ० या रूपाचे जवळ येतो, आणि अशा रूपास कांहीं चिन्ह नाहीं, कांकीं धन आणि ऋण परिमाणाचे मध्यांतील मर्यादा आहे. यामुळें य, हा अनियत वाढत असतां, तशेच मर्यादेचे जवळ होत जातो; कांकीं य आणि $\frac{१}{क्ष}$ याचें चिन्ह सारिखेंच आहे, तर क्षचें कोणतेंही रूप असेल, ज्यास धन किंवा ऋणचिन्ह कल्पिलें जाईल, तर यलाही त्यासारिखेंच चिन्ह कल्पिलें जाईल. परंतु वेगवेगळे उदाहरणापासून जो या गोष्टीचा समज व्हावयाचा तो भूमिती-

हीं बीजगणित लागू करण्याचीं कांहीं अधिक उदाहरणें पाहिल्यावांचून शि-कणारास प्राप्त होणार नाहीं.

वरचे सिद्धांताचे दृष्टांताविषयीं हीं पुढील उदाहरणें सांगतों.

$$क्ष \times १ = क्ष \qquad लाग\ क्ष + लाग\ १ = लाग\ क्ष \qquad (लाग\ १ = ०)$$

$$क्ष^{१} = क्ष \qquad १ \times लाग\ क्ष = लाग\ क्ष$$

$$लाग_{अ}\ अक्ष = लाग_{अ}\ क्ष + लाग_{अ}\ अ = लाग_{अ}\ क्ष + १$$

$$लाग\ क्ष\sqrt{य} = लाग\ क्ष + लाग\ य^{\frac{१}{२}} = लाग\ क्ष + \frac{१}{२}\ लाग\ य$$

$$लाग\ \frac{क्षय^{\frac{१}{२}}}{पक^{२}} = लाग\ क्ष + \frac{१}{२}\ लाग\ य - लाग\ प - २\ लाग\ क$$

$$लाग\left(\frac{क्षय^{३}}{पक^{-१}}\right)^{-१} = -१\ \{लाग\ क्ष + ३\ लाग\ य - लाग\ प - (-१)\ लाग\ क\}$$

$$= -१\ लाग\ क्ष - ३\ लाग\ य + लाग\ प - लाग\ क$$

आतां लाग्रतमाचे संबंधाचे श्रेण्यांचा विचार करितों.

३४९व्ये पृष्ठावर, न आणि क्ष यांचे सर्व किंमतीविषयीं हा पुढील सिद्धांत सिद्ध केला आहे,

$$\left\{१+१+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{१-\frac{२}{न}}{३}+इत्यादि\right\}^{क्ष} = १+क्ष+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{क्ष-\frac{२}{न}}{३}+इ०$$

या दोन श्रेण्या या साधारणरूपाच्या आहेत, ह्मणजे $\left(१+\frac{१}{न}\right)^{क}$, ह्मणून **३४१ व्ये पृष्ठाप्रमाणें** जेव्हां १ पेक्षां $\frac{१}{न}$ कमी आहे, किंवा जेव्हां १ पेक्षां न अधिक आहे, तेव्हां वरच्या दोन श्रेण्या उतरत्या आहेत. आतां मनांत आण, कीं न अनियत वाढत जातो तर या पक्षांत वरच्या श्रेण्यांची नियतता या प्रमाणें होईल, ह्मणजे

$१+१+\frac{१-\frac{२}{न}}{२}+\frac{१-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{१-\frac{२}{न}}{३}+$ इत्यादि याची नियतता $=१+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२\cdot३}+$ इत्यादि

आणि $१+क्ष+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}+क्ष\frac{क्ष-\frac{१}{न}}{२}\cdot\frac{क्ष-\frac{२}{न}}{३}+$ इत्यादि याची नियतता $=१+क्ष+\frac{क्ष^{२}}{२}+\frac{क्ष^{३}}{२\cdot३}+$ इ०.

परंतु $१+१+\frac{१}{२}+$ इत्यादि याची जवळची किंमत **३०४ पृष्ठाप्रमाणें** काढिली असतां हीच आहे,

२·७१८२८१८२····, आणि यास e ह्मटलें. यामुळें ३०४ पृष्ठाप्रमाणें,

$$e = १ + क्ष + \frac{क्ष^{२}}{२} + \frac{क्ष^{३}}{२·३} + \text{इत्यादि.}$$

यामुळें, जर e पाया असेल, तर ज्या अंकाचें लायतम क्ष आहे, तो अंक $१ + क्ष + \frac{क्ष^{२}}{२} +$ इत्यादि हाच आहे. यावरून, शोधण्याचे क्रमानें, ज्याचा पाया e आहे, असा जो लायतमाचा पर्याय निघाला, त्यास लायतमाचा **स्वाभाविक** पर्याय ह्मणतात; इंग्लिश भाषेंत त्याचीं दुसरीं ही नामें आहेत तीं एथें सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं.

एथें ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं **बीजगणिताचे पृथक्करणामध्यें, नुसता लाग असा शब्द आला, तर असें समजावें कीं त्या लायतमाचा पाया e आहे, जेव्हां असें नसेल, तेव्हां विशेषें करून सांगीतलें जाईल.**

वरचें समीकरण नेहेमी खरें असतांना, या प्रमाणें होतें

$$e^{कक्ष} = १ + कक्ष + \frac{क^{२}क्ष^{२}}{२} + \frac{क^{३}क्ष^{३}}{२·३} + \text{इत्यादि.}$$

परंतु $e^{कक्ष} = (e^{क})^{क्ष}$; आणि जर e पाया असून अचें लायतम क आहे असें कल्पिलें, तर $e^{क} = अ$, आणि

$$(e^{क})^{क्ष} \text{ अथवा } अ^{क्ष} = १ + (\text{लाग } अ)क्ष + \frac{(\text{लाग}अ)^{२}क्ष^{२}}{२} + \frac{(\text{लाग}अ)^{३}क्ष^{३}}{२·३} + \text{इत्यादि}$$

यापासून हें निघतें, कीं जर क्ष अनियत घटत जातो तर $\frac{अ^{क्ष} - १}{क्ष}$ याची नियतता लागअ होईल.

परंतु अशी नियततेची श्रेणी पूर्वी **३४९ पृष्ठावर** मिळाली; यावरून

$$\text{लाग } अ = (अ - १) - \frac{१}{२}(अ - १)^{२} + \frac{१}{३}(अ - १)^{३} - \text{इत्यादि}$$

अथवा, जर अ = १ + ब, तर या प्रमाणें होईल

$$\text{लाग}(१ + ब) = ब - \frac{ब^{२}}{२} + \frac{ब^{३}}{३} - \text{इत्यादि} \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

बचे जागीं −ब मांड, तर या प्रमाणें होईल

$$\text{लाग}(१ - ब) = -ब - \frac{ब^{२}}{२} - \frac{ब^{३}}{३} - \text{इत्यादि} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

वरचे पहिल्या श्रेणींतून दुसरी वजा कर, तर

$$\text{लाग}(१+\text{ब}) - \text{लाग}(१-\text{ब}) = \text{लाग}\left(\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}}\right)$$

$$\text{लाग}\left(\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}}\right) = २\left\{\text{ब} + \frac{\text{ब}^{३}}{३} + \frac{\text{ब}^{५}}{५} + \text{इत्यादि}\right\} \cdots\cdots\cdots (३)$$

$\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}} = \frac{१+\text{क्ष}}{\text{क्ष}}$ असें घे, तर $\text{ब} = \frac{१}{२\text{क्ष}+१}$

$$\text{लाग}\,\frac{१+\text{ब}}{१-\text{ब}} = \text{लाग}\,\frac{१+\text{क्ष}}{\text{क्ष}} = \text{लाग}(१+\text{क्ष}) - \text{लाग}\,\text{क्ष}$$

$$\text{लाग}(\text{क्ष}+१) - \text{लाग}\,\text{क्ष} = २\left\{\frac{१}{२\text{क्ष}+१} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(२\text{क्ष}+१)^{३}} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{(२\text{क्ष}+१)^{५}} + \text{इत्यादि}\right\} \cdots (४)$$

या शेवटील श्रेणीपासून याप्रमाणें होतें

$$\text{क्ष} = १,\ \text{लाग}\ २ = २\left\{\frac{१}{३} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{२७} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{२४३} + \text{इत्यादि}\right\}$$

$$\text{क्ष} = २,\ \text{लाग}\ ३ = \text{लाग}\ २ + २\left\{\frac{१}{५} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{१२५} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{३१२५} + \text{इत्यादि}\right\}$$

$$\text{क्ष} = ३,\ \text{लाग}\ ४ = \text{लाग}\ ३ + २\left\{\frac{१}{७} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{३४३} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{१६८०७} + \text{इत्यादि}\right\}$$

$$\text{क्ष} = ४,\ \text{लाग}\ ५ = \text{लाग}\ ४ + २\left\{\frac{१}{९} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{७२९} + \frac{१}{५}\cdot\frac{१}{५९०४९} + \text{इत्यादि}\right\}$$

वरप्रमाणें पूर्णांकांचीं लायतमें क्रमक्रमानें हवीं तेवढीं जवळजवळ काढिलीं जातील, ह्मणजे ही गोष्ट या पुढील उदाहरणावरून दाखविली जाईल, त्यांत खरेपणाचे जवळजवळ होण्यासाठीं दशांशांचीं स्थळें अकरापर्यंत घेतलीं आहेत.

$$\frac{१}{३} = \cdot ३३३३३३३३३३३$$
$$\frac{१}{३}\cdot\frac{१}{३^{३}} = \cdot ०१२३४५६७९०१$$
$$\frac{१}{५}\cdot\frac{१}{३^{५}} = \cdot ०००८२३०४५२७$$
$$\frac{१}{७}\cdot\frac{१}{३^{७}} = \cdot ००००६५३२१०५$$
$$\frac{१}{९}\cdot\frac{१}{३^{९}} = \cdot ०००००५६४५०३$$
$$\frac{१}{११}\cdot\frac{१}{३^{११}} = \cdot ०००००५१३१८$$
$$\frac{१}{१३}\cdot\frac{१}{३^{१३}} = \cdot ००००००४९२५$$
$$\frac{१}{१५}\cdot\frac{१}{३^{१५}} = \cdot ०००००००४६५$$
$$\frac{१}{१७}\cdot\frac{१}{३^{१७}} = \cdot ००००००००४६$$
$$\frac{१}{१९}\cdot\frac{१}{३^{१९}} = \cdot ०००००००००५$$

$$\cdot ३४६५७३५९०२८$$
$$२$$

$$\text{लाग}\ २ = \cdot ६९३१४७१८०५६ = \text{लाग}\ २\ \text{जवळजवळ}$$

यारीतीनें ३ यांचें लाग्रतम २ यांचें लाग्रतमापासून काढितां येईल, ४ यांचें लाग्रतम ३ यांचे लाग्रतमापासून काढितां येईल. आणि याप्रमाणें पुढें कोणत्येही पूर्णांकाचें लाग्रतम काढितां येईल. शिकणारानें अंकगणिताचे अभ्यासाकरितां १० अंकपावेतों लाग्रतमें काढावीं; असें केल्यानें आठ दशांशस्थळांपावेतों यापुढील प्रमाणें निघतें :

लाग १ = ०·०००००००० लाग ६ = १·७९१७५९४७

लाग २ = ०·६९३१४७१८ लाग ७ = १·९४५९१०१५

लाग ३ = १·०९८६१२२९ लाग ८ = २·०७९४४१५४

लाग ४ = १·३८६२९४३६ लाग ९ = २·१९७२२४५८

लाग ५ = १·६०९४३७९१ लाग १० = २·३०२५८५०९

परंतु केवळ प्रैम अंकांविषयीं वरची श्रेणी कामांत आणण्याची गरज पडेल, आणि आरंभीं जें लाग्रतमाचें कोष्टक तयार झालें तें, यापुढीलाप्रमाणें. ५९, अथवा ५८ + १ यांचें लाग्रतम काढायास इच्छिलें आहे असें मनांत आण. आतां ५८ = २ × २९, ह्मणजे हे दोन फाक्टर प्रैम अंक आहेत; जर, २ आणि २९ यांचें लाग्रतम पूर्वीं सांपडलें आहे, तर ५८ याचें लाग्रतम यापुढील समीकरणापासून निघेल,

$$\text{लाग } ५८ = \text{लाग } २ + \text{लाग } २९$$

आणि ५९ यांचें लाग्रतम या पुढील समीकरणापासून निघेल,

$$\text{लाग } ५९ = \text{लाग } ५८ + २\left\{\frac{१}{११७} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(११७)^{३}} + \text{इत्यादि}\right\}$$

आतां लाग २ यापासून आरंभ करून या पुढील प्रमाणें निघतें:

लाग २ = एक दिलेली श्रेणी लाग ६ = लाग ३ + लाग २

लाग ३ = लाग २ + एक दिलेली श्रेणी लाग ७ = लाग ६ + एक दिलेली श्रेणी

लाग ४ = २ लाग २ लाग ८ = ३ लाग २

लाग ५ = लाग ४ + एक दिलेली श्रेणी लाग ९ = २ लाग ३

लाग १० = लाग २ + लाग ५; आणि इत्यादि.

३५० पृष्ठावरून ही पुढील श्रेणी सिद्ध केली ह्मणजे,

$$ज्ञ-१-\frac{१}{२}(ज्ञ-१)^२+\text{इत्यादि}=\frac{१}{म}\left(ज्ञ^म-१-\frac{१}{२}(ज्ञ^म-१)^२+\text{इत्यादि}\right)$$

आतां हें दिसतें, कीं वरची श्रेणी या पुढील सारिखीच आहे,

$$\text{लाग } ज्ञ=\frac{१}{म}\text{ लाग } ज्ञ^म$$

आणि त्या श्रेणीवरून हें पुढील समीकरण अधिक उघड होतें असें दिसतें, ह्मणजे

$$\frac{ज्ञ^म-१}{म}\text{ याची नियतता}=ज्ञ-१-\frac{१}{२}(ज्ञ-१)^२+\text{इत्यादि}=\text{लाग } ज्ञ.$$

म अनियत घटता केला, अथवा म उत्तरोत्तर लहान लहान अपूर्णांक केला, अशी कल्पनेवरून समजांत येतें, कीं ज्ञ चें उत्तरोत्तर अधिक अधिक मोठें मूळ काढावें लागतें. ज्ञ चें पुरतेपणीं मोठें मूळ काढिल्यानें, इच्छेप्रमाणें $ज्ञ^म$ हवा तेवढा १ याजवळ आणला जाईल, अथवा इच्छेप्रमाणें $ज्ञ^म-१$ हवा तेवढा लहान केला जाईल; ह्मणजे ३०९ पृष्ठाप्रमाणें $ज्ञ^म-१$ इच्छेप्रमाणें सगळ्ये श्रेणीचे सर्वधना बरोबर हवा तितका जवळ जवळ केला जाईल. या मूळकारणाचे आधारावरून, आणि ज्ञ चें वर्गमूळ वारंवार काढिल्यानें लाग्रतमाचें कोष्टक पूर्वकाळीं या पुढील सारणीचे सहाय्यानें करीत असत,

$$\text{लाग } ज्ञ=\left(ज्ञ^{\frac{१}{१४०७३७४८८३५५३२८}}-१\right)\times १४०७३७४८८३५५३२८$$

फार जवळजवळ, जो अंक घेतला तो $२^{४७}$ होता, ह्मणजे हा ४७ वेळा वर्गमूळ काढिल्याचे बरोबर आहे.

पूर्वीप्रमाणें एकाद्ये पूर्णांकाचें लाग्रतम काढिल्यानंतर, अंशाचे लाग्रतमांतून छेदाचें लाग्रतम वजा केल्यानें, अपूर्णांकाचें लाग्रतम काढितां येईल.

ही पुढील गोष्ट सांगीतली पाहिजे: जेव्हां क्ष मोठा अंक आहे तेव्हां,

$$\text{लाग}(क्ष+१)=\text{लाग } क्ष+\frac{२}{२क्ष+१}$$ जवळ जवळ ३६० पृष्ठ पहा.

याविषयाविषयीं जें सांगण्याचें बाकी राहिलें, तें पुढील अध्याय पर्यंत ठेविलें जाईल. आतां तर वरचे श्रेणीचे कांहीं उपयोग दाखविले जातील.

उप्मा. जर फ(क्ष) हा क्षचें असें फङ्‌शन असेल, कीं फ(क्ष+य) याचा या पुढील श्रेणीचे रूपांत विस्तार केला जाईल, ह्मणजे

$$अ_{०} + अ_{१}य + अ_{२}य^{२} + इत्यादि$$

यांत जर **$अ_{०}$, $अ_{१}$**, इत्यादि हीं **केवळ** क्षचीं फङ्‌शनें असतील, तर

$$फ(अ+ब\sqrt{-१})+फ(अ-ब\sqrt{-१})$$

याशीं नुसतें साधारण रीतीनें काम केलें असतां, ही पद्धती नेहेमी धन किंवा ऋण परिमाणांची दर्शक होईल, ह्मणजे, जीं परिमाणें केवळ चिन्हरूप अथवा **अशक्य रूपाचीं** आहेत तीं सर्व नाहींशीं होतील; परंतु दुसऱ्या पक्षीं

$$फ(अ+ब\sqrt{-१})-फ(अ-ब\sqrt{-१})$$

ही या रूपाची होईल, ह्मणजे, एक शक्य परिमाण $\times\sqrt{-१}$.

यचें चिन्ह बदल करून पहिल्यानें फ(क्ष+य) याची किंमत मांड, आणि नंतर फ(क्ष−य) याची किंमत मांड;

$$फ(क्ष+य) = अ_{०} + अ_{१}य + अ_{२}य^{२} + अ_{३}य^{३} + इत्यादि$$

$$फ(क्ष-य) = अ_{०} - अ_{१}य + अ_{२}य^{२} - अ_{३}य^{३} + इत्यादि$$

यापासून,

$$फ(क्ष+य)+फ(क्ष-य) = २अ_{०} + २अ_{२}य^{२} + २अ_{४}य^{४} + इत्यादि$$

$$फ(क्ष-य)-फ(क्ष-य) = २अ_{१}य + २अ_{३}य^{३} + २अ_{५}य^{५} + इत्यादि$$

क्षचेजागीं अ मांड, तर $अ_{०}$, $अ_{१}$, इत्यादि हीं केवळ अचीं फङ्‌शनें होतात; यचेजागीं $ब\sqrt{-१}$ मांड, ह्मणजे मनांत आण, कीं

$य = ब\sqrt{-१}$	$य^{५} = ब^{५}\sqrt{-१}$
$य^{२} = ब^{२}\times-१ = -ब^{२}$	$य^{६} = -ब^{६}$
$य^{३} = -ब^{२}\times ब\sqrt{-१} = -ब^{३}\sqrt{-१}$	$य^{७} = -ब^{७}\sqrt{-१}$
$य^{४} = -ब^{३}\sqrt{-१}\times ब\sqrt{-१}$	$य^{८} = ब^{८}$ इत्यादि
$= -ब^{४}\times-१ = ब^{४}$	

यावरून,

$$फ(अ+ब\sqrt{-१})+फ(अ-ब\sqrt{-१})=२अ_{०}-२अ_{२}ब^{२}+२अ_{४}ब^{४}-इत्यादि$$

हें शक्य परिमाण आहे: आणि

$$फ(अ+ब\sqrt{-१})-फ(अ-ब\sqrt{-१})=२अ_{१}ब\sqrt{-१}-२अ_{३}ब^{३}\sqrt{-१}+इत्यादि$$

$$=\{२अ_{१}ब-२अ_{३}ब+इत्यादि\}\sqrt{-१}$$

हें शक्यरूप परिमाण $\times \sqrt{-१}$ आहे.

उदाहरणें. $$\frac{१}{अ+ब\sqrt{-१}}+\frac{१}{अ-ब\sqrt{-१}}=\frac{२अ}{अ^{२}+ब^{२}}$$

$$\frac{१}{अ+ब\sqrt{-१}}-\frac{१}{अ-ब\sqrt{-१}}=-\frac{२ब}{अ^{२}+ब^{२}}\sqrt{-१}$$

$$(अ+ब\sqrt{-१})^{न}+(अ-ब\sqrt{-१})^{न}=२अ^{न}-२न\frac{न-१}{२}अ^{न-२}ब^{२}+इत्यादि$$

$$(अ+ब\sqrt{-१})^{न}-(अ-ब\sqrt{-१})^{न}=(२नअ^{न-१}ब-२न\frac{न-१}{२}.\frac{न-२}{३}अ^{न-३}ब^{३}+इत्या०)\sqrt{-१}$$

अचे सर्व किमतीविषयीं वरचा सिद्धांत खरा आहे, यामुळें जेव्हां $अ=०$ तेव्हांही खरा आहे; ह्मणजे, या पुढील विषयीं

$$फ(ब\sqrt{-१})+फ(-ब\sqrt{-१})\ आणि\ फ(ब\sqrt{-१})-फ(-ब\sqrt{-१}).$$

उदाहरणें. न धन पूर्णांक आहे असें मनांत घे; तर

$$(ब\sqrt{-१})^{न}+(-ब\sqrt{-१})^{न}=\begin{cases}+२ब^{न}, जेव्हां\ न\ समतेने\ सम^{*}\ आहे.\\ ०, जेव्हां\ न\ विषम\ आहे.\\ -२ब^{न}, जेव्हां\ न\ विषमतेने\ सम^{\dagger}\ आहे.\end{cases}$$

$$(ब\sqrt{-१})^{न}-(-ब\sqrt{-१})^{न}=\begin{cases}०, जेव्हां\ न\ सम\ आहे.\\ २ब^{न}\sqrt{-१}, जेव्हां\ न\ १,५,९,\ इत्यादि\ आहे.\\ -२ब^{न}\sqrt{-१}, जेव्हां\ न\ ३,७,११,\ इत्यादि\ आहे.\end{cases}$$

---

* समतेने सम अंक ह्मणजे, जो ४ यांणीं भागिला जातो; जसें ४,८,१२, इत्यादि हे समतेने सम आहेत.

† विषमतेने सम अंक ह्मणजे, जो २ यांणी भागिला जातो, परंतु ४ यांणें भागिला जात नाहीं; जसा २,६,१०, इत्यादि.

$e^{क्ष\sqrt{-1}}$ आणि $e^{-क्ष\sqrt{-1}}$ यांस जर वरची कृती लागू केली, तर याप्रमाणें निघेल

$$e^{क्ष\sqrt{-1}} = 1 + क्ष\sqrt{-1} - \frac{क्ष^2}{2} - \frac{क्ष^3}{2\cdot3}\sqrt{-1} + \frac{क्ष^4}{2\cdot3\cdot4} + \text{इत्यादि}$$

$$e^{-क्ष\sqrt{-1}} = 1 - क्ष\sqrt{-1} - \frac{क्ष^2}{2} + \frac{क्ष^3}{2\cdot3}\sqrt{-1} + \frac{क्ष^4}{2\cdot3\cdot4} - \text{इत्यादि}$$

$$\frac{e^{क्ष\sqrt{-1}} + e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{क्ष^2}{2} + \frac{क्ष^4}{2\cdot3\cdot4} - \frac{क्ष^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{इत्यादि} \cdots\cdots (ञ)$$

$$\frac{e^{क्ष\sqrt{-1}} - e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = क्ष - \frac{क्ष^3}{2\cdot3} + \frac{क्ष^5}{2\cdot3\cdot4\cdot5} - \text{इत्यादि} \cdots\cdots (घ)$$

यापूर्वी या पुस्तकांत $\sqrt{-1}$ असें चिन्ह कामांत आणण्याची योग्यता, केवळ अनुभवावर ठेविली, २०४ **पृष्ठ पहा**; कोठपर्यंत खरीं उत्तरें निघतील हें पहाण्या करितां उलगडण्याचे लांब क्रमाचें उत्तर शोधायाचा आतां प्रसंग आला आहे. वरचे (ञ) आणि (घ) समीकरणाचा दोनही बाजूमध्यें बरोबरीचें बीजगणितरूप चिन्ह मांडिलें आहे; तर हेंच विचारायाचें आहे, कीं जे संबंध **पहिल्ये** दोन बाजूंत आहेत, तेच संबंध त्यांचे **दुसऱ्ये** बाजूंत असतील कीं नाहीं ?

म्हणजे $\quad = \dfrac{e^{क्ष\sqrt{-1}} + e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{2}$ यास φ क्ष म्हण

आणि $\quad \dfrac{e^{क्ष\sqrt{-1}} - e^{-क्ष\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ यास ψ क्ष म्हण

तर यावरून याप्रमाणें होतें

$$(\varphi क्ष)^2 = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} + 2e^{क्ष\sqrt{-1}}e^{-क्ष\sqrt{-1}} + e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{4}$$

$$(\psi क्ष)^2 = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} - 2e^{क्ष\sqrt{-1}}e^{-क्ष\sqrt{-1}} + e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{-4}$$

$$(\varphi क्ष)^2 + (\psi क्ष)^2 = \frac{4e^{क्ष\sqrt{-1} - क्ष\sqrt{-1}}}{4} = e^0 = 1$$

$$(\varphi क्ष)^2 - (\psi क्ष)^2 = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} + e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{2} = \varphi\, 2क्ष$$

$$\varphi क्ष \times \psi क्ष = \frac{e^{2क्ष\sqrt{-1}} - e^{-2क्ष\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\psi(2क्ष)$$

तर

$$(\varphi क्ष)^२ + (\psi क्ष)^२ = १ \qquad (\varphi क्ष)^२ - (\psi क्ष)^२ = \varphi(२क्ष)$$

$$२\varphi क्ष \times \psi क्ष = \psi(२क्ष)$$

या तीन संबंधांविषयीं हेंच विचारायाचें आहे, कीं (ञ) आणि (घ) या समीकरणाच्या दुसऱ्या बाजूंविषयीं हे संबंध खरे आहेत कीं नाहींत ?

कोणतीही श्रेणी तिणें तीच गुणायाची असेल, तर तिचा गुणाकार या पुढील रीतीवरून निघेल : प्रत्येक पदाचा वर्ग कर, आणि त्याचे पुढील सर्व पदें त्याच पदाचे दुपटीनें गुण. ह्मणजे (ञ) या श्रेणीचा वर्ग या प्रमाणें आहे.

$$\begin{aligned} &१ - क्ष^२ + \frac{क्ष^४}{३·४} - \frac{क्ष^६}{३·४·५·६} + इत्यादि \\ &\qquad + \frac{क्ष^४}{२} - \frac{क्ष^६}{२·३·४} + इत्यादि \\ &\qquad\qquad + इत्यादि \end{aligned}$$

(घ) या श्रेणीचा वर्ग या प्रमाणें आहे

$$\begin{aligned} &क्ष^२ - \frac{क्ष^४}{३} + \frac{क्ष^६}{३·४·५} - इत्यादि \\ &\qquad + \frac{क्ष^६}{२·३} - इत्यादि \\ &\qquad\qquad - इत्यादि. \end{aligned}$$

यांत पहिला वर्ग दुसऱ्यानें अधिक केला असतां, या प्रमाणें होईल,

$$१ + \left\{\frac{१}{३·४} + \frac{१}{२} - \frac{१}{३}\right\} क्ष^४ - \left\{\frac{१}{३·४·५·६} + \frac{१}{२·३·४} - \frac{१}{३·४·५} - \frac{१}{२·३}\right\} क्ष^६ + इ०$$

$$= १ + \{०\} \qquad - \{०\} \qquad + इ०$$

आणि पहिल्यांत दुसरा वर्ग वजा केला असतां, या प्रमाणें होईल,

$$१ - २क्ष^२ + \left\{\frac{१}{३·४} + \frac{१}{२} + \frac{१}{३}\right\} क्ष^४ - \left\{\frac{१}{३·४·५·६} + \frac{१}{२·३·४} + \frac{१}{३·४·५} + \frac{१}{२·३}\right\} क्ष^६ + इत्यादि$$

$$= \quad १ - \frac{(२क्ष)^२}{२} + \frac{(२क्ष)^४}{२·३·४} - \frac{(२क्ष)^६}{२·३·४·५·६} + इत्यादि$$

गुणाकारानें याच रीती प्रमाणें तिसरा संबंध ही खरा केला आईल.

(ञ) आणि (घ) या समीकरणाचे पहिल्ये आणि दुसऱ्ये बाजूंविषयीं

तर (छ) आणि (च) ही समीकरणें योग्य होतील;

$$\frac{१}{\sqrt{-१}}\cdot\frac{प-\frac{१}{प}}{प+\frac{१}{प}}=\frac{\psi क्ष}{\phi क्ष}=\chi क्ष \text{ अथवा } \frac{प^{२}-१}{प^{२}+१}=\sqrt{-१}\,\chi क्ष$$

यावरून $$प^{२}=\frac{१+\sqrt{-१}\,\chi क्ष}{१-\sqrt{-१}\,\chi क्ष}$$ ३५९ पृष्ठाप्रमाणें

$$\text{लाग } प^{२}=२\left\{\sqrt{-१}\,\chi क्ष+\tfrac{१}{३}(\sqrt{-१}\,\chi क्ष)^{३}+\text{ इत्यादि}\right\}$$
$$=२\sqrt{-१}\left\{\chi क्ष-\tfrac{१}{३}(\chi क्ष)^{३}+\tfrac{१}{५}(\chi क्ष)^{५}-\text{ इत्यादि}\right\}$$

परंतु $प^{२}=e^{२क्ष\sqrt{-१}}$ अथवा लाग $प^{२}=२क्ष\sqrt{-१}$, यामुळें

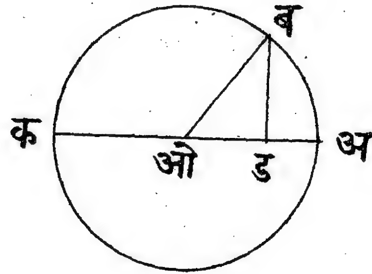
$$क्ष=\chi क्ष-\tfrac{१}{३}(\chi क्ष)^{३}+\tfrac{१}{५}(\chi क्ष)^{५}-\text{ इत्यादि}.$$

(ञ) आणि (घ) या दोन श्रेण्या नेहेमी उतरत्या आहेत, हें **३०६ आणि ३०७ पृष्ठावरून** सिद्ध केलें जाईल; परंतु क्ष पुरतेपणीं मोठा केल्यानें, कोणतेंही पद तें कितीही लांब असेल, त्यापासून उतरण्याचा आरंभ केला जाईल. ह्मणजे, जर क्ष = १००० असलें, तर या पुढील लिहिलेल्या पदाचे पूर्वी पहिल्या श्रेणीचे उतरण्याचा आरंभ होणार नाहीं.

$$\frac{क्ष^{२६४}}{२\cdot३\cdot४\cdot५\cdots\cdots२६३\cdot२६४}$$

परंतु लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं पदें अनुक्रमानें धन आणि ऋण आहेत, तरजरी श्रेणीचीं पहिलीं पदें मोठीं आहेत, तथापि ϕ क्ष आणि ψ क्ष यांची खरी किंमत १ पेक्षां अधिक कधीं होऊं शकत नाहीं; कांकीं १ हा धन असेल किंवा ऋण असेल, त्यापेक्षां वरचा दोहोंतून एक तरी अंकगणितरूपानें अधिक असला, तर $(\phi क्ष)^{२}+(\psi क्ष)^{२}=१$ हें खरें होण्यास अशक्य.

त्रिकोणमितीमध्यें, वरच्या श्रेण्यांचे गुण या पुढील रीतीनें भूमितिशीं जोडिलेले आहेत. एक वर्तुळ कर;



आणि **अ** बिंदूपासून **ब** बिंदू पुढें चालतो, असा कीं शेवटीं त्याचे चालण्यापासून **ओअ** त्रिज्येचा क्ष वेळांचे लांबीबरोबर कौंस होतो, आणि हवी तर वर्तुळाची पुनः प्रदक्षिणा करावी. **बड** रेघ **कअ** रेघेवर लंब कर; तेव्हां सिद्ध केलें जाईल, कीं **बड** ह्मणजे ψक्ष हा **ओअ** चा अपूर्णांक आहे आणि **ओड** ह्मणजे φक्ष हा **ओअ** चा अपूर्णांक आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१. $\dfrac{१+\text{क्ष}}{१+\frac{१}{\text{क्ष}}} = \text{क्ष}$, या समीकरणाचे सहाय्यानें,

हें पुढील समीकरण सिद्ध कर,

$$\text{लाग क्ष} = \text{क्ष} - \frac{१}{\text{क्ष}} - \frac{१}{२}\left(\text{क्ष}^{२} - \frac{१}{\text{क्ष}^{२}}\right) + \frac{१}{३}\left(\text{क्ष}^{३} - \frac{१}{\text{क्ष}^{३}}\right) - \text{इत्यादि}$$

२. हें पुढील सिद्ध कर,

$$e^{\text{क्ष}\sqrt{-१}} = \varphi\text{क्ष} + \sqrt{-१}\,\psi\text{क्ष}$$

$$e^{-\text{क्ष}\sqrt{-१}} = \varphi\text{क्ष} - \sqrt{-१}\,\psi\text{क्ष}$$

$$(\varphi\text{क्ष} + \sqrt{-१}\,\psi\text{क्ष})^{\text{म}} = \varphi(\text{मक्ष}) + \sqrt{-१}\,\psi(\text{मक्ष}).$$

तेरावा अध्याय.

गणित कृति सोपी करण्यासाठीं लायतम कामांत आणण्याच्या रीतीविषयीं.

पूर्वीलि अध्यायांमध्यें स्वाभाविक लायतमाचा पर्याय दाखविला, त्यांत अंशाचें लायतमांतून छेदाचें लायतम वजा केल्यानें अपूर्णांकाचें लायतम निघतें, याशिवाय दुसरी कांहीं सोपी रीति नाहीं. आणि तो पर्याय गणितकृति करण्याचें साधन खरें, परंतु त्यांत वर सांगीतलेला कमीपणा आहे. उदाहरण, ·३ यांचें लायतम काढण्याची या पुढील पेक्षां दुसरी कांहीं तोंकडी रीति नाहीं, ह्मणजे

लाग ३ − लाग १० अथवा १·०९८६१२२९ − २·३०२५८५०९ = −१·२०३९७२८०

·३ चें लायतम आणि ·३, ·०३, इत्यादिकांचीं लायतमें यांमध्यें वरपेक्षां कांहीं अधिक स्पष्ट संबंध दिसून येण्याविषयीं दुसरा पर्याय काढितों.

$लाग_{अ}\ क्ष$ याचा **मूळरूप** व्याख्याना पासून हें होतें

$$क्ष = अ^{लाग_{अ} क्ष} \qquad अ = क्ष^{\frac{1}{लाग_{अ} क्ष}}$$

तर याप्रमाणेंहोतें $क्ष = अ^{लाग_{अ} क्ष} = ब^{लाग_{ब} क्ष}$

परंतु $ब = अ^{लाग_{अ} ब}$ $\therefore क्ष = अ^{लाग_{अ} ब\ लाग_{ब} क्ष}$

त्याचसारिखें $क्ष = अ^{लाग_{अ} क\ लाग_{क} ब\ लाग_{ब} क्ष}$

$= अ^{लाग_{अ} इ\ लाग_{इ} क\ लाग_{क} ब\ लाग_{ब} क्ष}$

हें शेवटील उत्तर या पुढील प्रमाणें सिद्ध केलें जाईल :

$$\text{अ}^{\text{लाग}_\text{अ}\text{इ लाग}_\text{इ}\text{क लाग}_\text{क}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष}} = \left\{\text{अ}^{\text{लाग}_\text{अ}\text{इ}}\right\}^{\text{लाग}_\text{इ}\text{क लाग}_\text{क}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष}}$$

$$= \text{इ}^{\text{लाग}_\text{इ}\text{क लाग}_\text{क}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष}} = \text{क}^{\text{लाग}_\text{क}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष}} = \text{ब}^{\text{लाग}_\text{ब}\text{क्ष}} = \text{क्ष}$$

आतां, अ यास एकच अंकगणितरूप घातप्रकाशक लाविला जाईल, जापासून क्ष असें उत्तर निघेल; कांकीं, शक्य असेल तर त्यास दोन घातप्रकाशक प आणि क आहेत असें मनांत आण, आणि $\text{अ}^{\text{प}} = \text{क्ष}$, $\text{अ}^{\text{क}} = \text{क्ष}$ असें घे, यावरून $\text{अ}^{\text{प}} = \text{अ}^{\text{क}}$, आणि $\text{अ}^{\text{प}-\text{क}} = 1$; यामुळें $\text{प} - \text{क} = 0$, अथवा $\text{प} = \text{क}$, ह्मणजे कल्पना केल्या प्रमाणें, प आणि क यांमध्यें कांहीं भेद नाहीं. यावरून,

$$\text{क्ष} = \text{अ}^{\text{लाग}_\text{अ}\text{क्ष}} = \text{अ}^{\text{लाग}_\text{अ}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष}},$$ असें असतां हें पुढील होतें,

$$\text{लाग}_\text{अ}\text{क्ष} = \text{लाग}_\text{अ}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष} = \text{लाग}_\text{अ}\text{क लाग}_\text{क}\text{ब लाग}_\text{ब}\text{क्ष} \text{ इत्यादि},$$

या पुढील एकरूप समीकरणाचे सहाय्यानें हीं वरचीं उत्तरें स्मरणांत रहातील.

$$\frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}\frac{\text{ब}}{\text{अ}} \qquad \frac{\text{क्ष}}{\text{अ}} = \frac{\text{क्ष}}{\text{ब}}\frac{\text{ब}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{अ}}$$

यापासून हा पुढील सिद्धांत होतो :

$$\frac{\text{अ}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{इ}}\frac{\text{इ}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\text{फ}}\frac{\text{फ}}{\text{इ}}\frac{\text{इ}}{\text{क}}\frac{\text{क}}{\text{ब}} \text{ इत्यादि}$$

जर प्रत्येक अपूर्णांकाचे जागीं त्याचे छेदाचे पायास त्याचे अंशाचे लाग्रतम घेऊन मांडिलें असतां, वरचे समीकरणाची श्रेणी खरी होईल.

$\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\frac{\text{ब}}{\text{अ}} = \frac{\text{अ}}{\text{अ}}$ याचे सहाय्यानें स्मरणांत रहोतें कीं, $\text{लाग}_\text{ब}\text{अ लाग}_\text{अ}\text{ब} = \text{लाग}_\text{अ}\text{अ} = 1$

अथवा
$$\text{लाग}_\text{अ}\text{ब} = \frac{1}{\text{लाग}_\text{ब}\text{अ}}$$

हेंही होतें

$$\text{लाग}_{\text{ब}}\,\text{क्ष} = \frac{\text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{क्ष}}{\text{लाग}_{\text{अ}}\,\text{ब}}$$

अथवा; जा लाग्रतमाचा पाया अ आहे, अशा कांहीं दिलेल्या पर्यायास दुसऱ्या ब पायाचा पर्यायांत रूपभेद करण्याकरितां, प्रत्येक दिलेल्या लाग्रतमास बचा दिलेल्या लाग्रतमानें भाग.

व्यवहारांत सर्व अपूर्णांकांस दशांश अपूर्णांकांचें रूप देण्यास सोईस पडतें, तर जो पाया निवडून घेण्यास योग्य आहे, तो असा असावा कीं १०, १००, इत्यादि याचें लाग्रतम पूर्णांक असावें, ह्मणजे तो पाया १० असावा. कांकीं, अशा पक्षांत याप्रमाणें होईल,

$$\text{लाग}\,१० = १,\quad \text{लाग}\,१०० = २,\quad \text{लाग}\,१००० = ३,\ \text{इत्यादि}$$

आणि जर कोणत्याही अंकाचें लाग्रतम दाखविण्यासाठीं प घेतला, ह्मणजे जर तो अंक २५ आहे, तर याप्रमाणें होईल

$$\text{लाग}\ २.५ = \text{लाग}\ २५ - \text{लाग}\ १० = \text{प} - १$$

$$\text{लाग}\ .२५ = \text{लाग}\ २५ - \text{लाग}\ १०० = \text{प} - २$$

$$\text{लाग}\ .०२५ = \text{लाग}\ २५ - \text{लाग}\ १००० = \text{प} - ३\ \text{इत्यादि}$$

$$\text{लाग}\ २५० = \text{लाग}\ २५ + \text{लाग}\ १० = \text{प} + १$$

$$\text{लाग}\ २५०० = \text{लाग}\ २५ + \text{लाग}\ १०० = \text{प} + २\ \text{इत्यादि}$$

तर अशानें, **जेव्हां पाया १० आहे**, तेव्हां अंकांत जर दशांश चिन्हाचा स्थळभेद झाला, तर लाग्रतमाला कांहीं पूर्णांक मात्र मिळवावे किंवा त्यांतून वजा करावे लागतील.

जा लाग्रतमाचे पर्यायाचा पाया १० आहे, तो पर्याय या पुढील समीकरणाचे सहाय्यानें स्वाभाविक पर्यायापासून काढिला आहे,

$$\text{लाग}_{१०}\,\text{क्ष} = \frac{\text{लाग}_{e}\,\text{क्ष}}{\text{लाग}_{e}\,१०} = \frac{\text{लाग}_{e}\,\text{क्ष}}{२.३०२५८५०९} = \text{लाग}_{e}\,\text{क्ष} \times .४३४२९४४८१९.$$

या लाग्रतमाचे पर्यायास साधारण किंवा **कोष्टकरूप** किंवा **दशांशरूप**, अथवा **ब्रिगसाहेबाचा पर्याय** असें ह्मणतात; आणि ·४३४२९···· यांस त्या पर्यायाचा, **माडयूलस** ह्मणतात; आणि सामान्यतः जा पर्यायाचा पाया अ आहे, त्याचा माडयूलस १ ÷ लाग e अ, अथवा लाग$_{अ}$ e आहे.

या अध्यायांत पुढें जा लाग्रतमाविषयीं विचार होईल, तीं सर्व साधारण लाग्रतमें आहेत असें मनांत ठेवावें.

सांगीतल्ये अंकाचें लाग्रतम किंवा सांगीतल्ये लाग्रतमापासून अंक कसे काढावे, हें दाखविण्यासाठीं लाग्रतमाचे कांहीं कोष्टकांची रचना दाखवितों.

१. लालांड साहेबाची रचना.

अंक	लाग्रतम	बाकी	अंक	लाग्रतम	बाकी
१०८०	३·०३३४२४		१११०	३·०४५३२३	
१०८१	३·०३३८२६	४१	११११	३·०४५७१४	३९
१०८२	३·०३४२२७	४०	१११२	३·०४६१०५	३९
१०८३	३·०३४६२८	४०	१११३	३·०४६४९५	४०
१०८४	३·०३५०२९	४०	१११४	३·०४६८८५	३९
इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०

२. शेर्वीन, हट्टन, बाबेज, या तीन साहेबांची रचना.

अंक	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	बाकी	
५११५०	७११८०७२	८१५७	८२४१	८३२५	८४१०	८४९४	८५७८	८६६३	८७४७	८८३१	८४	
१	८९१५	९०००	९०८४	९१६८	९२५३	९३३७	९४२१	९५०६	९५९०	९६७४	१ २	८ १७
२	९७५९	९८४३	९९२७	००११	००९६	०१८०	०२६४	०३४९	०४३३	०५१७	३ ४	२५ ३४
३	७१२०६०१	०६८६	०७७०	०८५४	०९३९	१०२३	११०७	११९१	१२७६	१३६०	५ ६ ७	४२ ५० ५९
४	१४४४	१५२८	१६१३	१६९७	१७८१	१८६५	१९५०	२०३४	२११८	२२०२	८ ९	६७ ७६
इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०	इ०		

तां दाखवितों.

१.. एक ऋण लाग्रतम घे.जसें $-३\cdot१६८०४$, हें या पुढील रूपाचें आहे, $-३-\cdot१६८०४$, अथवा $-४+(१-\cdot१६८०४)$, अथवा $-४+\cdot८३१९६$. असें लाग्रतम विशेषें करून याप्रमाणें मांडितात, $\bar{४}\cdot८३१९६$ यांत, चोहों वर जें ऋणचिन्ह मांडिलें तें हें दाखवितें, कीं तो अंक मात्र ऋण आहे. यावरून, $\bar{१}३$ याचा अर्थ $-१०+३$, अथवा -७ आहे; $१\bar{३}६$ याचा अर्थ $१०६-३०$ अथवा ७६ आहे. या रीतीनें, प्रत्येक ऋण लाग्रतमाचा रूपभेद असा केला जाईल, कीं त्याचा दशांश भाग धन होईल.

२. लाग्रतमाचे दशांशाचा जो अंक आहे तो अंक कळल्यावर, सर्व लाग्रतमाचा अंक आहे तो त्वरेनें या पुढील कोष्टकावरून काढिला जाईल.

लाग $\frac{१}{१०००}$ अथवा लाग $१०^{-३}=-३$	लाग १० अथवा लाग $१०^{१}=१$
लाग $\frac{१}{१००}$ अथवा लाग $१०^{-२}=-२$	लाग १०० अथवा लाग $१०^{२}=२$
लाग $\frac{१}{१०}$ अथवा लाग $१०^{-१}=-१$	लाग १००० अथवा लाग $१०^{३}=३$

असें, $\cdot३०१०३$ या लाग्रतमाचा अंक जवळजवळ २ आहे; म्हणजे, $\cdot३०१०३=$ लाग २: यामुळें, $१\cdot३०१०३=$ लाग १० + लाग २ = लाग २०, $\bar{१}\cdot३०१०३=$ लाग $\frac{१}{१०}$ + लाग २ = लाग $\frac{२}{१०}$ = लाग $\cdot२$, आणि याप्रमाणें पुढेंही.

जर एकंमापेक्षां कमी, कांहीं दशांश अपूर्णांक असेल, आणि त्यास दाखविण्यासाठीं ड घेतला, तर ३५६ पृष्ठावरून हें कोष्टक होतें

याखालीं सांगतल्या अंका मधील अंकाचें लाग्रतम	या खालच्या अंकां- मध्यें असावें.	आणि यामुळें तो अंक या खालचे रूपाचा असावा.	अशी अंकाचीं उदा हरणें.
$\frac{१}{१०००}$ आणि $\frac{१}{१००}$	−३ आणि −२	−३ + ड	·००१३, ·००९८
$\frac{१}{१००}$ आणि $\frac{१}{१०}$	−२ आणि −१	−२ + ड	·०१४, ·०७३८
$\frac{१}{१०}$ आणि १	−१ आणि ०	−१ + ड	·१०३, ·४२९६
१ आणि १०	० आणि १	० + ड	२·५६, ७·९९
१० आणि १००	१ आणि २	१ + ड	११·०३, ४५·९६
१०० आणि १०००	२ आणि ३	२ + ड	१५९, १५९·१०८
इ०	इ०	इ०	इ०

व्याख्यान. साधारण लाग्रतमाचा पूर्ण भाग, तो धन असो किंवा ऋण असो, त्यास त्या लाग्रतमाचा **गुणप्रकाशक** ह्मणतात; आणि त्याचा दशांश भागास **मान्‌टिस्सा** ह्मणतात. जें पूर्वीं सांगीतलें त्यापासून जे सिद्धांत स्पष्ट निघतात, त्यांतून कांहीं सांगतों.

१. (जा लाग्रतमांत ० सुद्धां पूर्णांक येतो) त्यांत दशांश चिन्हाचे स्थळाचा कसाही भेद केल्यानें लाग्रतमाचा **मान्‌टिस्सा** मध्यें कांहीं भेद होत नाहीं, परंतु त्याचे **गुणप्रकाशकां** मध्यें मात्र भेद होतो.

२. जेव्हां अंकाचे दशांश चिन्हाचे **पूर्वीं** अर्थरूप अंक **येतात**, तेव्हां लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक, **धन** आहे, आणि तो **त्या अंकस्थळांचे संख्येंत एक एकं कमी इतका असतो.** जसें, १२३४५·६७ यांचें लाग्रतम ४+ **मान्‌टिस्सा** आहे; ६·९ यांचें लाग्रतम ०+ **मान्‌टिस्सा** आहे.

३. जेव्हां दशांश चिन्हाचे पूर्वीं अर्थरूप अंक **येत नाहींत**, तेव्हां लाग्रतमाचा गुणप्रकाशक **ऋण** आहे, आणि पहिल्ये अर्थरूप अंकाचे पूर्वीं जितकी ० स्थळांची संख्या येल्ये, त्यापेक्षां **एक अधिक** इतका गुणप्रकाशक असतो. जसें, ·०००८३ यांचें लाग्रतम −४+ **मान्‌टिस्सा**

त्या कोष्टकांतून १·०८१ यांचें लाग्रतम काढायाचें असेल, तर ·०३३८३ हा मानृटिस्सा मात्र काढावा, आणि त्याला ० प्रकाशक जोडावा. असें, १·०८१ यांचें लाग्रतम ०·०३३८३ आहे, आणि वर सांगीतल्ये रीतीवरून हा पुढील कोष्टक होतो :

लाग १०८१०००	= ६·०३३८३	लाग १·०८१	= ०·०३३८३
लाग १०८१००	= ५·०३३८३	लाग ·१०८१	= १̄·०३३८३
लाग १०८१०	= ४·०३३८३	लाग ·०१०८१	= २̄·०३३८३
लाग १०८१	= ३·०३३८३	लाग ·००१०८१	= ३̄·०३३८३
लाग १०८·१	= २·०३३८३	लाग ·०००१०८१	= ४̄·०३३८३
लाग १०·८१	= १·०३३८३	लाग ·००००१०८१	= ५̄·०३३८३

दुसरे कोष्टकांत ५ अंकस्थळाचे अंकांचीं लाग्रतमें आहेत. पहिल्ये कोष्टकांतून ५१५३ आणि ५१५४, अथवा ५१५३० आणि ५१५४० यांचींही लाग्रतमें काढितां येतील; कां कीं त्यांत केवळ गुणप्रकाशकाचा मात्र भेद आहे; परंतु या दोन शेवरील अंकामध्यें जे अंक येतात त्यांचीं लाग्रतमें ह्मणजे ५१५३१, ५१५३२, ... ५१५३९ यांचीं सगळीं लाग्रतमें दुसऱ्ये कोष्टकांतून काढितां येतील.

आतां लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जेव्हां एकाद्ये अंकसंख्येमध्यें एक अंक बदल होतो, तेव्हां लाग्रतमांतील जो पहिल्यानें अंक बदल होतो तो अंक संख्येतील बदललेल्ये अंकाप्रमाणें डाव्येकडे जवळ किंवा दूर जाईल. ही गोष्ट या ह्मणण्याप्रमाणें आहे, कीं सर्व अंकाचे प्रमाणाशीं जितका अंकाचा फेर लहान आहे, तितका लाग्रतमांमध्यें फेर लहान होईल, आणि

ही गोष्ट या पुढील सिद्धांतावरून दाखविली जाईल. ३६० आणि ३७२ पृष्ठांवरून १+क्ष यांचें साधारण लाग्रतम (म = ·४३४२९····) हे घेउन,

लाग १+क्ष = लाग क्ष+२म $\left(\frac{१}{२क्ष+१} + \frac{१}{३}\cdot\frac{१}{(२क्ष+१)^३} + \text{इत्यादि}\right)$ आहे, यामुळें लाग १+क्ष होण्यासाठीं जें कांहीं लाग क्ष मध्यें मिळवावें लागतें, तें जसजसा क्ष मोठा होत जातो, तसें तें मिळवायाचें कमी होतें. ही गोष्ट या पुढील उदाहरणांपासून प्रगट होईल, त्यांत जा अंकाचा बदल होतो, त्यास (′) या चिन्हानें खुणाविला आहे. वेगळे वेगळे अंक आणि त्यांचें लाग्रतम पहिल्यानें मांडिलें आहे, आणि त्याचे उजवे बाजूस पहिल्ये कोष्टकांत फेर केलेल्ये अंकाचे मूळचे सर्व अंक संख्येशीं जें प्रमाण होतें तें मांडिलें आहे; आणि दुसऱ्ये कोष्टकांत एकं मान्त्रा केवढा फेर लाग्रतमामध्यें होतो, तो सुमारानें मांडिला आहे.

		मूळचे सर्व अंकाशीं फेराचें प्रमाण.	लाग्रतमांतील खरा फेर.
लाग १′	= ०·००००००		
लाग २′	= ०·३०१०३००	१	$\frac{१}{३}$
लाग १०′	= १·०००००००		
लाग ११′	= १·०४१३९२७	$\frac{१}{१०}$	$\frac{१}{२५}$
लाग १००′	= २·०००००००		
लाग १०१′	= २·००४३२१४	$\frac{१}{१००}$	$\frac{१}{२५०}$
लाग १०००′	= ३·०००००००		
लाग १००१′	= ३·०००४३४१	$\frac{१}{१०००}$	$\frac{१}{२५००}$
लाग १००००′	= ४·०००००००		
लाग १०००१′	= ४·००००४३४	$\frac{१}{१००००}$	$\frac{१}{२५०००}$
लाग १०००००′	= ५·०००००००		
लाग १००००१′	= ५·०००००४३	$\frac{१}{१०००००}$	$\frac{१}{२५००००}$

वाढ $\frac{१}{२०००}$ या अपूर्णांकापेक्षां कमी होईल, आणि याप्रमाणें पुढेंही. याव-रून, कोणत्येही कोष्टकांत लाग्रतमाचीं अंकस्थळें किती काढायाचें अगत्य आहे तें पुरतेपणीं कळलें आईल. ह्मणजे मनांत आण, कीं असा एक कोष्टक करायाचा आहे, ज्यांत १०००० पासून ९९९९९ पर्यंत प्रत्येक पांच स्थळांचा अंक यावा. कोष्टकाचे शेवटीं अंकाचा फेर सुमारानें $\frac{१}{१०००००}$ होतो, आणि यामुळें लाग्रतमाची खरी वाढ $\frac{१}{२५०००००}$, अथवा ·०००००४ आहे. यामुळें लाग्रतमाचीं अंकस्थळें सहा अगत्य असावीं. सहा स्थळांपेक्षां कमीं असलीं, तर फेर दिसून येणार नाहीं;

उदाहरण,

लाग ९९८४६ = ५·९९९३३०७

लाग ९९८४७ = ५·९९९३३५०

या दोन लाग्रतमांमध्यें साहाव्ये स्थळीं मात्र भेद आहे. कोष्टकाचे आरंभीं अंकांची वाढ $\frac{१}{१००००}$ यापेक्षां किंचित अधिक आहे, आणि लाग्रतमाची खरी वाढ ·००००४ जवळजवळ आहे, तेथे पांच अंकस्थळें पुरेशीं होतील. परंतु व्यवहाराचे सोयीसाठीं, सर्व कोष्टकांत अंकस्थळें सारिखींच असलीं पाहिजेत, यामुळें थोडीं तरी साहा अंकस्थळें असावीं. वरचे दुसऱ्ये कोष्टकांत अंकांचीं पांच स्थळें आहेत, आणि त्याचे समोर लाग्रतमाचीं सात स्थळें आहेत. परंतु लाग्रतमाचीं पहिलीं तीन स्थळें कांहीं वेळपावेतों सारिखींच रहातात, यासाठीं, यद्यपि कोष्टकामध्यें फेर पुष्कळ होतो, तथापि जाजागीं फेर होतो, त्याजागीं ते अंक पहिल्या ओळींत मांडिलेले असतात: एणेकरून पुष्कळ जागा वांचल्ये, परंतु तशे रचनेपासून, हीच अ-

[redacted]

डचण होते, कीं लायतमाचे तिसऱ्या अंकाचा फेर ओळीचे प्रारंभींच क्वचित पडतो, तर तिसरा नवा अंक पहिल्यानें दृष्टीस पडे तो पर्यंत मांडिला जात नाहीं. हीं पुढील उदाहरणें जीं दुसऱ्या कोष्टकांतून काढिलीं आहेत, तीं त्या कोष्टकाची रचना आणि ही नवी अडचण, शब्दांनीं सांगीतल्यापेक्षां अधिक चांगली दाखवितील.

अंकसंख्या.	लायतमाचा मान्‌टिस्सा.	अंकसंख्या.	लायतमाचा मान्‌टिस्सा.
५१५२०	·७११ ९७५९	५१५२६	·७१२ ०२६४*
५१५२१	·७११ ९८४३	५१५२७	·७१२ ०३४९*
५१५२२	·७११ ९९२७	५१५२८	·७१२ ०४३३*
५१५२३	·७१२ ००११*	५१५२९	·७१२ ०५१७*
५१५२४	·७१२ ००९६*	५१५३०	·७१२ ०६०१
५१५२५	·७१२ ०१८०*	५१५३१	·७१२ ०६८६

या कोष्टकांत पहाण्यांत येईल, कीं प्रत्येक लायतम आणि त्याचे पूर्वींचें लायतम यांचें अंतर ·००००८३ आहे, किंवा ·००००८४ किंवा ·००००८५ आहे. सारांश, ५१५२० आणि ५१५२० + १० यांचे लायतमाचें अंतर ·०००००८४२ आहे, म्हणजे जशी अंकसंख्या क्रमाने एकएक वाढत जाते, तशी लायतमाची मध्यप्रमाण वाढ ·००००००८४ इतकी होते. यावरून, ५१५२० या अंकाचे जागीं आणि त्याचे अवळचे अंकाचे जागीं हीं पुढील समीकरणें होतात :

लाग (५१५२० + १) = लाग ५१५२० + ·००००००८४

लाग (५१५२० + २) = लाग ५१५२० + ·००००००८४ × २

अथवा जर १० पेक्षां ह अधिक नसेल, तर

लाग (५१५२० + ह) = लाग ५१५२० + ·००००००८४ × ह ....(अ)

पहिले तीन अंकांविषयीं खालीं पाहिलें पाहिजे.

अथवा कोष्टकांतील कित्येक लहान भागाविषयीं, जेव्हां अंकसंख्याचीं लाग्रतमें एकएकमाने वाढत जातात, तेव्हां ते अंक जवळजवळ गणित श्रेढी प्रमाणें वाढत जातात. आतां ३५९ आणि ३७२ पृष्ठांवरून

म = ·४३४२९···· असें असून,

$$\text{साधारण लाग}\left(१+\frac{ह}{क्ष}\right) = म\left(\frac{ह}{क्ष} - \frac{१}{२}\left(\frac{ह}{क्ष}\right)^{२} + \frac{१}{३}\left(\frac{ह}{क्ष}\right)^{३} - \text{इत्यादि}\right)$$

$$= म\frac{ह}{क्ष}, \text{ फारजवळ जेव्हां } \frac{क्ष}{ह} \text{ लहान आहे}$$ {३७९ पृष्ठपहा}

अथवा $\text{लाग}(क्ष+ह) = \text{लाग } क्ष + म\frac{ह}{क्ष}$, फारजवळजवळ,

हें समीकरण आणि वरचें (ञ) समीकरण एकरूपाचीं आहेत: यावरून जेव्हां ह = १० आहे त्या पक्षीं जर (ञ) जवळजवळ खरें आहे, तर जेव्हां ह एकमाचा अपूर्णांक आहे, तर (ञ) अगत्य अधिक खरें असावें. यावरून या पक्षांत याप्रमाणें होतें,

$$क्ष = ५१५२० \text{ आणि } \frac{म}{क्ष} \text{ अथवा } \frac{·४३४२९४५}{५१५२०} = ·००००००८४$$

$$\text{लाग } ५१५२०\tfrac{१}{२} = \text{लाग } ५१५२० + ·००००००८४ \times \tfrac{१}{२}$$

$$\text{लाग } ५१५२०·३६ = \text{लाग } ५१५२० + ·००००००८४ \times ·३६$$

कोष्टकांत जी ओळीवर बाकी मांडिली असत्ये, ती या कामासाठीं आहे, कीं जेव्हां साहा किंवा सात स्थळांपर्यंत लाग्रतम काढायाचें इच्छिलें आहे, तेव्हां वरचे समीकरणांत जो गुणाकार करावा लागतो, तो त्वरेनें करितां यावा. त्या ओळींत जवळचे पूर्णांक असे ८४चे दशक आहेत:

असें,

८४ यांचा एक दशक = ८·४, याचे जवळचा पूर्णांक = ८ आहे

८४ यांचे दोन दशक = १६·८ .... १७ आहे

८४ यांचे तीन दशक = २५·२ .... २५ आहे

आणि याप्रमाणें पुढेंही. ८४चे दशकांतून एक अंक कापून टाकिल्याने

त्यांचे शतक काढितां येतात, परंतु टाकिलेला अंक ५ अथवा पांचांचेवर असेल, तर बाकीचा अंक एकानें वाढवावा.

जसें,

८४ यांचा एक शतक जवळजवळ = ·८, याचेजवळचा पूर्णांक = १ आहे

८४ यांचे दोन शतक ········· = १·७, याचेजवळचा पूर्णांक = २ आहे

८४ यांचे तीन शतक ········· = २·५, याचेजवळचा पूर्णांक = ३ आहे

आणि याप्रमाणें पुढेंही. यावरून बाक्याची ओळ पहाण्यानें बाकीचे दशक आणि शतक लागलेच कळतात. आतां ३७२ पृष्ठावरचे दुसऱ्ये कोष्टकापासून ५१·५३९४६ यांचें लाग्रतम काढितों.

या अंकसंख्येचा मानूटिस्सा, आणि ५१५३९·४६ यांचे लाग्रतमाचा मानूटिस्सा सारिखाच आहे, आणि

$$\text{लाग} (५१५३९ + ·४६) = \text{लाग } ५१५३९ + ·००००० ८४ \times ·४६$$

$$= \text{लाग } ५१५३९ + ·०००००८४ \left(\frac{४}{१०} + \frac{६}{१००}\right)$$

परंतु

$$·०००००८४\left(\frac{४}{१०} + \frac{६}{१००}\right) = ·००००००१\left(\frac{४}{१०} \times ८४ + \frac{६}{१००} \times ८४\right)$$

$$\text{कोष्टकांतून} \quad = ·००००००१ (३४ + ५)$$

·१, ·०१, ·००१, इत्यादि यांणीं, जर कोणताही पूर्णांक गुणायाचा असेल, तर पूर्णांकाचा एकं स्थळींचा अंक दशांशाचें पहिलें किंवा दुसरें किंवा तिसरें इत्यादिस्थळीं मांडावा लागतो: यावरून हें होतें,

कोष्टकांतून लाग ५१५३९ यांचा मानूटिस्सा ···· = ·७१२१३६०

९ चे पुढें जो ४ अंक येतो, त्याविषयीं मिळवायाचें = ३४

आणि ४ चा पुढें जो ६ अंक येतो ········· = ५

बेरीज = ·७१२१३९९

ही बेरीज ५१५३९·४६ यांचे लाग्रतमाचा मानूटिस्सा आहे, आणि ५१५३९४६ यांचा लाग्रतमाचा मानूटिस्साही तोच आहे; यामुळे,

या शेवटील अंकाला योग्य गुणप्रकाशक लावला असतां, याप्रमाणें होईल

लाग ५१·५३९४६ = १·७१२१३९९

तशीच रीतीवरून, हीं पुढील उदाहरणें निघतात,

लाग·५१५२७४८ ?		लाग ५·१५०००८ ?	
लाग·५१५२७	१·७१२०३४९	लाग ५·१५००	०·७११८०७२
४	३४	०	००
८	७	८	७
लाग·५१५२७४८	१·७१२०३९०	लाग ५·१५०००८	०·७११८०७९

लाग ५१५२७६८००० ?		लाग·००००५१५४८९९	
लाग ५१५२७०००००	९·७१२०३४९	लाग·००००५१५४८	५·७१२२११८
६	५०	९	७६
८	७	९	८
लाग ५१५२७६८०००	९·७१२०४०६	लाग·००००५१५४८९९	५·७१२२२०२

या प्रश्नाचें उलटें या पुढील प्रमाणें करितात: मनांत आण, कीं १·७११८३६६ या लाग्रतमाचा बरोबरीची अंकसंख्या कोष्टकांतून काढायाची आहे. गुणप्रकाशक सोडून कोष्टकांतून जो मानूदिस्सा ·७११८३६६ यांचेजवळ असून, त्याहून कमी आहे त्यास शोधून काढिलें. तर दिसण्यांत येतें, कीं तो मानूदिसा ·७११८३२५ हा आहे, याची अंकसंख्या ५१५०३ आहे: यावरून अर्थ अंकांविषयीं इच्छिली अंकसंख्या एकमाचे आंत बाहेर सुमारें ५१५०३ इतकी आहे. तो इच्छिला अंक ५१५०३ + ह असा घे, तर ठाऊक आहे, कीं ह असा घेतला पाहिजे, कीं

लाग (५१५०३ + ह) = ४·७११८३६६

परंतु ३७८ पृष्ठावरून

लाग (५१५०३ + ह) = लाग ५१५०३ + ·००००८४ × ह फारजवळ.

= ४·७११८३२५ + ·००००८४ × ह

यावरून.

$$ह = \frac{४·७११८३६६ - ४·७११८३२५}{·००००००८४} = \frac{·००००००४१}{·००००००८४} = \frac{४१}{८४}$$

आतां, कोष्टकांतल्ये बाकीचे स्थळांत पहाण्यांत येतें, कीं

३४ हे ८४ चे $\frac{४}{१०}$ चे जवळ आहेत,

७६ हे ८४ चे $\frac{८}{१०}$ अथवा,

७ हे ८४ चे $\frac{८}{१००}$ चेजवळ आहेत;

ह्मणून ३४+७ अथवा ४१ हे ८४ चे $\frac{४}{१०} + \frac{८}{१००}$; ह्मणजे $\frac{४१}{८४}$ = ·४८ = ह:
यावरून ५१५०३+ह = ५१५०३·४८ आणि

४·७११८३६६ हें ५१५०३·८४ यांचें लायतम आहे

$\bar{१}$·७११८३६६ हें ·५१५०३८४ यांचें लायतम आहे

परंतु लायतम काढण्याची जी रीति आहे, तिचे उलट कृती केल्यानें व्यवहार कामासाठीं फार सोईस पडतें. आतां कोष्टकाचे दुसऱ्ये भागांतून एक उदाहरण सांगतों.

२१७४८३·६ यांचें लायतम काय आहे.

लाग २१७४८	(*)	५·३३७४१९३
३		६०
६	(†)	१२
लाग २१७४८३६	=	५·३३७४२६५

५·३३७४२६५ या लायतमाचा बरोबरीची अंकसंख्या काय आहे?

	·३३७४२६५
कोष्टकांत याचेजवळचें लायतम जाची अंकसंख्या २१७४८	·३३७४१९३
वजाबाकी	७२

* पद्यांत एकदांच गुणप्रकाशक मांडिला आहे.

† पूर्वीप्रमाणें, एथें ६ चे समोर पाहिलें असतां, १२० दिसतात, त्यांतून एक अंक सोडून देतों.

कोष्टकांत अंतरांचे ओळींत या वजाबाकीचे जवळचा अंक
त्याचे समोर ३ आहेत ६०

१२०

बाकीवर ० मांड, कांकीं एक अंक सोडिला होता. यामुळें एक अंक, वर मांडिला पाहिजे*, परंतु तो अंक कोणता हें माहित नाहीं. कोष्टकांत १२० यांचे समोर ६ हा अंक आहे.

यामुळें ५ गुणप्रकाशक आहे म्हणून दशांशचिन्हापूर्वी ६ अंकस्थळें असावीं, तरसांगीतल्ये लाग्रतमाचा बरोबरीचा इच्छिला अंक २१७४०३.६ आहे.

१. कोष्टकांतील बाकीची ओळ एकदां कामांत आणिल्यानंतर, शेवटींजी वजाबाकी येत्ये तिला, एक अंक कशासाठीं जोडिला पाहिजे. २. तो अंक काय आहे हें कशासाठीं समजूं शकत नाहीं. ३. ० खरें होईल असें कशानें घडेल. जरकित्येक लाग्रतमें काढून नंतर प्रत्येकाची उलट कृती केली तर ही गोष्ट शिकणाराचे मनांत अधिक ठसली जाईल. ११५ आणि १२५ जांचें मध्यप्रमाण १२० आहे त्यांचे कोष्टकांतील वजाबाकीचें उत्तर कदाचित वर निघालेले १२ असेल. वरचे कृतीचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

२.११८३२१४ आणि १.९६४८३१७ या लाग्रतमांचा अंकसंख्या काय आहेत?

	·११८३२१४		·९६४८३१७
१३१३१	·११८२९७८	९२२२१	·९६४८२९८
	२३६		१९
७	२३२	४	१९
	४०		०
१	३३		
उत्तर. ·०१३१३१७१		उत्तर. ९२·२२१४०	

* याविषयींजें पुढें येईल तें पहा.

$\bar{२}$·९ अशा तऱ्हेचे परिमाणाचे गुणाकार आणि भागाकार शिकणारांस करण्यासाठीं कदाचित येतील. या परिमाणांस ५नीं गुणायाचें असेल, तरजे हातचे येतील ते बीजगणिताचे मिळवणीचे रीतीप्रमाणें ऋणपरिमाणास मिळीव. जसें, ५वेळा ९ हे ४५, यावरचे ५मांडून हातीं ४घे; ५वेळा −२ हे −१० आहेत, आणि ४मिळून −६ होतात, तर $\bar{६}$·५ हें उत्तर आहे. अथवा

$$५(·९-२)=४·५-१०=४-१०+·५=\bar{६}·५$$

$\bar{२}$·९ यांस ५नीं भागायाचें असेल, तर ऋणपद ५नीं भागिलें जाई असें कर, आणि तितक्याने पदाची बाकी वाढवून नीटकर. जसें, $\bar{२}$·९ हे $\bar{५}$+३·९ आहेत, आणि

$$\frac{\bar{२}·९}{५}=\frac{\bar{५}}{५}+\frac{३·९}{५}=\bar{१}+·७८=\bar{१}·७८$$

हीं पुढील कांहीं दुसरीं उदाहरणें आहेत:

$\bar{३}$·४६
८
६) $\overline{२१}$·६८
$\bar{४}$·६१३

$\bar{१}$·४१७
१०
५) $\bar{६}$·१७०
$\bar{२}$·८३४

गुणाकार आणि भागाकार यांविषयीं लायलमें कामांत आणण्याचीं हीं पुढील उदाहरणें देतों. ·५७२९५७८ यांस २०·६२६४८यांणीं गुणिलें असतां, आणि तो गुणाकार ७८५३९८२ यांणीं भागिला असतां, नंतर भागाकाराचा नउ घात केला असतां, आणि त्या घाताचें दश घात मूळ काढिलें असतां, उत्तर काय येईल? अथवा हें पुढील काय होईल,

$$\left\{\frac{\cdot ५७२९५७८ \times २०\cdot ६२६४८}{\cdot ७८५३९८२}\right\}^{\frac{\cdot ९}{१०}}$$

लाग ·५७२९५७८		१̄·७५८१२२६
लाग २०·६२६४८		१·३१४४२५१
	बेरीज	१·०७२५४७७
लाग ·७८५३९८२		६·८९५०८९९
	वजाबाकी	६̄·१७७४५७८
		९
	१०)	५̄३̄·५९७१२०२
		६̄·७५९७१२०
५·७५०५		·७५९७०५६
		६४
८		६०
		४०
५		३८

उत्तर   ·००००५७५०५८५

शिकणाराने अभ्यासाकरितां या पुढील प्रमाणें समीकरणांची सत्यता दाखवायासाठीं उदाहरणें करावीं, ह्मणजे, असा अ(अ+ब) = अ²+अब, जांत अ आणि ब भलते कांहीं अंक असतील. अ आणि अ+ब यांचीं लाग्रतमें मिळवून त्यापासून अ(अ+ब) यांची किंमत निघाली, आणि त्यापासून अ² आणि अब यांची निराळी किंमत काढावी; आणि जर सगळी कृती शुद्ध केली असेल, तर शेवटील पदांची बेरीज पहिल्या पदाचे बरोबर होईल.

तशेच रीतीनें हीं पुढील समीकरणें कामांत आणिलीं जातील:

$$(अ+ब)(अ-ब) = अ^2 - ब^2$$

$$\sqrt{अब} = \sqrt{अ} \times \sqrt{ब}$$

$$(अब)^{\frac{म}{न}} = अ^{\frac{म}{न}} \times ब^{\frac{म}{न}}.$$

लाघवतमानें चुकीयांचून काम करणें याविषयीं शिकणारा केवळ अभ्यासानें मात्र निपुण होईल, आणि व्यवहारांतील जे सर्व प्रश्न येतात त्यांचीं विस्तार रूप उदाहरणें लाघवतमाविषयींचा बहुतेक पुस्तकांत आहेत.

इतिसमाप्त.

मुंबई

माहे एप्रील सन १८४८

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ	ओळ	अशुद्ध	शुद्ध
१	१२	दुसर्या	दुसऱ्या
९	२१	आकृति	कृति
१०	१६	पेट्यांत	पेटींत
१४	८	कुंडळी	कुंडली
१५	१२	अपेक्षां	वपेक्षां
१६	९	कृत्याच्या	कृतीच्या
२३	१९	पदांपुढें	पदांपूर्वी
२७	८ ड, ९ अ, १० क, १५ क्ष	पाणी	पाणें
४८	१२	$\frac{\text{१अअ+अब}}{\text{अ+ब}}$	$\frac{\text{२अअ+बब}}{\text{अ+ब}}$
५०	५	वास	तीस
५६	५	११	११ष्ट
९२	२	प्राविटीचे	प्राविटीचा
९८	६	हें पाशीं	पाशीं
१०२	१९	होई	होईल
१५६	१०	बिंदु	बिंदू
१६०	११	वांगली	वांगल्या
२२७	२	अपचा	अवघ्या